REŠITVE NOVEJŠIH KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

FRI, IŠRM

Zbral: Martin Raič

2020/21

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 20. 11. 2020

1. Označimo s K dogodek, da je Zdravko okužen, s T_Z dogodek, da je Zdravkov test pozitiven, T_1 pa dogodek, da je natanko en test pozitiven. Smiselno je privzeti, da so delavci glede okuženosti in delovanja testov med seboj neodvisni.

a) Iz besedila razberemo $P(K) = 0'03$, $P(T_Z \mid K) = 0'925$ in $P(T_Z \mid K^{\mathrm{c}}) = 0'021$. Sledi:

$$P(T_Z) = P(K)\,P(T_Z \mid K) + P(K^{\mathrm{c}})\,P(T_Z \mid K^{\mathrm{c}}) = 0'04812\,.$$

b) *Prvi način.* Pri vsakem delavcu je izvid pozitiven z verjetnostjo $0'04812$ in negativen z verjetnostjo $0'95188$. Torej je $P(T_1) = 10 \cdot 0'04812 \cdot 0'95188^9 \doteq 0'30872$. Za iskano pogojno verjetnost $P(K \mid T_1)$ je treba izračunati še:

$$\begin{aligned} P(K \cap T_1) &= P(K \cap T_Z \cap T_1) + P(K \cap T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1) = \\ &= P(K)\,P(T_Z \mid K)\,P(T_1 \mid K \cap T_Z) + P(K)\,P(T_Z^{\mathrm{c}} \mid K)\,P(T_1 \mid K \cap T_Z^{\mathrm{c}})\,. \end{aligned}$$

Če je Zdravkov izvid pozitiven, se dogodek T_1 ujema z dogodkom T_0', da so vsi ostali izvidi negativni. Iz neodvisnosti dobimo $P(T_1 \mid K \cap T_Z) = P(T_0' \mid K \cap T_Z) = P(T_0') = 0'95188^9$. Če pa je Zdravkov izvid negativen, se dogodek T_1 ujema z dogodkom T_1', da je izmed ostalih izvidov natanko eden pozitiven, zato je $P(T_1 \mid K \cap T_Z^{\mathrm{c}}) = P(T_1' \mid K \cap T_Z^{\mathrm{c}}) = P(T_1') = 9 \cdot 0'04812 \cdot 0'95188^8$. Sledi:

$$P(K \cap T_1) = 0'03 \cdot 0'925 \cdot 0'95188^9 + 0'03 \cdot 0'075 \cdot 9 \cdot 0'04812 \cdot 0'95188^8 \doteq 0'01846\,,$$

iskana verjetnost pa je enaka:

$$P(K \mid T_1) = \frac{P(K \cap T_1)}{P(T_1)} \doteq 0'05980\,.$$

Drugi način. Uporabimo naslednjo pogojno različico izreka o polni verjetnosti:

$$P(K \mid T_1) = P(T_Z \mid T_1)\,P(K \mid T_Z) + P(T_Z^{\mathrm{c}} \mid T_1)\,P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}})\,. \tag{$*$}$$

Ta enakost sicer v splošnem ne velja, zato jo je treba za dani primer posebej utemeljiti. Še prej pa poračunajmo do konca. Najprej iz simetrije dobimo, da je $P(T_Z \mid T_1) = 1/10$, torej $P(T_Z^{\mathrm{c}} \mid T_1) = 9/10$. Nato pa po Bayesovi formuli izračunamo:

$$\begin{aligned} P(K \mid T_Z) &= \frac{P(K)\,P(T_Z \mid K)}{P(T_Z)} = \frac{0'03 \cdot 0'925}{0'04812} \doteq 0'57668\,, \\ P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}}) &= \frac{P(K)\,P(T_Z^{\mathrm{c}} \mid K)}{P(T_Z^{\mathrm{c}})} = \frac{0'03 \cdot 0'075}{0'95188} \doteq 0'0023637\,. \end{aligned}$$

Sledi:

$$P(K \mid T_1) = \frac{1}{10} \cdot 0'57668 + \frac{9}{10} \cdot 0'0023637 \doteq 0'5980\,,$$

kar je isto kot prej.

A utemeljiti moramo še enakost $(*)$. Izrek o polni verjetnosti nam da:

$$P(K \cap T_1) = P(T_Z \cap T_1)\, P(K \mid T_Z \cap T_1) + P(T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1)\, P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1)\,.$$

Delimo s $P(T_1)$ in dobimo:

$$P(K \mid T_1) = P(T_Z \mid T_1)\, P(K \mid T_Z \cap T_1) + P(T_Z^{\mathrm{c}} \mid T_1)\, P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1)\,,$$

kar še ni $(*)$: utemeljiti je treba še, da je $P(K \mid T_Z \cap T_1) = P(K \mid T_Z)$ in $P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1) = P(K \mid T_Z)$. Za to pa podobno kot pri prvem načinu opazimo, da je $T_Z \cap T_1 = T_Z \cap T_0'$ in $T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1 = T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1'$. A dogodka T_Z in T_0' sta neodvisna, prav tako tudi T_Z^{c} in T_1'. Prav tako sta neodvisna dogodka $K \cap T_Z$ in T_0' ter dogodka $K \cap T_Z^{\mathrm{c}}$ in T_1'. Sledi:

$$\begin{aligned} P(K \mid T_Z \cap T_1) = P(K \mid T_Z \cap T_0') &= \frac{P(K \cap T_Z \cap T_0')}{P(T_Z \cap T_0')} = \frac{P(K \cap T_Z)\, P(T_0')}{P(T_Z)\, P(T_0')} = \\ &= P(K \mid T_Z) \end{aligned}$$

in podobno:

$$\begin{aligned} P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1) = P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1') &= \frac{P(K \cap T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1')}{P(T_Z^{\mathrm{c}} \cap T_1')} = \frac{P(K \cap T_Z^{\mathrm{c}})\, P(T_1')}{P(T_Z^{\mathrm{c}})\, P(T_1')} = \\ &= P(K \mid T_Z^{\mathrm{c}})\,. \end{aligned}$$

Enakost $(*)$ je s tem utemeljena, s tem pa tudi legitimnost celotnega izračuna.

2. Označimo z X število okuženih. Po Laplaceovi integralski formuli je približno:

$$P(X < 41) = P(X < 40\text{˙}5) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{40\text{˙}5 - 1316p}{\sqrt{1316p(1-p)}}\right).$$

Če označimo $n := 1316$ in $y := 40\text{˙}5$, dobimo neenačbo:

$$\Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq -0\text{˙}475$$

oziroma:

$$\Phi\left(\frac{np - y}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \leq 0\text{˙}475$$

Če označimo $q := \Phi^{-1}(0\text{˙}475) \doteq 1\text{˙}959964$, od tod dobimo:

$$\frac{np - y}{np(1-p)} \leq q\,,$$

kar je ekvivalentno:

$$(np - y)^2 \leq np(1-p)q^2 \quad \text{ali} \quad p < \frac{y}{n}\,.$$

Prvo neenačbo uredimo in dobimo kvadratno neenačbo:

$$(n^2 + nq^2)p^2 - (2ny + nq^2)p + y^2 \leq 0\,,$$

ki ima rešitev $p_1 \leq p \leq p_2$, kjer je:

$$p_1 = \frac{2npy + nq^2 - \sqrt{(2ny + nq^2)^2 - 4(n^2 + nq^2)y^2}}{2(n^2 + nq^2)} \doteq 0\text{'}0227\,,$$
$$p_2 = \frac{2npy + nq^2 + \sqrt{(2ny + nq^2)^2 - 4(n^2 + nq^2)y^2}}{2(n^2 + nq^2)} \doteq 0\text{'}0416\,.$$

Ker je $y/n \doteq 0\text{'}0308$, je torej maksimalna verjetnost p približno 0'0416.

Točen rezultat: 0'04116.

3. a) Označimo število odigranih partij z X. Ta slučajna spremenljivka je diskretna in lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4, \ldots$ Dogodek $\{X = k\}$ je unija naslednjih dveh nezdružljivih dogodkov:

- V k-ti partiji zmaga Pepe, prej pa Pepe nikoli ne zmaga in nista vsakič remizirala;
- V k-ti partiji zmaga Rudi, prej pa Rudi nikoli ne zmaga in nista vsakič remizirala.

Za $k = 2, 3, 4, \ldots$ torej velja:

$$P(X = k) = p\big((1-p)^{k-1} - (1-p-r)^{k-1}\big) + r\big((1-r)^{k-1} - (1-p-r)^{k-1}\big)\,.$$

b) Iskana verjetnost je enaka:

$$\sum_{k=2}^{\infty} p\big((1-p)^{k-1} - (1-p-r)^{k-1}\big) = p\left(\frac{1-p}{p} - \frac{1-p-r}{p+r}\right) = \frac{r}{p+r}\,.$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 4. 3. 2021

1. Definirajmo vektorsko funkcijo $h\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ po predpisu:

$$h(x,y) := \left(\frac{x}{1+y^2}\,,\ \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{1+y^2}}\right).$$

Ta funkcija je bijektivna z inverzom:

$$h^{-1}(t,u) = \left(t+u^2,\ \frac{u}{\sqrt{t}}\right),$$

ki ima Jacobijevo determinanto:

$$Jh^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -\frac{u}{2t^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{u^2+t}{t\sqrt{t}}\,,$$

torej ima slučajni vektor (T,U) gostoto:

$$p_{T,U}(t,u) = \frac{u^2+t}{t\sqrt{t}}\,p_{X,Y}\left(u^2+t,\ \frac{u}{\sqrt{t}}\right) = \frac{u^2+t}{t\sqrt{t}}\,p_X(t+u^2)\,p_Y\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) = ab\,e^{-u^2-t}$$

za $t>0$, sicer pa lahko gostoto postavimo na nič. Sledi, da sta T in U neodvisni, pri čemer je $T\sim\mathrm{Exp}(1)$ in $U\sim\mathrm{N}\big(0,\sqrt{2}\big)$. Od tod sledi tudi, da je $ab=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Nadalje iz:

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

sledi $a=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, torej je $b=\frac{1}{2}$.

Opomba. Zgornja rešitev ni edini način, po katerem pridemo do iskanih konstant in gostot. Tudi konstanta b se da izračunati neposredno, iskani gostoti pa lahko dobimo tudi prek dveh izmed naslednjih štirih skupnih gostot:

$$p_{X,T}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-t}} & ;\ x>t>0 \\ 0 & ;\ \text{sicer}, \end{cases}$$

$$p_{X,U}(x,u) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{\pi} & ;\ x>u^2 \\ 0 & ;\ \text{sicer}, \end{cases}$$

$$p_{T,Y}(t,y) = \begin{cases} e^{-t(1+y^2)}\sqrt{\pi t} & ;\ t>0 \\ 0 & ;\ \text{sicer}, \end{cases}$$

$$p_{X,T}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2u^2\sqrt{\pi}}{|y|^3}\,e^{-u^2(1+y^2)/y^2} & ;\ uy>0 \\ 0 & ;\ \text{sicer}. \end{cases}$$

2. *Prvi način.* Oštevilčimo zakonske pare z $1, 2, \ldots, n$ ter definirajmo:

$$X_i := \begin{cases} 1 & ; \text{pri } i\text{-tem paru sedi žena desno ob možu} \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

$$Y_i := \begin{cases} 1 & ; \text{pri } i\text{-tem paru sedi mož desno ob ženi} \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

tako da je $X = \sum_{i=1}^n X_i$ in $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Velja $E(X_i) = E(Y_i) = E(X_i^2) = E(Y_i^2) = \frac{1}{n}$. Nadalje je $E(X_i Y_i) = 0$, za $i \neq j$ pa velja $E(X_i X_j) = E(Y_i Y_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ in $E(X_i Y_j) = \frac{n-2}{n(n-1)^2}$. Sledi:

$$E(X) = E(Y) = 1\,, \qquad E(X^2) = E(Y^2) = 2\,, \qquad D(X) = D(Y) = 1\,,$$
$$E(XY) = \frac{n-2}{n-1}\,, \qquad K(X,Y) = -\frac{1}{n-1}\,, \qquad r(X,Y) = -\frac{1}{n-1}\,.$$

Drugi način. Predstavljamo si lahko, da se stoli najprej razdelijo na ženske in moške. Naj bo D množica parov sosednjih stolov, pri katerih je ženski stol desno od moškega, L pa naj bo množica parov stolov, pri katerih je ženski stol levo od moškega. Obe množici imata po n elementov. Za $i \in D$ definirajmo:

$$X_i := \begin{cases} 1 & ; \text{na } i\text{-tem paru stolov sedi zakonski par} \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

in podobno tudi za $j \in L$ definirajmo:

$$Y_j := \begin{cases} 1 & ; \text{na } j\text{-tem paru stolov sedi zakonski par} \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Podobno kot pri prvem načinu je $X = \sum_{i \in D}^n X_i$ in $Y = \sum_{j \in L}^n Y_j$. Prav tako podobno kot prej za $i \in D$ velja $E(X_i) = E(X_i^2) = \frac{1}{n}$, za $j \in L$ pa velja $E(Y_j) = E(Y_j^2) = \frac{1}{n}$. Nadalje za $i, j \in D$, $i \neq j$, velja $E(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$, za $i, j \in D$, $i \neq j$, pa velja $E(Y_i Y_j) = \frac{1}{n(n-1)}$. Vzemimo zdaj para $i \in D$ in $j \in L$. Če se para i in j prekrivata (tj. imata kakšen skupen stol, ki je lahko moški ali ženski), je $E(X_i Y_i) = 0$. Če pa se para ne prekrivata, je $E(X_i Y_j) = \frac{1}{n(n-1)}$. Parov, ki se ne prekrivajo, je $n(n-2)$. Nadaljujemo podobno kot pri prvem načinu.

3. a) Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4, \ldots$ in za x iz te množice velja:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=1}^{x-1} P(Y = y)\, P(X = x \mid Y = y) = \\ &= \sum_{y=1}^{x-1} (x - y)\, 2^{-x-1} = \\ &= \sum_{y=1}^{x-1} (x - y)\, 2^{-x-1} = \\ &= x(x-1)\, 2^{-x-2}\,. \end{aligned}$$

b) Iz:

$$
\begin{aligned}
P(Y=y \mid X=x) &= \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \\
&= \frac{P(Y=y)\, P(X=x \mid Y=y)}{P(X=x)} = \\
&= \frac{2(x-y)}{x(x-1)}
\end{aligned}
$$

dobimo:

$$
E(Y \mid X=x) = \frac{2}{x(x-1)} \sum_{y=1}^{x-1} y(x-y) = \frac{x+1}{3}
$$

ali krajše $E(Y \mid X) = \dfrac{X+1}{3}$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 29. 4. 2021

1. a) Iz:

$$\int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$$

dobimo $c = \dfrac{2}{a^2}$.

b) Če dano statistično spremenljivko označimo z X, njene neodvisne manifestacije pa z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, iz:

$$E(X) = \frac{2}{a^2}\int_0^a x(a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3}$$

dobimo cenilko po metodi momentov $\hat{a} = 3\bar{X}$.

c) Iz $E(\hat{a}) = 3\,E(\bar{X}) = 3\,E(X) = a$ dobimo, da je cenilka $\hat{a}$ nepristranska. Njena srednja kvadratična napaka je tako kar njena disperzija. Iz:

$$E(X^2) = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2(a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{6}$$

dobimo $D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \dfrac{a^2}{18}$ in posledično:

$$\mathrm{MSE}(\hat{a}) = D(\hat{a}) = 9\,D(\bar{X}) = \frac{9}{n}\,D(X) = \frac{a^2}{2n}\,.$$

d) Velja:

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(k\hat{a}) &= E\big[(k\hat{a}-a)^2\big] = \\
&= E(k^2\hat{a}^2) - 2ka\,E(\hat{a}) + a^2 = \\
&= k^2\Big(D(\hat{a}) + \big(E(\hat{a})\big)^2\Big) - 2ka\,E(\hat{a}) + a^2 = \\
&= k^2\left(\frac{a^2}{2n} + a^2\right) - 2ka^2 + a^2 = \\
&= \frac{a^2}{2n}\big((1+2n)k^2 - 4nk + 2n\big)\,.
\end{aligned}$$

Iz oblike izraza je jasno, da le-ta kot funkcija spremenljivke k doseže maksimum v stacionarni točki. Z odvajanjem po k dobimo:

$$\frac{a^2}{n}\big((1+2n)k - 2n\big) = 0\,,$$

torej:

$$k = \frac{2n}{2n+1}\,.$$

2. $\bar{X} \doteq 2{\cdot}343, \quad s \doteq 0{\cdot}2635, \quad F^{-1}_{\chi^2(29)}(0{\cdot}025) \doteq 16{\cdot}05, \quad F^{-1}_{\chi^2(29)}(0{\cdot}975) \doteq 45{\cdot}72,$
$0{\cdot}21 < \sigma < 0{\cdot}35.$

3. Gre za vzorec po parih, zato preizkusimo razlike. Če z Δ označimo razliko med daljavo v prvem in daljavo v tretjem poskusu, dobimo:

$\bar{\Delta} \doteq -0{\cdot}00429, \quad s \doteq 0{\cdot}141, \quad \mathrm{SE} \doteq 0{\cdot}0532, \quad T \doteq -0{\cdot}081,$
$F^{-1}_{\mathrm{Student}(6)}(0{\cdot}975) \doteq 2{\cdot}447.$

Domneve ne moremo zavrniti: dopuščamo možnost, da sta pričakovani daljavi enaki.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 14. 6. 2021

IŠRM

1. Označimo z A, B in C dogodke, da imajo Anabela, Božidar oziroma Celestin vse svoje karte iste barve. Velja:

$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \doteq 0{,}00198\,.$$

Nadalje je:

$$P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(B \cap C \mid A)\,.$$

Pri dogodku B, če se zgodi A, ločimo dva primera: ko Božidar dobi karte iste barve kot Anabela in ko dobi karte druge barve. Enako računamo za dogodek C. Dobimo:

$$P(B \mid A) = P(C \mid A) = \frac{\binom{8}{5} + 3 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{47}{5}} \doteq 0{,}002553\,.$$

Pri dogodku $B \cap C$, če se zgodi A, pa ločimo primer, ko Božidar ali Anabela dobi karte iste barve kot Anabela (za oba se to ne zgodi), primer, ko oba dobita karte iste barve, ki pa je različna od Anabeline, in primer, ko vsi trije dobijo različne barve. Dobimo: in

$$P(B \cap C \mid A) = \frac{2 \cdot 3 \cdot \binom{8}{5}\binom{13}{5} + 3 \cdot \binom{13}{5}\binom{8}{5} + 3 \cdot 2 \cdot \binom{13}{5}^2}{\binom{47}{5}\binom{42}{5}} \doteq 8{,}11 \cdot 10^{-6}\,.$$

Poberemo skupaj in dobimo $P(B \cup C \mid A) \doteq 0{,}005099$.

2. Dana pogojna porazdelitev ima pogojno gostoto (za $x > 0$):

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)x} & ;\ ax < y < bx \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Iz tega najprej izračunamo dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{b-a} & ;\ x > 0,\ ax < y < bx \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{b-a} & ;\ x > 0,\ \dfrac{y}{b} < x < \dfrac{y}{a} \\ 0 & ;\ \text{sicer,} \end{cases}$$

nakar integriramo in dobimo brezpogojno gostoto: za $y > 0$ velja:

$$p_Y(y) = \frac{1}{b-a} \int_{y/b}^{y/a} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-y/b} - e^{-y/a}}{b-a}\,,$$

torej je:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y/b} - e^{-y/a}}{b-a} & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer.} \end{cases}$$

Zdaj pa uporabimo namig in iz pogojne gostote izračunamo pogojno pričakovano upanje:

$$E\left(\frac{1}{Y} \,\Big|\, X = x\right) = \frac{1}{(b-a)x} \int_a^b \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{(b-a)x} \ln \frac{b}{a} \,.$$

Brezpogojno matematično upanje je enako:

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = E\left[E\left(\frac{1}{Y} \,\Big|\, X = x\right)\right] = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} \int_0^\infty \frac{1}{x} \, x \, e^{-x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} \,.$$

Če to primerjamo z $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} \, p_Y(y) \,\mathrm{d}y$, dobimo znani rezultat:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y/b} - e^{-y/a}}{y} \,\mathrm{d}y = \ln \frac{b}{a} \,.$$

Če a zamenjamo z $1/b$, b pa z $1/a$, dobimo to v še bolj znani obliki:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay} - e^{-by}}{y} \,\mathrm{d}y = \ln \frac{b}{a} \,.$$

3. Uporabimo Welchev preizkus. Če z X označimo teže deklic, z Y pa teže dečkov, dobimo $\bar{X} \doteq 3022$, $\bar{Y} \doteq 3364$, $s_X \doteq 762$, $s_Y \doteq 317$, $\widehat{\mathrm{SE}} \doteq 287$, $\widehat{df} \doteq 8{\cdot}939$, $T \doteq -1{\cdot}192$, $F^{-1}_{\mathrm{Student}(8)}(0{\cdot}975) \doteq 2{\cdot}306$, $F^{-1}_{\mathrm{Student}(9)}(0{\cdot}975) \doteq 2{\cdot}262$.
Ničelne domneve torej ne moremo zavrniti.

4. Izvedemo Pearsonov preizkus hi hvadrat, pri čemer preizkušamo proti porazdelitvi po mesecih, pri kateri so verjetnosti sorazmerne številu dni v mesecu. Pričakovane frekvence so torej:

JAN	FEB	MAR	APR	MAJ	JUN
225˙24	203˙44	225˙24	217˙97	225˙24	217˙97

JUL	AVG	SEP	OKT	NOV	DEC
225˙24	225˙24	217˙97	225˙24	217˙97	225˙24

Vrednost preizkusne statistike pride 10˙263, kritična vrednost pa je $F^{-1}_{\chi^2(11)}(0{\cdot}95) \doteq 19{\cdot}68$. Domneve torej ne moremo zavrniti.

5. a) Z logaritmiranjem dobimo $\ln x = \ln k + \alpha \ln y$. Ocenjena koeficienta v linearni regresiji prideta $\ln \hat{k} \doteq 3{\cdot}751$ in $\hat{\alpha} \doteq 0{\cdot}5152$, nakar dobimo še $\hat{k} \doteq 42{\cdot}58$. Ocenjeno vrednost za α si razložimo tako, da krogla pada približno po kvadratni paraboli.

b) Točkovna napoved: $\ln \hat{x} \doteq 7{\cdot}404$, $\hat{x} \doteq 1643$.
Za napovedni interval najprej izračunamo $\mathrm{RSS} \doteq 5{\cdot}868 \cdot 10^{-4}$, $S \doteq 0{\cdot}01399$, $\mathrm{SEP} \doteq 0{\cdot}01777$, $F^{-1}_{\mathrm{Student}(3)}(0{\cdot}975) \doteq 3{\cdot}182$, nakar za napovedni interval dobimo $7{\cdot}348 < \ln x < 7{\cdot}461$ oziroma $1551 < x < 1739$.

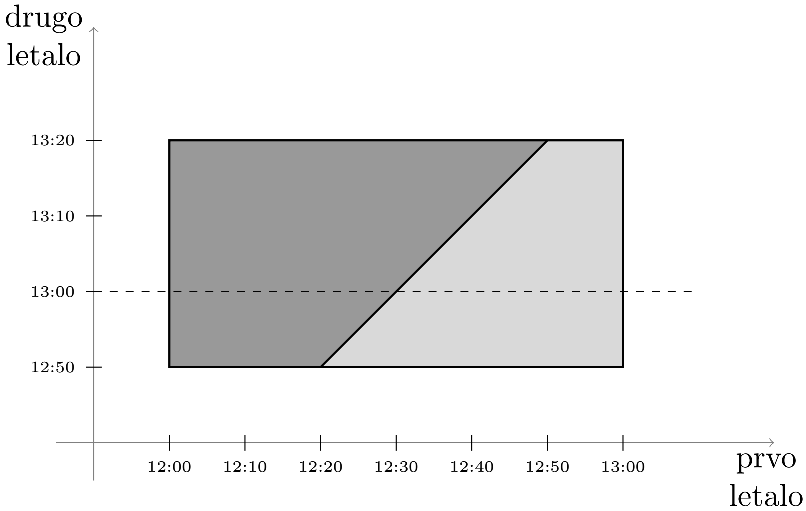
2018/19

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 6. 12. 2018

1. Glede na to, katere črke so izbrali, imamo $\binom{25}{3}\binom{25}{4}\binom{25}{5}$ enako verjetnih možnosti. Ugodne lahko dobimo tako, da najprej izberemo črko, ki jo izbereta dva, nakar izberemo, katera dva, nakar izberemo preostale črke. Tako dobimo, da je iskana verjetnost enaka

$$\frac{25 \cdot \left[\binom{24}{2}\binom{22}{3}\binom{19}{5} + \binom{24}{2}\binom{22}{4}\binom{18}{4} + \binom{24}{3}\binom{21}{3}\binom{18}{4}\right]}{\binom{25}{3}\binom{25}{4}\binom{25}{5}} \doteq 0\dot{}313\,.$$

2. Iz slike:



razberemo, da je verjetnost, da bo Bernard ujel letalo, enaka:

$$\frac{\frac{1}{2}(2+5)\cdot 3}{6\cdot 3} = \frac{7}{12} \doteq 0\dot{}583\,,$$

pogojna verjetnost, da je letalo, ki ga je lovil, vzletelo pred 13. uro, če ga je ujel, pa je enaka:

$$\frac{\frac{1}{2}(2+3)\cdot 1}{\frac{1}{2}(2+5)\cdot 3} = \frac{5}{21} = 0\dot{}238\,.$$

3. Če dodamo n kroglic, med katerimi je R rdečih, je približno:

$$P\left(R \geq \frac{n+100}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}(n+100) - 0{\cdot}6\,n}{\sqrt{n \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}4}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{n-500}{\sqrt{24\,n}}\right).$$

Če želimo zagotoviti, da je ta verjetnost vsaj 95%, mora biti približno:

$$\frac{n-500}{\sqrt{24\,n}} \geq \Phi^{-1}(0{\cdot}45)\,.$$

Če uvedemo $x = \sqrt{n}$ in odpravimo ulomek, dobimo:

$$x^2 - \Phi^{-1}(0{\cdot}45)\sqrt{24}\,x - 500 \geq 0\,,$$

kar ima rešitev:

$$x \leq \Phi^{-1}(0{\cdot}45)\sqrt{6} - \sqrt{6\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\big)^2 + 500}$$

ali

$$x \geq \Phi^{-1}(0{\cdot}45)\sqrt{6} + \sqrt{6\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\big)^2 + 500}\,.$$

Če upoštevamo, da je $\Phi^{-1}(0{\cdot}45) \doteq 1{\cdot}645$, dobimo približno $x \leq -18{\cdot}692$ ali $x \geq 26{\cdot}750$. Ker je $x = \sqrt{n} > 0$, prva možnost odpade. Ko kvadriramo drugo, dobimo $n \geq 715{\cdot}55$, torej $n \geq 716$.

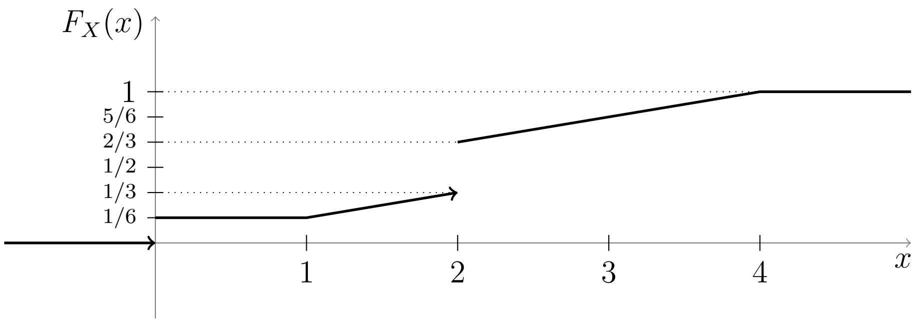
V resnici je prvo število, ki zadošča, 712, 713 ne zadošča, 714 zadošča, 715 spet ne zadošča, vsa števila od 716 naprej pa zadoščajo. Tabela verjetnosti za ta in okoliška števila:

n	$P\big(R \geq \frac{n+100}{2}\big)$
711	0·9464653
712	0·9511331
713	0·9478587
714	0·9524215
715	0·9492197
716	0·9536793
717	0·9505488

4. Za vse $x \in \mathbb{R}$ raziščimo dogodek $\{X \leq x\}$. Če je $x < 0$, je ta dogodek nemogoč. Če je $0 \leq x < 1$, je to dogodek, da je vprašan Adrijan. Če je $1 \leq x < 2$, je to dogodek, da je vprašan Adrijan ali pa je vprašana Cirila in le-ta pove število, manjše ali enako x. Če je $2 \leq x < 4$, je to dogodek, da je vprašan Adrijan ali Branko ali pa je vprašana Cirila, ki pove število, manjše ali enako x. Če je pa $x \geq 4$, je ta dogodek gotov. Sledi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{6} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x+2}{6} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4\,. \end{cases}$$

Graf:



Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 27. 3. 2019

1. *Prvi način.* Definirajmo vektorsko funkcijo:

$$h(x,y) := \left(x, \frac{y}{x}\right) .$$

Ta funkcija bijektivno preslika množico $\{(x,y)\ ;\ x \neq 0\}$ samo nase. Njena inverzna funkcija:

$$h^{-1}(u,v) = (u, uv)$$

ima Jacobijevo determinanto:

$$Jh^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u \,,$$

torej ima slučajni vektor $(U,V) := (X, Y/X)$ gostoto:

$$p_{U,V}(u,v) = |u| p_{X,Y}(u,uv) = \frac{1}{2|u|^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-(1+u^2v^2)/(2u^2)} = \frac{1}{2|u|^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/(2u^2)}\, e^{-v^2/2} .$$

Ker je to produkt funkcije samo spremenljivke u in funkcije samo spremenljivke v, sta U in V res neodvisni. Z izbiro primernega konstantnega faktorja lahko dosežemo, da je funkcija spremenljivke $V = Y/X$ gostota standardne normalne porazdelitve:

$$p_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-v^2/2} .$$

Slučajna spremenljivka $U = X$ pa ima gostoto:

$$p_X(x) = \frac{1}{2|x|^3}\, e^{-1/(2x^2)} .$$

Drugi način. Najprej izračunamo gostoto slučajne spremenljivke X:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x^4\sqrt{2\pi}}\, e^{-(1+y^2)/(2x^2)}\, \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2|x|^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/(2x^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/(2x^2)}\, \mathrm{d}y . \end{aligned}$$

Pod zadnjim integralom je gostota normalne porazdelitve $\mathrm{N}(0, |x|)$, torej je integral enak 1. Sledi:

$$p_X(x) = \frac{1}{2|x|^3}\, e^{-1/(2x^2)} .$$

Nadalje iz pogojne gostote:

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{1}{|x|\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/(2x^2)}$$

razberemo, da je $Y \mid X \sim \mathrm{N}(0, |X|)$, torej je $\frac{Y}{X} \mid X \sim \mathrm{N}(0,1)$, kar je neodvisno od X. Sledi, da sta X in Y neodvisni in $\frac{Y}{X} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

2. *Prvi način.* Označimo z I_k indikator dogodka, da ima k-ti kvartopirec višjo karto od svojega levega soseda, z J_l pa indikator dogodka, da ima l-ti kvartopirec od soigralca, ki sedi nasproti. Tedaj je $X = \sum_{k=1}^{6} I_k$ in $Y = \sum_{l=1}^{6} J_l$.

Če izberemo dva različna kvartopirca, je verjetnost, da ima prvi višjo karto od drugega, enaka $1/2$, torej je $E(I_k) = E(J_l) = 1/2$ in posledično $E(X) = E(Y) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Če izberemo tri različne kvartopirce, je vseh 6 možnih vrstnih redov kart, ki jih dobijo, enako verjetnih. Če torej l-ti kvartopirec sedi levo od k-tega, je $E(I_k J_l) = 1/6$, saj je $I_k J_l = 1$ natanko tedaj, ko ima k-ti kvartopirec višjo karto od l-tega, spet ta pa ima višjo karto od soigralca, ki mu sedi nasproti. Takih parov (k, l) je 6.

Podobno, če k-ti in l-ti kvartopirec sedita nasproti, je $I_k J_l = 1$ natanko tedaj, ko ima l-ti kvartopirec višjo karto od k-tega, ta pa ima višjo karto od svojega levega soseda. Torej je spet $E(I_k J_l) = 1/6$ in takih parov (k, l) je spet 6.

Če l-ti kvartopirec sedi nasproti levega soseda k-tega kvartopirca (t. j. dva sedeža desno od k-tega kvartopirca), je $I_k J_l = 1$ natanko tedaj, ko imata tako k-ti kot tudi l-ti kvartopirec višjo karto od levega soseda k-tega kvartopirca, ki je tudi tisti, ki sedi nasproti l-temu. Torej je $E(I_k J_l) = 1/3$ in takih parov (k, l) je spet 6.

Če sta k-ti in l-ti kvartopirec različna in nista v nobenem od prej omenjenih odnosov (kar pomeni, da je l-ti bodisi en sedež desno bodisi dva sedeža levo od k-tega), sta para, ki ju tvorita k-ti kvartopirec skupaj s svojim levim sosedom in l-ti kvartopirec skupaj z igralcem, ki mu sedi nasproti, disjunktna. Tedaj sta dogodka I_k in J_l neodvisna, saj so vse štiri kombinacije velikostnih odnosov med vrednostma karte k-tega kvartopirca in njegovega levega soseda ter vrednostma karte l-tega kvartopirca in tistega, ki mu sedi nasproti, enako verjetne. Torej je $E(I_k J_l) = 1/4$. Takih parov je 12.

Končno, če je $k = l$, je $I_k J_l = 1$ natanko tedaj, ko ima k-ti kvartopirec višjo karto tako od svojega levega soseda kot tudi od tistega, ki mu sedi nasproti. Torej je $E(I_k J_l) = 1/3$. Takih parov je 6.

Seštejemo in dobimo:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^{6} \sum_{l=1}^{6} E(I_k J_l) = 6 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 9\,, \\ K(X, Y) &= E(XY) - E(X)\,E(Y) = 0\,. \end{aligned}$$

Drugi način. Opazimo, da kvartopirci skupaj s svojimi nasprotniki nastopajo v disjunktnih parih. Izmed kvartopircev v posameznem paru ima eden višjo, eden pa nižjo karto. Ker so taki pari trije, je $Y = 3$: slučajna spremenljivka Y je konstantna. Potem pa je $K(X, Y) = 0$.

3. Naj bo N število metov kocke. Ta slučajna spremenljivka je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/6)$. Pogojno na $N = n$ je X porazdeljena enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$, torej je $E(X \mid N) = \frac{N+1}{2}$ in končno:

$$E(X) = E\big[E(X \mid N)\big] = \frac{E(N) + 1}{2} = \frac{7}{2}\,.$$

4. a) Rodovna funkcija števila potomcev posameznika je:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}}\, s^k = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2s}{3}\right)^k = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2}{3}s\right)} = \frac{1}{3 - 2s}\,.$$

To je tudi rodovna funkcija števila predstavnikov prve generacije. Rodovna funkcija števila predstavnikov druge generacije je:

$$\begin{aligned} G\big(G(s)\big) &= \frac{1}{3 - \frac{2}{3-2s}} = \frac{3-2s}{7-6s} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{7}\,\frac{1}{1 - \frac{6}{7}s}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{7^k}\, s^k = \\ &= \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{7^{k+1}}\, s^k\,. \end{aligned}$$

Torej je druga generacija z verjetnostjo $\frac{3}{7}$ brez predstavnikov, za $k = 1, 2, 3, \ldots$ pa ima natanko k predstavnikov z verjetnostjo $\dfrac{2 \cdot 6^k}{3 \cdot 7^{k+1}}$.

b) Enačbo:

$$\frac{1}{3 - 2s} = s$$

preoblikujemo v $2s^2 - 3s + 1 = 0$, ki ima rešitvi $s_1 = \frac{1}{2}$ in $s_2 = 1$. Torej proces izumre z verjetnostjo $\frac{1}{2}$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 7. 6. 2019

IŠRM

1. a) Če z X_i označimo Lipetov dobitek v i-ti igri, velja:

$$\mu_1 := E(X_i) = -0{\cdot}02\,, \quad \sigma_1^2 := D(X_i) = 7{\cdot}6196\,, \quad \sigma_1 \doteq 2{\cdot}760362\,.$$

Lipetov skupni dobitek je $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$. Velja:

$$\mu := E(S) = 200\,\mu_1 = -4\,, \quad \sigma := \sigma(S) = \sigma_1\sqrt{200} \doteq 39{\cdot}03742\,,$$

iskana verjetnost pa je:

$$P(S > 0) = P(0{\cdot}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{0{\cdot}5 - \mu}{\sigma}\right) \doteq 0{\cdot}454\,.$$

b) Če označimo $S' = X_2 + X_3 \cdots + X_{200}$, je:

$$P(X_1 = 19 \mid S > 0) = \frac{P(X_1 = 19)\,P(S > 0 \mid X_1 = 19)}{P(S > 0)} = \frac{0{\cdot}02\,P(S' > -19)}{P(S > 0)}\,.$$

Velja:

$$\mu' := E(S') = 199\,\mu_1 = -3{\cdot}98\,, \quad \sigma' := \sigma(S') = \sigma_1\sqrt{199} \doteq 38{\cdot}9397\,,$$
$$P(S' > -19) = P(-18{\cdot}5 < S' < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{-18{\cdot}5 - \mu'}{\sigma'}\right) \doteq 0{\cdot}645\,,$$

iskana pogojna verjetnost pa je približno enaka $0{\cdot}0284$.

Točna rezultata: $P(S > 0) \doteq 0{\cdot}4195678$, $P(X_1 = 20 \mid S > 0) \doteq 0{\cdot}0292$.
Še zlasti pri prvi verjetnosti je razlika precejšnja. To se zgodi, ker je porazdelitev seštevancev zelo neugodna.

2. Iz porazdelitvene gostote:

$$p(x \mid a) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-a)^2/(2a^2)} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/(2a^2)+x/a-1/2}$$

dobimo logaritem verjetja:

$$\ln L = -n\ln a - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2a^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{2}\,.$$

Ko gre a proti neskončno, gre ta izraz proti minus neskončno. To pa velja tudi, ko gre a proti nič, če le niso vse opažene vrednosti enake nič (kar se vedno zgodi z verjetnostjo nič). Torej je maksimum dosežen v stacionarni točki. Po odvajanju:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}a} = -\frac{n}{a} + \frac{1}{a^3}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n} X_k\,,$$

enačenju z nič in množenje z $-a^3$ dobimo za cenilko kvadratno enačbo:

$$n\hat{a}^2 + \hat{a}\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = 0\,,$$

ki ima le eno legitimno rešitev, in sicer:

$$\hat{a} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k + \sqrt{\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2}\,.$$

Za dani vzorec dobimo $\hat{a} \doteq 18\text{˙}52$.

3. Urejenost možnih odgovorov upošteva inverzijski (Wilcoxon–Mann–Whitneyjev) test. Če mnenja uredimo navzdol, od 'odlična' proti 'grozna', so vezani rangi razvidni iz naslednje tabele:

mnenje	ženske	moški	skupaj	kum.	vez. rang
odlična	3	0	3	3	2
dobra	21	13	34	37	20˙5
povprečna	28	20	48	85	61˙5
slaba	18	20	38	123	104˙5
grozna	22	41	63	186	155
Skupaj	92	94			

Vsota vezanih rangov za ženske je:

$$3 \cdot 2 + 21 \cdot 20\text{˙}5 + 28 \cdot 61\text{˙}5 + 18 \cdot 104\text{˙}5 + 22 \cdot 155 = 7449\text{˙}5\,,$$

testna statistika pa pride:

$$\sqrt{\frac{3}{92 \cdot 94 \cdot 187}}\big(2 \cdot 7449\text{˙}5 - 92 \cdot 187\big) \doteq -3\text{˙}14\,.$$

Kritična vrednost je $z_{0.025} \doteq 1\text{˙}96$, torej ničelno hipotezo zavrnemo: sprejmemo, da imajo ženske in moški različno dobro mnenje o premierki.

Če ignoriramo urejenost odgovorov, se da izvesti tudi kontingenčni test hi kvadrat. Pričakovane frekvence pridejo:

mnenje	ženske	moški
odlična	1˙48	1˙52
dobra	16˙82	17˙18
povprečna	23˙74	24˙26
slaba	18˙80	19˙20
grozna	31˙16	31˙84

Vrednost testne statistike pa pride $\chi^2 \doteq 12{\cdot}03$, kar je več od kritične vrednosti $\chi^2_{0.05}(4) \doteq 9{\cdot}49$, zato hipotezo prav tako zavrnemo.

4. Rodovna funkcija slučajne spremenljivke T_1 je:

$$F_1(s) = \frac{5}{8}\,\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}s^2}}{s}\,,$$

njen odvod pa je:

$$F_1'(s) = \frac{25}{32}\,\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}s^2}}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}s^2}}$$

Vstavimo $s = 1$ in dobimo:

$$F_1(1) = \frac{1}{4}\,, \quad F_1'(1) = \frac{25}{48}\,, \qquad E(T_1 \mid T_1 < \infty) = \frac{F_1'(1)}{F_1(1)} = \frac{25}{12}\,.$$

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 6. 2019

IŠRM

1. a) Dogodek A pomeni, da za vsak par velja, da je Pepček pobral obe nogavici ali pa nobene. Sledi:

$$P(A) = \left(0\text{'}8^2 + 0\text{'}2^2\right)^5 \doteq 0\text{'}145\,.$$

b) $\displaystyle\binom{5}{3}\frac{0\text{'}8^6 \cdot 0\text{'}2^4}{P(A)} \doteq 0\text{'}289.$

2. Lotimo se najprej porazdelitve slučajne spremenljivke X. Le-ta lahko zavzame vrednosti med $1/2$ in 1. Za $1/2 < x < 1$ velja:

$$p_X(x) = \int_{1/(2x)}^{1} \frac{c}{x^2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{c(2x-1)}{x^2}\,.$$

Zdaj lahko izračunamo konstanto c. Iz:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{2x-1}{x^2} = 2\ln 2 - 1$$

dobimo, da je $c = 1/(2\ln 2 - 1)$, torej:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{(2\ln 2 - 1)x^2} & ;\ 1/2 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Zaradi simetrije pa je tudi:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2y-1}{(2\ln 2 - 1)y^2} & ;\ 1/2 < y < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Tudi slučajna spremenljivka Z lahko zavzame vrednosti med $1/2$ in 1. Za $1/2 < x < 1$ velja:

$$p_Z(z) = \int_z^1 p_{X,Y}\left(x, \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{z^2}\int_z^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{c\ln z}{z^2}\,,$$

torej je:

$$p_Z(z) = \begin{cases} -\dfrac{\ln z}{(2\ln 2 - 1)z^2} & ;\ 1/2 < z < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako smo dobili še integral:

$$-\int_{1/2}^{1} \frac{\ln z}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\ln 2 - 1\,.$$

3. Če statistično spremenljivko označimo z X, dobimo:

$$\begin{aligned} z_1 = E(X) &= \frac{1}{a+b}\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/a}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{a+b}\int_{0}^{\infty} x\,e^{-x/b}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{a+b} = b-a\,, \\ z_2 = E(X^2) &= \frac{1}{a+b}\int_{-\infty}^{0} x^2\,e^{x/a}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{a+b}\int_{0}^{\infty} x^2\,e^{-x/b}\,\mathrm{d}x = \frac{2(b^3-a^3)}{a+b} = \\ &= 2(a^2-ab+b^2)\,. \end{aligned}$$

Parametra se z momentoma z_1 in z_2 izražata na naslednji način:

$$a = \frac{-z_1+\sqrt{2z_2-3z_1^2}}{2}\,,$$
$$b = \frac{z_1+\sqrt{2z_2-3z_1^2}}{2}$$

(predznak korena je izbran tako, da je lahko $a, b > 0$). Tako dobimo iskani cenilki:

$$\hat{a} = \frac{-\hat{z}_1+\sqrt{2\hat{z}_2-3\hat{z}_1^2}}{2}\,,$$
$$\hat{b} = \frac{\hat{z}_1+\sqrt{2\hat{z}_2-3\hat{z}_1^2}}{2}\,,$$

kjer sta $\hat{z}_1$ in $\hat{z}_2$ prvi in drugi vzorčni moment. Cenilki sta smiselni takrat, ko je $\hat{a}, \hat{b} > 0$, to pa je takrat, ko je $\hat{z}_2 > 2\hat{z}_1^2$.

4. Predlagani model pomeni zvezo:

$$\ln P = a + bt + \varepsilon\,,$$

kjer P pomeni promet, t čas, ε pa napako. Pri danih podatkih dobimo naslednji oceni koeficientov:

$$\hat{a} \doteq -1003\text{˙}526\,, \quad \hat{b} \doteq -0\text{˙}5021604\,.$$

Točkasta napoved pri $t = 2022$ pride 138.937, napovedni interval pa pride od 109.004 do 177.091 petabajtov na mesec.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 28. 6. 2019

IŠRM

1. a) $0{.}2 \cdot 0{.}8 + 0{.}4 \cdot 0{.}8^2 + 0{.}3 \cdot 0{.}8^3 + 0{.}1 \cdot 0{.}8^4 = 0{.}61056$.

b) Dobimo:

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad \frac{0{.}2 \cdot 0{.}8}{0{.}61056} \doteq 0{.}262\,, \\ k = 2: &\quad \frac{0{.}4 \cdot 0{.}8^2}{0{.}61056} \doteq 0{.}419\,, \\ k = 3: &\quad \frac{0{.}3 \cdot 0{.}8^3}{0{.}61056} \doteq 0{.}252\,, \\ k = 4: &\quad \frac{0{.}1 \cdot 0{.}8^4}{0{.}61056} \doteq 0{.}067\,. \end{aligned}$$

2. a) Iz $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$ dobimo $c = \dfrac{1}{\ln 2}$.

b) Pogojna gostota slučajne spremenljivke Y glede na X je za $1 < x < 2$ enaka:

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} x\,e^{-xy} & ;\ y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer}, \end{cases}$$

za ostale x pa ni definirana. Sledi, da je dvorazsežna gostota enaka:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\,e^{-xy} & ;\ 1 < x < 2,\ y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer}. \end{cases}$$

Z integracijo dobimo, da je slučajna spremenljivka Y porazdeljena zvezno z gostoto, ki je za $y > 0$ enaka:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 e^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-y} - e^{-2y}}{y \ln 2}\,,$$

za ostale y pa je enaka nič.

c) Velja:

$$\begin{aligned} P(XY > 1) &= \iint_{xy>1} p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \int_{1/x}^{\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{e \ln 2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

3. Očitno mora biti $n > 100$, zato lahko uporabimo centralni limitni izrek. Iz:

$$E(X_i) = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,, \qquad E(X_i^2) = \int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,, \qquad D(X_i) = \frac{1}{18}$$

dobimo, da je:

$$P(S_n > 100) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{100 - \frac{2}{3}n}{\sqrt{n/18}}\right).$$

To bo manjše od $0{\cdot}05$ približno tedaj, ko bo:

$$\frac{100 - \frac{2}{3}n}{\sqrt{n/18}} < -z\,,$$

kjer je $z = \Phi^{-1}(0{\cdot}45) \doteq 1{\cdot}645$. Če uvedemo $u := \sqrt{n}$ in uredimo, dobimo naslednjo kvadratno neenačbo za u:

$$\frac{2}{3}u^2 - \frac{z}{\sqrt{18}}\,u - 100 > 0\,,$$

ki je izpolnjena, če je:

$$u < u_1 := \frac{3}{4}\left(\frac{z}{\sqrt{18}} - \sqrt{\frac{z^2}{18} - \frac{800}{3}}\right) \doteq -11{\cdot}96013$$

ali

$$u < u_2 := \frac{3}{4}\left(\frac{z}{\sqrt{18}} - \sqrt{\frac{z^2}{18} - \frac{800}{3}}\right) \doteq 12{\cdot}54167.$$

Ker je $u = \sqrt{n}$ pozitivno število, pride v poštev le druga možnost. Iz $u_2^2 \doteq 157{\cdot}2935$ dobimo, da je dana neenakost izpolnjena približno za $n \geq 158$.

4. Če smeri Praktična matematika priredimo spremenljivko X, smeri Fizikalna merilna tehnika pa spremenljivko Y, velja:

$\bar{X} = 51{\cdot}83$, $\bar{Y} = 30{\cdot}71$, $s \doteq 17{\cdot}66$, $T = 2{\cdot}15$, $t_{0.025}(11) \doteq 2{\cdot}20$.
Hipoteze ne moremo zavrniti.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 22. 8. 2019

IŠRM

1. Označimo z A dogodek, da natanko prvi, drugi, četrti, peti in osmi osumljenec odgovorijo pritrdilno, z X pa označimo število članov bratovščine med omenjenimi osumljenci. Zanima nas pogojna verjetnost $P(X = 5 \mid A)$. Velja:

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{5}{k}^2}{\binom{10}{5}}\,, \\
P(A \mid X = k) &= 0{\cdot}4^k \cdot 0{\cdot}3^{5-k} \cdot 0{\cdot}6^{5-k} \cdot 0{\cdot}7^k = 0{\cdot}28^k \cdot 0{\cdot}18^{5-k}\,.
\end{aligned}
$$

Z uporabo Bayesove formule dobimo:

$$
P(X = 5 \mid A) = \frac{P(X = 5)\, P(A \mid X = 5)}{\sum_{k=0}^{5} P(X = k)\, P(A \mid X = k)} \doteq 0{\cdot}0112\,.
$$

2. Za $0 < z < 1$ velja:

$$
p_Z(z) = \int_0^\infty p_X(x)\, p_Y\!\left(\frac{x(1-z)}{z}\right) \frac{x}{z^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2}{z^2}\, e^{-x/z}\,\mathrm{d}x = 2z\,,
$$

za ostale z pa lahko postavimo $p_Z(z) = 0$.

3. Velja $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_{10}$, kjer je $I_k = 1$, če je k-ta škatla prazna, sicer pa je $I_k = 0$. Za $k = 1, 2, \ldots, 10$ velja:

$$
E(I_k) = P(k\text{-ta škatla je prazna}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10},
$$

torej je:

$$
E(X) = \sum_{k=1}^{10} E(I_k) = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \doteq 3{\cdot}49\,.
$$

Nadalje za $k \neq l$ velja:

$$
E(I_k I_l) = P(k\text{-ta in } l\text{-ta škatla sta obe prazni}) = \left(\frac{8}{10}\right)^{10},
$$

torej je:

$$
E(X^2) = \sum_{k=1}^{10} E(I_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{10} E(I_k I_l) = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 90 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{10}.
$$

Sledi:

$$
D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 90 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{10} - 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \doteq 0{\cdot}993\,.
$$

4. Najprej pod predpostavko ničelne hipoteze po metodi največjega verjetja ocenimi p. Funkcija verjetja je:

$$L = \left[(1-p)^5\right]^9 \left[5p(1-p)^4\right]^{39} \left[10p^2(1-p)^3\right]^{67} \left[10p^3(1-p)^2\right]^{56} \left[5p^4(1-p)\right]^{25} \left[p^5\right]^4 = \\ = C\,p^{461}(1-p)^{539}\,,$$

kjer je $C = 5^{39} \cdot 10^{67} \cdot 10^{56} \cdot 5^{25}$. Funkcija L je nenegativna in za $p \in \{0,1\}$ enaka nič, zato doseže maksimum v stacionarni točki. Logaritmiramo:

$$\ln L = \ln C + 461 \ln p + 539 \ln(1-p)$$

in odvajamo:

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}p} = \frac{461}{p} - \frac{539}{1-p}$$

Izenačimo z nič in dobimo cenilko $\hat{p} = \frac{461}{1000} = 0{\cdot}461$, iz nje pa pričakovane frekvence:

vrednost	0	1	2	3	4	5
frekvenca	9˙10	38˙91	66˙56	56˙93	24˙34	4˙16

Testna statistika pride $\chi^2 \doteq 0{\cdot}043$, kar je manjše od kritične vrednosti $\chi^2_{0.05}(4) \doteq 9{\cdot}49$, zato ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

2017/18

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 14. 12. 2017

1. a) Velja:

$$P(T_0) = 0\text{˙}8\,, \qquad P(T_1) = 0\text{˙}2 \cdot 0\text{˙}8 = 0\text{˙}16\,, \qquad P(T_2) = 0\text{˙}2 \cdot 0\text{˙}2 = 0\text{˙}04\,.$$

b) Označimo z S_0 dogodek, da se Peteršiljčkovim v sredo zjutraj prvi tetrapak ne sesiri, z S_1 pa dogodek, da se jim takrat prvi tetrapak sesiri, drugi pa ne. Velja:

$$\begin{aligned} P(S_0 \mid T_0) &= 0\text{˙}6\,, & P(S_1 \mid T_0) &= 0\text{˙}4 \cdot 0\text{˙}8 = 0\text{˙}32\,, \\ P(S_0 \mid T_1) = P(S_0 \mid T_2) &= 0\text{˙}8\,, & P(S_1 \mid T_1) = P(S_1 \mid T_2) &= 0\text{˙}2 \cdot 0\text{˙}8 = 0\text{˙}16\,. \end{aligned}$$

Dogodek, da so v sredo zjutraj pili mleko, je disjunktna unija dogodkov S_0 in S_1. Po izreku o polni verjetnosti je:

$$\begin{aligned} P(S_0 \cup S_1) &= P(T_0)\,P(S_0 \cup S_1 \mid T_0) + P(T_1 \cup T_2)\,P(S_0 \cup S_1 \mid T_1 \cup T_2) = \\ &= 0\text{˙}8 \cdot (0\text{˙}6 + 0\text{˙}32) + 0\text{˙}2 \cdot (0\text{˙}8 + 0\text{˙}16) = \\ &= 0\text{˙}928\,. \end{aligned}$$

c) Velja:

$$P\big(T_2 \cap (S_0 \cup S_1)\big) = P(T_2)\,P(S_0 \cup S_1 \mid T_2) = 0\text{˙}04 \cdot (0\text{˙}8 + 0\text{˙}16) = 0\text{˙}0384\,.$$

Iskana pogojna verjetnost pa je:

$$P(T_2 \mid S_0 \cup S_1) = \frac{P\big(T_2 \cap (S_0 \cup S_1)\big)}{P(S_0 \cap S_1)} \doteq 0\text{˙}0414\,.$$

2. Označimo število prodanih kart z n, število potnikov, ki se pojavijo, pa z X. Po Laplaceovi integralski formuli približno velja:

$$P(X > 853) = P(853\text{˙}5 < X < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{853\text{˙}5 - 0\text{˙}9\,n}{\sqrt{0\text{˙}09\,n}}\right)\,.$$

Če naj bo desna stran manjša od 0˙05, mora veljati:

$$\frac{853\text{˙}5 - 0\text{˙}9\,n}{0\text{˙}3\sqrt{n}} > \Phi^{-1}(0\text{˙}45)\,.$$

Označimo $x := \sqrt{n}$, uredimo in dobimo kvadratno neenačbo:

$$0\text{˙}9\,x^2 + \Phi^{-1}(0\text{˙}45) \cdot 0\text{˙}3\,x - 853\text{˙}5 < 0\,.$$

Vstavimo $\Phi^{-1}(0\text{˙}45) \doteq 1\text{˙}645$ in dobimo rešitvi pripadajoče enačbe:

$$x_1 \doteq -31\text{˙}07\,, \qquad x_2 \doteq 30\text{˙}52\,.$$

Glede na to, da je $x = \sqrt{n} > 0$, je prava rešitev x_2. Dobimo:

$$n < x_2^2 \doteq 931\text{˙}6\,,$$

kar pomeni, da lahko letalska družba proda največ 931 kart.

Ta rezultat je v resnici točen: pri 931 prodanih kartah je verjetnost, da ne bo dovolj sedežev, enaka 0˙0414, pri 932 prodanih kartah pa je ta verjetnost enaka 0˙0515.

3. a) Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti $0, 1, 2, 3, 4$. Dogodek $\{X = k\}$ pomeni, da je na vrhu k črnih in ena rdeča karta, sledi rdeča karta, pod njo pa je $4 - k$ črnih in dve rdeči karti. Če za izide vzamemo razporeditve kart, kjer kart posamezne barve ne ločimo, je vseh izidov $\binom{8}{4} = 70$, izidov, pri katerih je $X = k$, pa je $\binom{k+1}{1}\binom{6-k}{2}$. Za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ je torej:

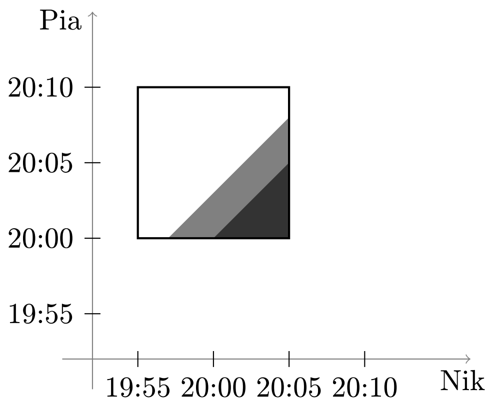
$$P(X = k) = \frac{\binom{k+1}{1}\binom{6-k}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{(k+1)(6-k)(5-k)}{140},$$

se pravi, da je:

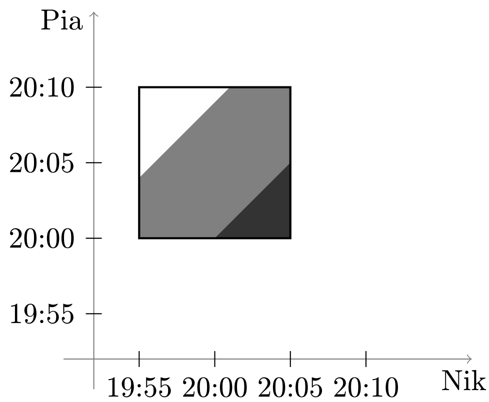
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{15}{70} & \frac{20}{70} & \frac{18}{70} & \frac{12}{70} & \frac{5}{70} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{\cdot}214 & 0{\cdot}286 & 0{\cdot}257 & 0{\cdot}171 & 0{\cdot}071 \end{pmatrix}.$$

b) Neodvisnost lahko preverimo tako, da pogojno verjetnost dogodka A pri $X = k$ primerjamo z brezpogojno verjetnostjo. Slednja je enaka $P(A) = 1/2$. Pogojno na $X = k$ je med vrhnjimi $k + 1$ kartami v kupu ena rdeča in k črnih in vse take razporeditve vrhnjih $k+1$ kart so enako verjetne. Torej je $P(A \mid X = k) = 1/(k+1)$, kar je enako $P(A)$ pri $k = 1$: takrat sta dogodka A in $\{X = k\}$ neodvisna.

4. a) Za verjetnostni prostor vzamemo kartezijski produkt intervalov od 19:55 do 20:05 in od 20:00 do 20:10. Slučajna spremenljivka T lahko zavzame vrednosti od 0 do 15. Spodaj je narisan dogodek $\{T \leq t\}$ za dva različna primera. Temneje je označen dogodek, ko Pia pride pred Nikom; ta dogodek je vsebovan v vsakem dogodku $\{T \leq t\}$, kjer je $t \geq 0$.



$0 \leq t \leq 5$

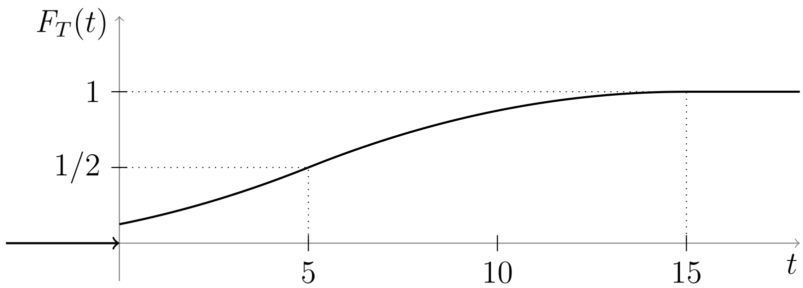


$5 \leq t \leq 15$

Kumulativna porazdelitvena funkcija je:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{(t+5)^2}{200} & ;\ 0 \le t \le 5 \\ 1 - \dfrac{(15-t)^2}{200} & ;\ 5 \le t \le 15 \\ 1 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Graf:



b) Funkcija ni zvezna, zato T ni zvezno porazdeljena.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 23. 3. 2018

1. Slučajna spremenljivka $Z = X + Y$ je porazdeljena zvezno z gostoto p_Z. Za $z \leq 1$ lahko postavimo $p_Z(z) = 0$, sicer pa je:

$$p_Z(z) = \int_{2z/3}^{z} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\big(x^2 - (z-x)^2\big)^2} = \frac{2}{z^2} \int_{2z/3}^{z} \frac{\mathrm{d}x}{(2x-z)^2} = \frac{2}{z^3}\,.$$

2. Nalogo je najlažje rešiti z indikatorji. Če z D označimo število dam, ki jih dobi Darja, s K pa število kraljev, ki jih dobi Krištof, velja $D = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ in $K = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$, kjer je $I_k = 1$, če Darja dobi k-to damo, in $I_k = 0$, če je ne dobi, ter $J_l = 1$, če Krištof dobi k-tega kralja, in $J_l = 0$, če ga ne dobi. Iz:

$$\begin{aligned} E(I_k) = E(J_l) &= P(\text{Darja dobi } k\text{-to damo}) = P(\text{Krištof dobi } l\text{-tega kralja}) = \\ &= \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

dobimo:

$$E(D) = E(K) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1\,.$$

Nadalje je:

$$E(I_k J_l) = P(\text{Darja dobi } k\text{-to damo in Krištof dobi } k\text{-tega kralja}) = \frac{5^2}{20 \cdot 19} = \frac{5}{76}\,,$$

od koder sledi:

$$E(DK) = 16 \cdot \frac{5}{76} = \frac{20}{19}\,,$$

torej:

$$K(D,K) = E(DK) - E(D)\,E(K) = \frac{1}{19}\,.$$

3. Seštevanci $X_1, X_2, \ldots$ imajo rodovno funkcijo:

$$G(s) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} = -\frac{\ln\big(1 - \frac{s}{2}\big)}{\ln 2}\,,$$

slučajna spremenljivka N pa ima rodovno funkcijo:

$$H(s) = e^{\ln 2 (s-1)}\,.$$

Slučajna vsota Z ima torej rodovno funkcijo:

$$G_Z(s) = H\big(G(s)\big) = \frac{1}{2-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{2^{k+1}}\,.$$

Slučajna vsota Z torej zavzame vrednosti v množici $0, 1, 2, \ldots$ in za vsak k iz te množice je $P(Z = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$. To je geometrijska porazdelitev $\mathrm{Geom}(1/2)$, pomaknjena za 1 v levo.

4. Če z X_i označimo število potnikov, prepeljanih v i-tem prevozu, velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0\text{˙}13 & 0\text{˙}35 & 0\text{˙}32 & 0\text{˙}20 \end{pmatrix},$$

$$\mu_1 := E(X_i) = 1\text{˙}59\,, \quad \sigma_1^2 := D(X_i) = 0\text{˙}9019\,, \quad \sigma_1 \doteq 0\text{˙}9497\,.$$

Število vseh prepeljanih potnikov je $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$. Velja:

$$\mu := E(S) = 200\,\mu_1 = 318\,, \quad \sigma := \sigma(S) = \sigma_1\sqrt{200} \doteq 13\text{˙}431\,,$$

iskana verjetnost pa je:

$$P(S \geq 300) = P(299\text{˙}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{299\text{˙}5 - \mu}{\sigma}\right) \doteq 0\text{˙}91581\,.$$

Točen rezultat: 0˙9157952.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 11. 6. 2018

IŠRM

1. a) Logaritem verjetja je enak:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln a - \frac{n}{2}\ln\pi - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}$$

in gre proti minus neskončno, brž ko gre a proti nič ali neskončno. Torej je maksimum dosežen v stacionarni točki. Po odvajanju:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}a} = -\frac{n}{2a} + \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}$$

in enačenju z nič dobimo cenilko:

$$\hat{a} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}\,.$$

b) Velja:

$$E(\hat{a}) = 2\,E\left(\frac{1}{X_1}\right) = 2\int_0^\infty \sqrt{\frac{1}{\pi a x^5}}\,e^{-1/(ax)}\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-5/2}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t = a\,,$$

torej je cenilka nepristranska.

2. Uporabimo prilagoditveni test hi kvadrat: opažene frekvence so deleži na vzporednih volitvah, pomnoženi z n, pričakovane frekvence pa so deleži po 99˙99% preštetih glasov, prav tako pomnoženi z n. Dodati moramo še stranke, ki niso prišle v Državni zbor. Pričakovane frekvence so vse večje od 5, zato ni treba združevati. Vrednost testne statistike pride $\chi^2 \doteq 29˙13$. Ker je to večje od $\chi^2_{0.99}(9) \doteq 21.67$, ničelno hipotezo zavrnemo: določeni volivci so se premislili.

3. Ena možnost je, da postavimo direktno enostavno linearno regresijo, kjer je pojasnjevalna spremenljivka (x) število nadstropij, odvisna (Y) pa je višina. Predloga modela je torej $Y = a + bx + \varepsilon$. Izračunamo:

$$\bar{x} \doteq 112˙4\,,\quad \bar{y} \doteq 522˙2\,,$$

$$S_{xx} \doteq 3413˙2\,,\quad S_{xY} \doteq 19169˙6\,,\quad \hat{b} \doteq 5˙6163\,,\quad \hat{a} \doteq -109˙0736\,.$$

Model lahko razumemo tako, da je a izhodiščna višina temelja nebotičnika, b pa je izhodiščna višina posameznega nadstropja. Izhodiščna višina x-nadstropnega nebotičnika je $a + bx$, dejanska višina pa se od izhodiščne razlikuje za šum ε, ki ima za vsa števila nadstropij enak pričakovani velikostni red. Vidimo, da je ocenjena izhodiščna višina temelja negativna, ocenjena višina nadstropja pa je 5˙6163 m.

Glede na ocenjeno izhodiščno višino temelja model ni videti preveč smiseln, vseeno pa določimo napovedni interval za $x = x_0 := 200$. Najprej določimo točkasto napoved:

$$\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b} x_0 \doteq 1014 \,.$$

To je ocenjena izhodiščna višina 200-nadstropnega nebotičnika v metrih. Za napovedni interval izračunamo $S^2 \doteq 5783{\dot{}}441$ in $\Delta \doteq 449{\dot{}}4219$, od koder dobimo, da bi morala višina 200-nadstropnega nebotičnika znašati med $\hat{Y}_0 - \Delta$ in $\hat{Y}_0 + \Delta$, torej med 564 m in 1464 m (spodnja meja je zaokrožena navzdol, zgornja pa navzgor).

Bolj smiselno pa je logaritmirati, in sicer tako višino kot tudi število nastropij. Naj bo torej $\xi = \ln x$ in $\eta = \ln Y$. Enostavna linearna regresija na ξ in η:

$$\eta = \alpha + \beta \xi + \varepsilon$$

na x in Y dobi obliko:

$$Y = k \, x^\beta \, e^\varepsilon \,,$$

kjer je $k = e^\alpha$. Model lahko razumemo tako, da se lahko izhodiščna višina nadstropja spreminja s številom nadstropij (ne spreminja se, če je $\beta = 1$). Ta model ima fiksen pričakovani velikostni red relativne napake, medtem ko ima prejšnji model fiksen pričakovani velikostni red absolutne napake. Fiksen pričakovani velikostni red relativne napake je za to situacijo bolj realističen.

Izračunamo:

$$\begin{gathered}
\bar{\xi} \doteq 4{\dot{}}698662 \,, \quad \bar{\eta} \doteq 6{\dot{}}219457 \,, \\
S_{\xi\xi} \doteq 0{\dot{}}2177621 \,, \qquad S_{\xi\eta} \doteq 0{\dot{}}2423634 \,, \\
\hat{\beta} \doteq 1{\dot{}}112974 \,, \quad \hat{\alpha} \doteq 0{\dot{}}9899703 \,, \quad \hat{k} \doteq 2{\dot{}}691155 \,.
\end{gathered}$$

Vidimo, da je $\hat{\beta}$ blizu 1. Ocenjena izhodiščna višina nadstropja nizke stolpnice je torej 2˙69 m, višji nebotičniki pa se nagibajo k višjim nadstropjem.

Točkasta napoved višine 200-nadstropnega nebotičnika je:

$$\hat{Y}_0 = \hat{k} \, x_0^{\hat{\beta}} \doteq 979{\dot{}}319 \,,$$

merjeno v metrih. Za napovedni interval izračunamo:

$$S^2 \doteq 0{\dot{}}02802775 \,, \quad \Delta \doteq 0{\dot{}}8996532 \,,$$

meji napovednega intervala pa sta $e^{-\Delta}\hat{Y}_0$ in $e^{\Delta}\hat{Y}_0$. Vstavimo številke, ustrezno zaokrožimo in dobimo, da bi morala višina 200-nadstropnega nebotičnika znašati med 398 m in 2408 m. Ta interval v celoti zajema prejšnjega, kar se zgodi zato, ker po tem modelu velikostni red napake raste s številom nadstropij (fiksen je velikostni red relativne napake).

4. a) Uporabimo rodovne funkcije. Rodovna funkcija števila potomcev posameznika je:

$$G(s) = (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k s^k = \frac{1-q}{1-qs} \,,$$

rodovna funkcija števila vnukov pa je:

$$\begin{aligned}
G(G(s)) &= \frac{(1-q)(1-qs)}{1-q+q^2-qs} = \\
&= \frac{1-q}{1-q+q^2}\,(1-qs)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{1-q+q^2}\,s\right)^k = \\
&= (1-q)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{(1-q+q^2)^{k+1}}\,s^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k+1}}{(1-q+q^2)^{k+1}}\,s^{k+1}\right) = \\
&= (1-q)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{q^l}{(1-q+q^2)^{l+1}}\,s^l - \sum_{l=1}^{\infty}\frac{q^l}{(1-q+q^2)^{l}}\,s^l\right).
\end{aligned}$$

Če torej z V označimo število vnukov, je:

$$P(V=0) = \frac{1-q}{1-q+q^2}$$

in

$$P(V=l) = (1-q)q^l\left(\frac{1}{(1-q+q^2)^{l+1}} - \frac{1}{(1-q+q^2)^l}\right) = \frac{(1-q)^2q^{l+1}}{1-q+q^2}$$

za $l = 1, 2, 3, \ldots$
Enačba $G(s) = s$ je ekvivalentna enačbi:

$$qs^2 - s + 1 - q = 0\,,$$

ta pa ima rešitvi:

$$q_1 = 1 \quad \text{in} \quad q_2 = \frac{1-q}{q}\,.$$

Pri $q \le \frac{1}{2}$ je $\frac{1-q}{q} \ge 1$, torej bo verjetnost izumrtja enaka 1. Pri $q \ge \frac{1}{2}$ pa je $\frac{1-q}{q} \ge 1$, torej bo verjetnost izumrtja enaka $\frac{1-q}{q}$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 19. 6. 2018

IŠRM

1. a) Opazimo, da lahko največ en otrok edini v razredu dobi staro skodelico: v nasprotnem primeru bi moralo biti namreč novih vsaj toliko kot skupno število otrok v dveh razredih, zmanjšano za dve. Dovolj je torej za posamezen razred prešteti razporeditve, kjer ima kateri od otrok edini staro skodelico. Razporejamo pa lahko skodelice med otroke ali pa otroke posameznega razreda med skodelice. V prvem primeru dobimo:

$$\frac{8 \cdot \binom{11}{11} + 6 \cdot \binom{13}{11} + 5 \cdot \binom{14}{11}}{\binom{19}{12}} \doteq 0{\cdot}0456\,,$$

v drugem primeru pa:

$$\frac{\binom{12}{1}\binom{7}{7}}{\binom{19}{8}} + \frac{\binom{12}{1}\binom{7}{5}}{\binom{19}{6}} + \frac{\binom{12}{1}\binom{7}{4}}{\binom{19}{5}}\,,$$

kar pride isto kot prej.

b) Zdaj moramo prešteti razporeditve, kjer v prvem razredu vsi dobijo stare skodelice, v enem od preostalih razredov pa nekdo edini dobi staro skodelico. To je spet možno narediti na oba načina. Iskana pogojna verjetnost je enaka:

$$\frac{6 \cdot \binom{5}{3} + 5 \cdot \binom{6}{3}}{8 \cdot \binom{11}{11} + 6 \cdot \binom{13}{11} + 5 \cdot \binom{14}{11}} = \frac{\dfrac{\frac{12!}{8!\,1!\,3!}\,\frac{7!}{5!\,2!} + \frac{12!}{8!\,3!\,1!}\,\frac{7!}{3!\,4!}}{\frac{19!}{8!\,6!\,5!}}}{\frac{\binom{12}{1}\binom{7}{7}}{\binom{19}{8}} + \frac{\binom{12}{1}\binom{7}{5}}{\binom{19}{6}} + \frac{\binom{12}{1}\binom{7}{4}}{\binom{19}{5}}} \doteq 0{\cdot}0697\,.$$

2. Velja:

$$E(\cos U) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos u \,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\,, \qquad E(\sin U) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos u \,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\,,$$

$$E(\cos^2 U) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,, \qquad E(\sin^2 U) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,,$$

$$E(\cos U \sin U) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos u \sin u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\,,$$

$$D(\cos U) = D(\sin U) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\,, \qquad K(\cos U, \sin U) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\,,$$

$$r(\cos U, \sin U) = \frac{2\pi - 8}{\pi^2 - 8} \doteq -0{\cdot}918\,.$$

3. Označimo z Δ_n razliko med številoma grbov na prvem in na drugem kovancu po n poskusih. Nadalje naj bo:

$$I_k = \begin{cases} 1 & ;\ \text{v } k\text{-tem poskusu na prvem kovancu pade grb} \\ 0 & ;\ \text{sicer,} \end{cases}$$

$$J_k = \begin{cases} 1 & ;\ \text{v } k\text{-tem poskusu na drugem kovancu pade grb} \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako je $\Delta_n = I_1 - J_1 + I_2 - J_2 + \cdots I_n - J_n$. Ker so razlike $I_1 - J_1$, $I_2 - J_2$, ..., $I_n - J_n$ med seboj neodvisne, lahko, če je število poskusov dovolj veliko, uporabimo centralni limitni izrek. Velja:

$$\begin{gathered}
E(I_k) = 0\text{˙}5\,, \quad E(J_k) = 0\text{˙}49\,, \quad E(I_k - J_k) = E(I_k) - E(J_k) = 0\text{˙}01\,, \\
D(I_k) = 0\text{˙}5 \cdot 0\text{˙}5 = 0\text{˙}25\,, \quad D(J_k) = 0\text{˙}49 \cdot 0\text{˙}51 = 0\text{˙}2499\,, \\
D(I_k - J_k) = D(I_k) + D(J_k) = 0\text{˙}4999\,, \\
E(\Delta_k) = 0\text{˙}01\, n\,, \quad D(\Delta_k) = 0\text{˙}4999\, n\,.
\end{gathered}$$

Dogodek, da na prvem kovancu pade več grbov kot na drugem, se ujema z dogodkom $\{\Delta_n > 0\}$. Po centralnem limitnem izreku je:

$$P(\Delta_n > 0) \approx \Phi\left(\frac{0\text{˙}01}{\sqrt{0\text{˙}4999}}\sqrt{n}\right) + \frac{1}{2} = \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{4999}}\right) + \frac{1}{2}\,.$$

To je večje od 0˙95, če je:

$$\frac{n}{4999} > \Phi^{-1}(0\text{˙}45) \doteq 1\text{˙}645\,.$$

Obrnemo in dobimo, da je minimalno število poskusov približno 13525.

4. Logaritem verjetja pride:

$$\ln L(a) = -\frac{n}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i + 2n\sqrt{a} - \sum_{i=1}^{n} X_i - a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\,,$$

njegov odvod pa je:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}a} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i} + \frac{n}{\sqrt{a}}\,.$$

Iz odvoda vidimo, da je verjetje najprej naraščajoča, nato pa padajoča funkcija, torej ima v stacionarni točki globalni maksimum. Ta je dosežen pri:

$$a = \hat{a} := \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}\right)^2\,.$$

To je iskana cenilka.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 4. 7. 2018

1. Označimo z A dogodek, da številka 1 pomeni podolgovato, številka 2 pa okroglo žemljo. Nadalje naj bo B dogodek, da je pri 10 prodanih žemljah 6 enic in 4 dvojke. Iskana pogojna verjetnost je:

$$\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(B)\,P(A \mid B)}{P(B^{\mathrm{c}})\,P(A \mid B^{\mathrm{c}})} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \binom{10}{4} \cdot 0{.}3^6 \cdot 0{.}7^4}{\frac{1}{2} \cdot \binom{10}{4} \cdot 0{.}3^6 \cdot 0{.}7^4 + \frac{1}{2} \cdot \binom{10}{4} \cdot 0{.}3^4 \cdot 0{.}7^6} = \\
&= \frac{0{.}3^6 \cdot 0{.}7^4}{0{.}3^6 \cdot 0{.}7^4 + 0{.}3^4 \cdot 0{.}7^6} \doteq \\
&\doteq 0{.}155\,.
\end{aligned}$$

2. a) Pogojno na X ima slučajna spremenljivka Y gostoto:

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} x\,e^{-xy} & ;\ y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Dvorazsežna gostota je torej enaka:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-xy}}{\ln 2} & ;\ 1 < x < 2,\ y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer,} \end{cases}$$

brezpogojna gostota slučajne spremenljivke Y pa je za $y > 0$ enaka:

$$p_Y(y) = \int_1^2 \frac{e^{-xy}}{\ln 2} = \frac{e^{-y} - e^{-2y}}{y \ln 2}\,,$$

sicer pa jo lahko postavimo na nič.

b) Pogojna gostota slučajne spremenljivka X glede na Y je:

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{y\,e^{-xy}}{e^{-y} - e^{-2y}} & ;\ 1 < x < 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer,} \end{cases}$$

iskana pogojna pričakovana vrednost pa je:

$$E(e^{-X} \mid Y) = \frac{Y}{e^{-Y} - e^{-2Y}} \int_1^2 e^{-x}\,e^{-xY}\,\mathrm{d}x = \frac{Y}{Y+1}\,\frac{e^{-Y-1} - e^{-2Y-2}}{e^{-Y} - e^{-2Y}}\,.$$

3. a) Velja $X_k - Y_k \sim \mathrm{N}\big(0, \sigma\sqrt{2}\big)$, torej je $E(X_k - Y_k) = 0$ in $E\big[(X_k - Y_k)^2\big] = D(X_k - Y_k) = 2\sigma^2$. Sledi $D(\hat{\sigma}^2) = 2nc\sigma^2$, od koder dobimo $c = 1/(2n)$.

b) Slučajna spremenljivka $(X_k - Y_k)^2$ je porazdeljena enako kot $2\sigma^2 Z^2$. Sledi $D\big[(X_k - Y_k)^2\big] = 4\sigma^4\, D(Z^2) = 8\sigma^4$. Z uporabo neodvisnosti dobimo:

$$D(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} D\big[(X_k - Y_k)^2\big] = \frac{2\sigma^4}{n} \,.$$

4. Za $k = 1, 2, 3$ označimo s H_k dogodek, da je med temi kartami, izvlečenimi iz dobro premešanega kupa, natanko k barv. Velja:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{4 \cdot \binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} \doteq 0\text{'}0518 \,, \\ P(H_2) &= \frac{4 \cdot 3 \cdot \binom{13}{2}\binom{13}{1}}{\binom{52}{3}} \doteq 0\text{'}5506 \,, \\ P(H_3) &= \frac{4 \cdot 13^3}{\binom{52}{3}} \doteq 0\text{'}3976 \,. \end{aligned}$$

Naredimo Pearsonov test hi kvadrat. Opažena vrednost testne statistike je enaka:

$$\chi^2 = \frac{(70 - 51\text{'}8)^2}{51\text{'}8} + \frac{(501 - 550\text{'}6)^2}{550\text{'}6} + \frac{(429 - 397\text{'}6)^2}{397\text{'}6} \doteq 13\text{'}36 \,,$$

kar je večje od kritične vrednosti $\chi^2_{0.99}(2) \doteq 9\text{'}21$, zato hipotezo zavrnemo.

Opomba. Vse pričakovane frekvence so večje od 5, zato je test v okviru dogovorjene natančnosti legitimen.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 23. 8. 2018

1. a) Ločimo tri možnosti, ki jih predstavimo v naslednji tabeli:

rdeča	modra	verjetnost
$3 \times \mathrm{A}$	$2 \times \mathrm{B}$	$0{\cdot}7^3 \cdot 0{\cdot}6^2$
$2 \times \mathrm{A}, 1 \times \mathrm{B}$	$1 \times \mathrm{A}, 1 \times \mathrm{B}$	$3 \cdot 0{\cdot}7^2 \cdot 0{\cdot}3 \cdot 2 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}4$
$1 \times \mathrm{A}, 2 \times \mathrm{B}$	$2 \times \mathrm{A}$	$3 \cdot 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}3^2 \cdot 0{\cdot}4^2$

Seštejemo in dobimo, da je iskana verjetnost enaka:

$$p \doteq 0{\cdot}365\,.$$

b) Iskana pogojna verjetnost je enaka:

$$\frac{0{\cdot}7^3 \cdot 0{\cdot}6^2}{p} \doteq 0{\cdot}338\,.$$

2. Očitno je $Z > 0$. Slučajni vektor Z je porazdeljen zvezno z gostoto, ki je za $z > 0$ enaka:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\left(x, \frac{x}{z}\right) \frac{|x|}{z^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-1/z}}{z^2} \int_0^{1/z} x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-1/z}}{2z^4}\,.$$

Za $z \le 0$ lahko postavimo $p_Z(z) = 0$.

3. Velja $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = 4/3$. Po centralnem limitnem izreku je približno

$$P(|S_n| > 100) = P(S_n < -100) + P(S_n > 100) \approx 1 - 2\,\Phi\left(\frac{100{\cdot}5}{\sqrt{4n/3}}\right).$$

Desna stran je večja od $0{\cdot}95$, če je:

$$\frac{100{\cdot}5}{\sqrt{4n/3}} < \Phi^{-1}(0{\cdot}025)\,,$$

torej

$$n > \frac{3}{4}\left(\frac{100{\cdot}5}{\Phi^{-1}(0{\cdot}025)}\right)^2 \doteq 1.926.500\,.$$

4. Izračunamo robne in pričakovane frekvence:

	temna	rdeča	srebrna, svetlorjava	bela, rumena	Skupaj
Severna in Srednja Evropa, Amerika	11˙3750	4˙3750	10˙9375	8˙3125	35
Južna Evropa	6˙8250	2˙6250	6˙5625	4˙9875	21
Azija	7˙8000	3˙0000	7˙5000	5˙7000	24
Skupaj	26	10	25	19	80

iz njih pa testno statistiko $\chi^2 \doteq 4˙71$. Ker to ne presega kritične vrednosti $\chi^2_{0.95}(6) \doteq 12˙59$, ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

2016/17

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 8. 12. 2016

1. a) Ločimo naslednje možnosti:

- Če profesorju tekne enolončnica, v obeh restavracijah dobi, kar mu tekne, torej žreba.
- Če profesorju tekneta brezmesna in mesna malica, v vzhodni restavraciji dobi želeno jed z verjetnostjo $1 - 0\dot{}25 \cdot 0\dot{}20 \doteq 0\dot{}95$, v zahodni pa z verjetnostjo $1 - 0\dot{}2 \cdot 0\dot{}1 \doteq 0\dot{}98$, torej se odpravi v zahodno restavracijo.
- Če profesorju tekneta brezmesna malica in dodatna ponudba, v vzhodni restavraciji dobi želeno jed z verjetnostjo $1 - 0\dot{}25 \cdot 0\dot{}15 \doteq 0\dot{}9625$, v zahodni pa z verjetnostjo $1 - 0\dot{}2 \cdot 0\dot{}3 \doteq 0\dot{}94$, torej se odpravi v vzhodno restavracijo.
- Če pa profesorju tekneta mesna malica in dodatna ponudba, v vzhodni restavraciji dobi želeno jed z verjetnostjo $1 - 0\dot{}20 \cdot 0\dot{}15 \doteq 0\dot{}97$, v zahodni pa prav tako z verjetnostjo $1 - 0\dot{}1 \cdot 0\dot{}3 \doteq 0\dot{}97$, torej žreba.

b) $\dfrac{0\dot{}98 + 0\dot{}9625 + 0\dot{}97 + 3}{6} \doteq 0\dot{}985417.$

c) $\dfrac{0\dot{}98 + \frac{1}{2} \cdot 0\dot{}97 + \frac{1}{2} \cdot 3}{0\dot{}98 + 0\dot{}9625 + 0\dot{}97 + 3} \doteq 0\dot{}50148.$

2. Označimo število metov z n. Po Laplaceovi integalski formuli je verjetnost, da pade vsaj 50 šestic, približno enaka:

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{49\dot{}5 - n/6}{\sqrt{5n/36}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{n - 297}{\sqrt{5n}}\right).$$

Če označimo $z := \Phi^{-1}(0\dot{}49) \doteq 2\dot{}326$, dobimo, da se dani dogodek zgodi z želeno verjetnostjo približno takrat, ko je:

$$\frac{n - 297}{\sqrt{5n}} \geq z\,.$$

Če označimo $x = \sqrt{n}$ in uredimo, dobimo kvadratno enačbo:

$$x^2 - z\sqrt{5}\,x - 297 \geq 0\,.$$

Pripadajoča enačba ima rešitvi $x_1 = \frac{z\sqrt{5} - \sqrt{5z + 1188}}{2} \doteq -14\dot{}71691$ in $x_2 = \frac{z\sqrt{5} + \sqrt{5z + 1188}}{2} \doteq 19\dot{}91879$. Ker mora biti $x > 0$, bo neenačba veljala takrat, ko bo $x \geq x_2$, torej $n \geq x_2^2 \doteq 396\dot{}758$, torej $n \geq 397$.

V resnici je potrebno kocko vreči 398-krat: pri 397 metih je namreč verjetnost danega dogodka enaka približno $0\dot{}9896641$, pri 398 metih pa približno $0\dot{}9902286$.

3. Slučajna spremenljivka X lahko zavzame celoštevilske vrednosti od 0 do 6. Označimo s H_z dogodek, da sedmico damo na začetek, s H_k pa dogodek, da jo damo na konec šopa. Tedaj za $k = 0, 1, \ldots, 6$ velja:

$$P(X = k \mid H_\mathrm{z}) = \binom{6}{k} \cdot 0{.}4^k \cdot 0{.}6^{6-k} \quad \text{in} \quad P(X = k \mid H_\mathrm{k}) = \binom{6}{k} \cdot 0{.}6^k \cdot 0{.}4^{6-k}\,.$$

Po izreku o polni verjetnosti je:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= 0{.}4 \cdot P(X = k \mid H_\mathrm{z}) + 0{.}6 \cdot P(X = k \mid H_\mathrm{k}) = \\ &= \binom{6}{k}\Big(0{.}4^{k+1} \cdot 0{.}6^{6-k} + 0{.}6^{k+1} \cdot 0{.}4^{6-k}\Big)\,. \end{aligned}$$

Numerično je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0{.}021120 & 0{.}096768 & 0{.}207360 & 0{.}276480 & 0{.}241920 & 0{.}126720 & 0{.}029632 \end{pmatrix}\,.$$

4. Izračunajmo najprej porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T. Če je T_1 življenjska doba prvega, T_2 pa življenjska doba drugega dela, velja:

$$F_T(t) = P(T < t) = P(T_1 < t, T_2 < t) = P(T_1 < t)\, P(T_2 < t)\,.$$

Za $t > 0$ je očitno:

$$P(T_1 < t) = P(T_2 < t) = \int_0^t e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1 - e^{-t}\,,$$

torej je $F_T(t) = \big(1 - e^{-t}\big)^2$. Z odvajanjem dobimo še porazdelitveno gostoto:

$$p_T(t) = \begin{cases} 2\big(e^{-t} - e^{-2t}\big) & ;\ t > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Z verjetnostjo 1/2 stroj deluje po času t, ki zadošča enačbi $\big(1 - e^{-t}\big)^2 = \frac{1}{2}$, torej je $t = -\ln\big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\big) \doteq 1{.}228$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 8. 3. 2017

1. Slučajna spremenljivka D lahko zavzame vrednosti $1, 2, 3, \ldots$, in sicer je:

$$P(D = d) = P\big(10^{d-1} \le X < 10^d\big) = \int_{10^{d-1}}^{10^d} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{10^{d-1}} - \frac{1}{10^d} = \frac{9}{10^d} = \\ = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{d-1}.$$

Torej je $D \sim \mathrm{Geom}(9/10)$.

2. a) Slučajna spremenljivka Y je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \int_0^\infty x\, e^{-x-y-x\,e^{-y}}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-y}}{\big(1 + e^{-y}\big)^2}\,.$$

b) *Prvi način.* Če definiramo $U = X$ in $V = Y - \ln X$, torej $(U, V) = h(X, Y)$, kjer je $h(x, y) = (x, y - \ln x)$, je $h^{-1}(u, v) = (u, v + \ln u)$, torej $Jh^{-1} = 1$. Sledi:

$$p_{U,V}(u, v) = p_{X,Y}(u, v + \ln u) = \begin{cases} e^{-u-v-e^{-v}} & ; u > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} = e^{-v-e^{-v}} \cdot \begin{cases} e^{-u} & ; u > 0 \\ 0 & ; \text{sicer}, \end{cases}$$

kar pomeni, da sta U in V res neodvisni.

Drugi način. Iz robne gostote:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^\infty x\, e^{-x-y-x\,e^{-y}}\,\mathrm{d}y = e^{-x}$$

za $x > 0$ izračunamo pogojno gostoto slučajne spremenljivke Y:

$$p_{Y|X}(y \mid x) = x\, e^{-y-x\,e^{-y}}\,,$$

iz nje pa še pogojno gostoto slučajne spremenljivke $V = Y - \ln X$:

$$p_{V|X}(v \mid x) = p_{Y|X}(y + \ln x \mid x) = e^{-v-e^{-v}}\,.$$

Ker je ta gostota neodvisna od x, sta X in V res neodvisni.

3. a) Obe slučajni spremenljivki sta porazdeljeni binomsko $\mathrm{Bin}(2, 1/4)$.

b) Glede na to, da poznamo robni porazdelitvi, je dovolj izračunati verjetnosti dogodkov $\{X = k,\ Y = l\}$ za $k, l \in \{1, 2\}$:

- $X = Y = 2$: to je dogodek, da so v obeh igrah padli sami grbi. Verjetnost tega dogodka je $1/64$.
- $X = 2$, $Y = 1$: to je dogodek, da je v obeh igrah na prvem in drugem kovancu padel grb; na tretjem kovancu pa je v eni igri padel grb, v drugi pa cifra. Verjetnost tega dogodka je $1/32$.

- $X = 1$, $Y = 2$: verjetnost tega dogodka je prav tako $1/32$.
- $X = Y = 1$: to se lahko zgodi na dva načina. Prvi način je, da v eni od iger pade CCG, v drugi pa CGC; verjetnost tega je $1/32$. Drugi način pa je, da v eni od iger padejo sami grbi, v drugi pa nihče od zakoncev dobi stave, t. j. pade grb največ enkrat ali pa le v drugi in tretji igri; verjetnost tega je $5/32$. Skupaj verjetnost je enaka $3/16$.

Skupna porazdelitev je torej:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$25/64$	$5/32$	$1/64$
$X = 1$	$5/32$	$3/16$	$1/32$
$X = 2$	$1/64$	$1/32$	$1/64$

c) Najprej izračunamo kovarianco $K(X, Y)$.
Prvi način: iz tabele skupne porazdelitve najprej izračunamo $E(XY) = 3/8$. Ker je $X, Y \sim \mathrm{Bin}(2, 1/4)$, je $E(X) = E(Y) = 1/2$. Sledi $K(X, Y) = 1/8$.
Drugi način: pišemo $X = X_1 + X_2$ in $Y = Y_1 + Y_2$, kjer je X_j oz. Y_j indikator dogodka, da žena oz. mož v j-ti igri dobi stavo. Slučajna spremenljivka $X_j Y_j$ je indikator dogodka, da sta oba dobila stavo, to pa je dogodek, da so v j-ti igri padli sami grbi. Sledi $E(X_j Y_j) = 1/8$. Ker je $E(X_j) = E(Y_j) = 1/4$, je $K(X_j, Y_j) = 1/16$. Zaradi neodvisnosti je $K(X_1, Y_2) = K(X_2, Y_1) = 0$, torej je $K(X, Y) = K(X_1, Y_1) + K(X_2, Y_2) = 1/8$.
Za izračun korelacijskega koeficienta potrebujemo še disperziji. Ker je $X, Y \sim \mathrm{Bin}(2, 1/4)$, je $D(X) = D(Y) = 3/8$. Sledi $r(X, Y) = 1/3$.

4. Iz:

$$P(Y = l \mid X = k) = \frac{1}{k}\,; \quad l = 1, 2, \ldots, k$$

dobimo, da za $l = 1, 2, 3, \ldots$ velja:

$$\begin{aligned} P(Y = l) &= \sum_{k=l}^{\infty} P(X = k)\, P(Y = l \mid X = k) = \\ &= \sum_{k=l}^{\infty} p^2 (1-p)^{k-1} = \\ &= p^2 (1-p)^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} p^2 (1-p)^n = \\ &= p(1-p)^{l-1}\,, \end{aligned}$$

torej je $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 12. 6. 2017

IŠRM

1. a) Označimo $S := X_1 + X_2 + \ldots + X_{99}$. Za to vsoto lahko neposredno uporabimo centralni limitni izrek. Iz $E(X_i) = 10{\cdot}8$ in $D(X_i) = 0{\cdot}96$ dobimo $E(S) = 1069{\cdot}2$ in $D(S) = 95{\cdot}04$, torej velja:

$$P(S < 1060) = \Phi\left(\frac{1060 - 1069{\cdot}2 - 1}{\sqrt{95{\cdot}04}}\right) + \frac{1}{2} \doteq 0{\cdot}1477$$

(popravek -1 nastopi zaradi tega, ker S zavzame vrednosti le na *sodih* številih).

Lahko uporabimo tudi Laplaceovo integralsko formulo, saj je $X := (S - 990)/2 \sim \mathrm{Bin}(99, 0{\cdot}4)$ in je tako $P(S < 1060) = P(X < 35)$.

Točen rezultat: $0{\cdot}147533$.

b) Slučajne spremenljivke $X_1X_{100}, X_2X_{100}, \ldots X_{99}X_{100}$ niso neodvisne. Pač pa lahko uporabimo izrek o popolni verjetnosti glede na vrednost slučajne spremenljivke X_{100}. Zaradi neodvisnosti velja:

$$\begin{aligned} &P(X_1X_{100} + X_2X_{100} + X_3X_{100} + \cdots + X_{99}X_{100} < 10.600) \\ &\qquad = P(X_{100} = 10)\, P(10S < 10.600) + P(X_{100} = 12)\, P(12S < 10.600) = \\ &\qquad = 0{\cdot}6 \cdot P(S < 1060) + 0{\cdot}4 \cdot P(S < 10.600/12) = \\ &\qquad = 0{\cdot}6 \cdot P(S < 1060) \doteq \\ &\qquad \doteq 0{\cdot}08863\,. \end{aligned}$$

(zadnji enačaj velja, ker je $10.600/12 < 990$, kar je minimalna vrednost slučajne spremenljivke S).

Točen rezultat: $0{\cdot}08852$.

2. Poiskati moramo maksimum verjetja:

$$L = \binom{2X_1}{X_1}\binom{2X_2}{X_2}\cdots\binom{2X_n}{X_n} q^{X_1} q^{X_2} \cdots q^{X_n} (1 - 4q)^{n/2}$$

po q. Opazimo, da je verjetje vselej strogo pozitivno in odvedljivo v q. Recimo najprej, da je vsaj ena izmed vrednosti $X_1, \ldots, X_n$ različna od nič. Tedaj gre verjetje proti nič, če gre q bodisi proti 0 bodisi proti 1/4. Zato je maksimum dosežen v stacionarni točki. To velja tudi za logaritem:

$$\ln L = \sum_{j=1}^{n} \ln\binom{2X_j}{X_j} + \ln q \sum_{j=1}^{n} X_j + \frac{n}{2}\ln(1 - 4q)\,.$$

Odvod:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{2n}{(1 - 4q)}$$

je enak nič pri:

$$q = \hat{q} := \frac{\bar{X}}{2 + 4\bar{X}} \,,$$

kjer je $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ vzorčno povprečje.

Zdaj pa si oglejmo še primer, ko so vse opažene vrednosti enake nič. Tedaj je $L = (1 - 4q)^{n/2}$, kar je največje pri $q = 0$. Maksimum torej pride na robu in tam odvod ni enak nič, še vedno pa je res, da maksimum nastopi pri $q = \hat{q}$.

3. $\bar{x} = 2011\text{˙}5, \quad \bar{Y} = -0\text{˙}45, \quad S_{xx} = 82\text{˙}5, \quad S_{xY} = 7\text{˙}15.$
Regresijska premica: $y = -174\text{˙}78 + 0\text{˙}086667\,x$.

Točkasta napoved: $\hat{Y} \doteq 1\text{˙}15$.

$t_{0.025}(8) \doteq 2\text{˙}31, \quad S \doteq 0\text{˙}601, \quad \Delta \doteq 3\text{˙}172.$

Napovedni interval: $-2\text{˙}01 < Y < 4\text{˙}33$.

4. Opaženih vrednosti je 73. Spodaj so prikazane modelske verjetnosti in pričakovane frekvence:

Vrednost	1	2	3	4	5
Modelska verjetnost	0˙3010	0˙1761	0˙1249	0˙0969	0˙0792
Pričakovana frekvenca	21˙98	12˙85	9˙12	7˙07	5˙78

Vrednost	6	7	8	9
Modelska verjetnost	0˙0669	0˙0580	0˙0512	0˙0458
Pričakovana frekvenca	4˙89	4˙23	3˙73	3˙34

Vidimo, da so zadnje štiri pričakovane frekvence manjše od 5, zato bo treba vrednosti združevati. Splača se združiti vrednosti 6 in 7 ter vrednosti 8 in 9. Dobimo:

Razred	1	2	3	4	5	6, 7	8, 9
Frekvenca	17	31	6	4	6	4	5
Pričakovana frekvenca	21˙98	12˙85	9˙12	7˙07	5˙78	9˙12	7˙07

Pri teh razredih testna statistika pride $\chi^2 \doteq 32\text{˙}6$, kritična vrednost pa je $\chi^2_{0.01}(7) \doteq 16\text{˙}8$. Hipotezo torej zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 28. 8. 2017

1. Označimo z A dogodek, da vse manjše kocke stojijo na večjih, z B pa dogodek, da nobeni dve kocki iste barve nista skupaj. Če preštejemo vse možne in vse ugodne enako verjetne primere, dobimo:

$$P(A) = \frac{(3!)^3}{9!} = \frac{1}{1680} \doteq 5{\cdot}95 \cdot 10^{-4}\,.$$

Pogojno verjetnost najlažje izračunamo tako, da verjetnostni prostor preprosto zožimo na množico vseh izidov, pri katerih vse manjše kocke stojijo na večjih, torej da najprej postavimo velike kocke, nato srednje velike in na koncu še male kocke. Ugodne izide za dogodek B dobimo tako, da spodnje največje tri kocke razporedimo poljubno. Najbolj spodnja srednje velika kocka ne sme biti enake barve kot najbolj zgornja velika kocka, nato ostali dve srednje veliki kocki razvrstimo poljubno. Končno najbolj spodnja mala kocka ne sme biti enake barve kot najbolj zgornja srednje velika kocka, preostali dve mali kocki razvrstimo poljubno. Tako dobimo $P(B \mid A) = 4/9$.

2. Dana pogojna porazdelitev ima pogojno gostoto (za $x > 0$):

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)x} & ; \; ax < y < bx \\ 0 & ; \; \text{sicer.} \end{cases}$$

Iz tega najprej izračunamo dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{b-a} & ; \; x > 0, \; ax < y < bx \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{b-a} & ; \; x > 0, \; \dfrac{y}{b} < x < \dfrac{y}{a} \\ 0 & ; \; \text{sicer,} \end{cases}$$

nakar integriramo in dobimo brezpogojno gostoto: za $y > 0$ velja:

$$p_Y(y) = \frac{1}{b-a} \int_{y/b}^{y/a} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{-y/b} - e^{-y/a}}{b-a}\,,$$

torej je:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y/b} - e^{-y/a}}{b-a} & ; \; y > 0 \\ 0 & ; \; \text{sicer.} \end{cases}$$

3. Dobiček igralnice v posamezni igri ima porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9/40 & 12/40 & 19/40 \end{pmatrix}$$

Ta porazdelitev ima matematično upanje $1/40$ in disperzijo $2199/1600$. Če z S_n označimo dobiček po n igrah, je torej $E(S_n) = n/40$ in $D(S_n) = 2199n/1600$. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da je dobiček pri velikem številu iger porazdeljen približno normalno, torej je:

$$P(S_n > 0) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(-\frac{n/40}{\sqrt{2199n/1600}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2199}}\right) .$$

Iskani n torej približno zadošča enačbi $\sqrt{n/2199} = \Phi^{-1}(0\text{˙}49) \doteq 2\text{˙}33$, kar je res približno za $n = 11.940$.

4. Podatke je smiselno interpretirati na dva načina. Prvi način je, da upoštevamo vse rezultate, obenem pa pozabimo, kateri meti pripadajo istim tekmovalkam. Uporabimo torej test za neodvisne vzorce. Če z X označimo spremenljivko, ki pove met v prvem poskusu, z Y pa spremenljivko, ki pove met v drugem poskusu, dobimo:

$$\bar{X} \doteq 60\text{˙}42\,, \quad \bar{Y} \doteq 63\text{˙}20\,, \quad s \doteq 2\text{˙}863\,, \quad T \doteq -1\text{˙}930\,, \quad t_{0.975}(14) \doteq 2\text{˙}14\,.$$

Hipoteze ne zavrnemo.

Druga interpretacija pa je, da ohranimo, kateri meti pripadajo istim tekmovalkam. Uporabimo torej test za vzorce po parih, pri čemer tekmovalke, ki se jim nista posrečila oba poskusa, izločimo. Dobimo:

$$\bar{X} \doteq 59\text{˙}77\,, \quad \bar{Y} \doteq 63\text{˙}20\,, \quad s \doteq 3\text{˙}909\,, \quad T \doteq -2\text{˙}324\,, \quad t_{0.975}(6) \doteq 2\text{˙}45\,.$$

Hipoteze ne zavrnemo.

2015/16

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 10. 12. 2015

IŠRM

1. a) Za $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ označimo s H_k dogodek, da je na kocki padlo natanko k pik; seveda je $P(H_k) = 1/6$ za vse k. Nadalje naj bo A pa dogodek, da je na koncu karta z oznako 10 tam, kjer je bila prej karta z oznako 1. Da se zgodi ta dogodek, morata biti karti z oznako 1 in 10 izbrani za premestitev; označimo ta dogodek z M. Velja:

$$P(M \mid H_k) = \frac{\binom{8}{k-2}}{\binom{10}{k}} = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{k(k-1)}{90}\,.$$

Ko enkrat vemo, da sta karti z oznakama 1 in 10 dve izmed k kart, izbranih za premestitev, pa je pogojna verjetnost, da karta z oznako 10 pristane tam, kjer je bila prej karta z oznako 1, enaka $1/k$. Torej velja:

$$P(A \mid M \cap H_k) = \frac{1}{k}\,,$$

torej:

$$P(A \cap H_k) = P(H_k)\, P(M \mid H_k)\, P(A \mid M \cap H_k) = \frac{k-1}{540}\,.$$

Sledi:

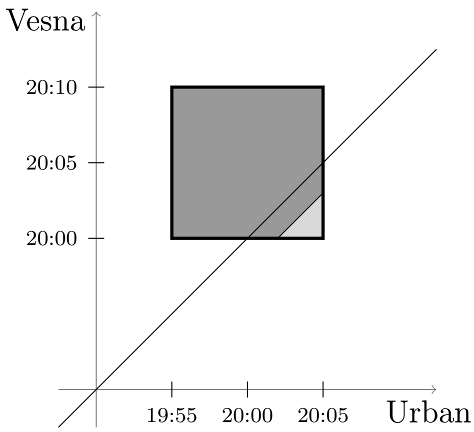
$$P(A) = \sum_{k=1}^{6} P(A \cap H_k) = \frac{1}{36}\,.$$

b) Iskana verjetnost je:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{15}\,.$$

2. a) $1 - \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 3^2}{10^2} = \dfrac{191}{200} = 0{\dot{}}955$, b) $\dfrac{\frac{1}{2}\left(5^2 - 3^2\right)}{10^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2} = \dfrac{16}{191} \doteq 0{\dot{}}0838$.

Slika:



3. Označimo z n število vseh metov, z S pa število tistih, pri katerih pade šestica. Tedaj je $S \sim \mathrm{Bin}(n, 1/6)$. Veljati mora:

$$P(S \geq 0\text{˙}16\, n) \geq 0\text{˙}99\,.$$

Po Laplaceovi integralski formuli je:

$$P(S \geq 0\text{˙}16\, n) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{0\text{˙}16\, n - \frac{1}{6}\, n}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\big(\sqrt{0\text{˙}00032\, n}\big)\,.$$

Torej bo število metov ustrezalo približno tedaj, ko bo $\sqrt{0\text{˙}00032\, n} \geq \Phi^{-1}(0\text{˙}49)$ oziroma $n \geq \big(\Phi^{-1}(0\text{˙}49)\big)^2 \,/\, 0\text{˙}00032 \doteq 16912\text{˙}17$, torej $n \geq 16913$. V grobem torej velja, da moramo kocko vreči vsaj približno 17.000-krat.

4. Da bo p res gostota, mora veljati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{a/b}} (ax - bx^3)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{4b} = 1\,,$$

torej mora biti $b = a^2/4$. Namesto verjetnosti $P(X > 1)$ pa je lažje nastaviti:

$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (ax - bx^3)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{16}\,.$$

Račun je pravilen, če je $\sqrt{a/b} \geq 1$, torej $\sqrt{4/a} \geq 1$, torej $a \leq 4$ (sicer je verjetnost enaka 1). Dobimo kvadratno enačbo:

$$\frac{a}{2} - \frac{a^2}{16} = \frac{7}{16}\,,$$

ki ima rešitvi $a = 1$ in $a = 7$. Glede na zgoraj povedano bo pravilna rešitev $a = 1$ in posledično $b = 1/4$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 7. 4. 2016

IŠRM

1. a) Za $-1 < x < 1$ izračunamo:

$$p_X(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{8}{3\pi}\,(1 - x^2)^{3/2}\,.$$

Za $|x| \geq 1$ lahko postavimo $p_X(x) = 0$. Ker je porazdelitvena gostota simetrična v x in y (z drugimi besedami, ker sta X in Y *izmenljivi*), ima Y isto gostoto. Torej je:

$$p_X(t) = p_Y(t) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi}(1 - t^2)^{3/2} & ; -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

b) Pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na Y je smiselno gledati za $-1 < Y < 1$. Torej za $-1 < y < 1$ velja:

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{3(1 - x^2 - y^2)}{4(1 - y^2)^{3/2}} & ; -\sqrt{1 - y^2} < x < \sqrt{1 - y^2} \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

c) Za slučajno spremenljivko $Z := \dfrac{X}{\sqrt{1 - Y^2}}$ velja:

$$p_{Z|Y}(z \mid y) = \sqrt{1 - y^2}\, p_{X|Y}\big(z\sqrt{1 - y^2} \bigm| y\big) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - z^2) & ; -1 < z < 1 \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

kar je neodvisno od y. Od tod sledi, da je Z neodvisna od Y.

2. Označimo z 1, 2, 3, 4 in 5 stole, na katerih sedijo žene, in pišimo $W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$, kjer je:

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; \text{žena, ki sedi na } i\text{-tem stolu, ima poleg sebe svojega moža} \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Tedaj je:

$$E(X_i) = P\big(\text{žena, ki sedi na } i\text{-tem stolu, ima poleg sebe svojega moža}\big) = \frac{2}{5}$$

in

$$E(W) = \sum_{i=1}^{5} E(X_i) = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2\,.$$

Za izračun disperzije pišimo:

$$E(W^2) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} E(X_i X_j)\,.$$

Velja:

$$E(X_i X_j) =$$
$$= P\big(\text{ženi, ki sedita na } i\text{-tem in } j\text{-tem stolu, ima obe poleg sebe svojega moža}\big)\,.$$

Za $i = j$ je $E(X_i X_j) = \dfrac{2}{5}$. Takih parov ženskih stolov je 5. Če je med i-tim in j-tim ženskim stolom le en (moški) stol, je:

$$E(X_i X_j) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40}\,.$$

Takih parov ženskih stolov je 10. Končno, če je med med i-tim in j-tim ženskim stolom več kot en stol, je:

$$E(X_i X_j) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}\,.$$

Takih parov ženskih stolov je prav tako 10. Sledi:

$$E(W^2) = 5 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{3}{40} + 10 \cdot \frac{1}{5} = \frac{19}{4}$$

in končno:

$$D(W) = E(W^2) - \big(E(W)\big)^2 = \frac{3}{4}\,.$$

3. Velja:

$$\begin{aligned} E(X) &= E\big[E(X \mid Y)\big] = 3\,E(Y) + 1 = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 7\,, \\ E(XY \mid Y) &= E\big[E(X \mid Y) \cdot Y\big] = 3\,E(Y^2) + E(Y) = \\ &= 3\,D(Y) + 3\big(E(Y)\big)^2 + E(Y) = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2^2 + 2 = 18\,. \end{aligned}$$

4. Po centralnem limitnem izreku je slučajna spremenljivka $S = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{100}^2$ porazdeljena približno normalno z ustreznim matematičnim upanjem in disperzijo. Iz:

$$E(X_i^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,, \quad E(X_i^4) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,, \quad D(X_i^2) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}$$

izračunamo:

$$E(S) = \frac{100}{3} \quad \text{in} \quad D(S) = \frac{400}{45} = \frac{80}{9}\,.$$

Ker je S porazdeljena zvezno, je njen prvi decil kar tisto število q, za katero je $P(S \le q) = 1/10$. Velja:

$$P(S \le q) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{q - \frac{100}{3}}{\sqrt{80/9}}\right)\,,$$

torej bo:

$$\Phi\left(\frac{q-\frac{100}{3}}{\sqrt{80/9}}\right) \approx -0{\cdot}4$$

oziroma:

$$q \approx \frac{100}{3} - \sqrt{\frac{80}{9}}\,\Phi^{-1}(0{\cdot}4) \doteq 33{\cdot}33 - 2{\cdot}98 \cdot 1{\cdot}28 \doteq 29{\cdot}5\,.$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 10. 6. 2016

IŠRM

1. a) Iz:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{(1/\ln a)+1}} = \ln a$$

dobimo $c = \dfrac{1}{\ln a}$.

b) Logaritem verjetja je enak:

$$\ln L = -n \ln\ln a - \left(\frac{1}{\ln a} + 1\right) \sum_{k=1}^n \ln X_k$$

in gre proti minus neskončno, če gre a proti 1 ali neskončno. Zato je maksimum dosežen v stacionarni točki. Odvajamo:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}a} = -\frac{n}{a\ln a} + \frac{1}{a(\ln a)^2} \sum_{k=1}^n \ln X_k$$

in dobimo cenilko:

$$\hat{a} = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n} \,.$$

c) Velja:

$$E(\hat{a}) = \left(\frac{1}{\ln a} \int_1^\infty \frac{x^{1/n}}{x^{(1/\ln a)+1}}\,\mathrm{d}x\right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln a}{n}\right)^n}\,,$$

kar ni enako a, zato je cenilka pristranska. Pač pa gre ta izraz proti a v limiti, ko gre n proti neskončno, zato je cenilka asimptotično nepristranska.

2. Opaženi delež: $15/135 \doteq 0{\cdot}1111$, interval zaupanja: $(0{\cdot}06, 0{\cdot}16)$.

3. Obstajata vsaj dve smiselni interpretaciji. Ena je, da gledamo predznačene spremembe, druga pa, da gledamo njihove absolutne vrednosti. V obeh primerih je smiselno uporabiti Studentov primerjalni test (T-test). Spremembe čez teden označimo z X (teh je 12), spremembe čez konec tedna pa z Y (te so tri).

Pri predznačenih spremembah pride:

$$\bar{X} \doteq -0{\cdot}1209\,, \quad \bar{Y} \doteq -0{\cdot}2133\,, \quad s \doteq 0{\cdot}7316\,, \quad T \doteq 0{\cdot}196\,,$$

kar je po absolutni vrednosti manjše od $t_{0.975}(13) \doteq 2{\cdot}16$, zato ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

Pri absolutnih vrednostih sprememb pa pride:

$$\bar{X} \doteq 0{\cdot}5575\,, \quad \bar{Y} \doteq 0{\cdot}5667\,, \quad s \doteq 0{\cdot}4453\,, \quad T \doteq -0{\cdot}032\,,$$

kar je po absolutni vrednosti manjše od $t_{0.975}(13)$, zato ničelne hipoteze tudi tokrat ne moremo zavrniti.

4. Za pojasnjevalno spremenljivko (x) postavimo razred (njene vrednosti v podatkih so 1, 2, 3, 4 in 5), za odvisno spremenljivko (y) pa postavimo rezultat pri čistoči zob. Dobimo:

$$\bar{X} = 2{\dot{}}75\,, \quad \bar{Y} \doteq 58{\dot{}}58\,, \quad C_{xx} = 24{\dot{}}24\,, \quad C_{xy} \doteq 19{\dot{}}43\,,$$

regresijska premica pa pride:

$$y \doteq 56{\dot{}}38 + 0{\dot{}}8011\,x\,.$$

Če želimo dobiti napoved za deveti razred, vstavimo $x = 9$ in dobimo $y \doteq 63{\dot{}}59$. Pričakujemo torej rezultat $63{\dot{}}59\%$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 28. 6. 2016

IŠRM

1. a) Za izide vzamemo izbore 5 kart izmed 53; teh je $\binom{53}{5} = 2.869.685$. Pri ugodnih izidih ločimo tri možnosti:

- Full house brez džokerja; teh je $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2} = 3.744$.
- Full house z džokerjem, ki zamenja karto iz para: teh je $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 2.496$.
- Full house z džokerjem, ki zamenja karto iz trisa: teh je $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{2} = 2.808$.

Iskana verjetnost je torej enaka $\dfrac{3.744 + 2.496 + 2.808}{2.869.685} \doteq 0{\dot{}}00315$.

b) $\dfrac{2.496 + 2.808}{3.744 + 2.496 + 2.808} = \dfrac{17}{29} \doteq 0{\dot{}}586$.

c) $\dfrac{2.808}{2.496 + 2.808} = \dfrac{9}{17} \doteq 0{\dot{}}529$.

2. Iz pogojne gostote:

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} e^{3x} & ;\ 0 < y < e^{-3x} \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

dobimo skupno gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{2x} & ;\ 0 < y < e^{-3x} \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Opazimo, da je gostota neničelna, kvečjemu če je $0 < y < 1$. Za take y je gostota iskane porazdelitve enaka:

$$p_Y(y) = \int_0^{-(\ln y)/3} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{y^{-2/3} - 1}{2}\,.$$

3. Označimo z X_i izkupiček igralca od i-te igre. Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^3 & 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} & 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 & \left(\frac{1}{6}\right)^3 \end{pmatrix}$$

od koder dobimo:

$$\mu_1 := E(X_i) \doteq -0{\dot{}}0787 \quad \text{in} \quad \sigma_1 := \sqrt{D(X_i)} \doteq 1{\dot{}}113\,.$$

Če z S_n označimo skupni izkupiček igralca po n igrah, se dogodek, da ima igralnica dobiček, ujema z dogodkom $\{S_n < 0\}$. Po centralnem limitnem izreku je njegova verjetnost približno enaka:

$$\Phi\left(\frac{0 - n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2} = \Phi\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n}\right)\,,$$

to pa bo pri približno:

$$n = \left(\Phi^{-1}(0{\dot{}}49)\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\mu^2} \approx 1083\,.$$

4. Iz:

$$\int_0^\infty \left(e^{-x/a} - e^{-x/b}\right) \mathrm{d}x = a - b$$

dobimo $c = \dfrac{1}{a-b}$.

b) Prva dva začetna momenta sta enaka:

$$z_1 = E(X) = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b\,, \qquad z_2 = E(X^2) = \frac{2(a^3 - b^3)}{a - b} = 2(a^2 + ab + b^2)\,.$$

Po krajšem računu dobimo izražavo (upoštevajoč, da je $a < b$):

$$a = \tfrac{1}{2}\left(z_1 + \sqrt{2z_2 - 3z_1^2}\right), \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(z_1 - \sqrt{2z_2 - 3z_1^2}\right).$$

Cenilki sledita. Za naše opažene vrednosti dobimo:

$$\hat{z}_1 = 5\,, \quad \hat{z}_2 = 43{\cdot}6\,, \quad \hat{a} \doteq 4{\cdot}25\,, \quad \hat{b} \doteq 0{\cdot}754\,.$$

c) Če so vse opažene vrednosti enake recimo x, pride $\hat{z}_1 = x$ in $\hat{z}_2 = x^2$ in potem dobimo negativno diskriminanto – sistem ni rešljiv. To pomeni, da model za take podatke najbrž ni ustrezen.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 29. 8. 2016

IŠRM

1. a) Vseh možnih razporeditev cvetlic je $\binom{11}{6} = 462$. Prešteti moramo razporeditve, pri katerih je desno od najbolj leve begonije tudi begonija. Te so v bijektivni korespondenci z razporeditvami petih begonij in petih fuksij: zahtevane razporeditve dobimo tako, da najbolj levo begonijo podvojimo. Torej je vseh ustreznih razporeditev $\binom{10}{5} = 252$, iskana verjetnost pa je enaka $252/462 = 6/11$.

b) Prešteti moramo razporeditve, pri katerih je desno od najbolj leve begonije begonija, obenem pa levo od najbolj desne fuksije fuksija. Te so spet v bijektivni korespondenci z razporeditvami petih begonij in štirih fuksij, saj lahko zahtevane razporeditve dobimo tako, da podvojimo najbolj levo begonijo in najbolj desno fuksijo. Vseh ustreznih razporeditev je torej $\binom{9}{5} = 126$, iskana pogojna verjetnost pa je enaka $126/252 = 1/2$.

2. Za $z > 0$ je gostota slučajne spremenljivke Z enaka:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, xz)\, |x| \, \mathrm{d}x = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} x\, e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2} ,$$

medtem ko lahko za $z \le 0$ postavimo $p_Z(z) = 0$.

3. Iz $E(X) = \frac{1}{2}$, $E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a$ in $E(XY) = \frac{1}{6}a$ dobimo, da sta X in Y nekorelirani natanko tedaj, ko je $a = 3$.

4. Parameter najprej ocenimo po metodi največjega verjetja. Logaritemska funkcija verjetja je enaka:

$$\ln L = 70 \ln(1 - a) + 27 \ln(a - a^2) + 3 \ln(a^2) = 97 \ln(1 - a) + 33 \ln a$$

in gre proti minus neskončno, brž ko gre a proti 0 ali 1. Zato je maksimum dosežen v stacionarni točki. Z odvajanjem:

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}a} = -\frac{97}{1 - a} + \frac{33}{a}$$

dobimo, da je maksimum dosežen pri $a = \hat{a} := 33/130 \doteq 0{\cdot}2538$. Pričakovane frekvence so torej:

$$\tilde{N}_1 = 100(1 - \hat{a}) \doteq 74{\cdot}62 \,, \quad \tilde{N}_1 = 100(\hat{a} - \hat{a}^2) \doteq 18{\cdot}94 \,, \quad \tilde{N}_3 = 100\hat{a}^2 \doteq 6{\cdot}44 \,,$$

testna statistika pa je enaka:

$$\chi^2 = \sum_{r=1}^{3} \frac{(N_r - \tilde{N}_r)^2}{\tilde{N}_r} \doteq 5{\cdot}56$$

in je večja od kritične vrednosti $\chi^2_{0.95}(1) \doteq 3{\cdot}84$, kar pomeni, da ničelno hipotezo zavrnemo.

2014/15

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 18. 12. 2014

IŠRM

1. Označimo število izvlečenih kart z X. Ta slučajna spremenljivka lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4, 5$ ali 6. Dogodki, da je X enaka $2, 3, 4$ in 5, ustrezajo naslednjim zaporedjem izvlečenih barv:

$$\begin{array}{ll}
X = 2: & \text{R}, \text{Č}, (2 \times \text{R} \ \text{ in } \ 2 \times \text{Č}) \\
X = 3: & \text{R}, \text{R}, \text{Č}, (1 \times \text{R} \ \text{ in } \ 2 \times \text{Č}) \\
& \text{Č}, \text{R}, \text{Č}, (2 \times \text{R} \ \text{ in } \ 1 \times \text{Č}) \\
X = 4: & \text{R}, \text{R}, \text{R}, \text{Č}, 2 \times \text{Č} \\
& \text{Č}, \text{R}, \text{R}, \text{Č}, (1 \times \text{R} \ \text{ in } \ 1 \times \text{Č}) \\
& \text{Č}, \text{Č}, \text{R}, \text{Č}, 2 \times \text{R} \\
X = 5: & \text{Č}, \text{R}, \text{R}, \text{R}, \text{Č}, \text{Č} \\
& \text{Č}, \text{Č}, \text{R}, \text{R}, \text{Č}, \text{R} \\
X = 6: & \text{Č}, \text{Č}, \text{R}, \text{R}, \text{R}, \text{Č} \\
& \text{Č}, \text{Č}, \text{Č}, \text{R}, \text{R}, \text{R}
\end{array}$$

Verjetnosti teh dogodkov izračunamo tako, da verjetnostni prostor razbijemo na $\binom{6}{3} = 20$ enako verjetnih izidov, ki predstavljajo razporeditve obeh barv v kupu. Ko preštejemo izide za vse dogodke, dobimo iskano porazdelitev:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{6}{20} & \frac{6}{20} & \frac{4}{20} & \frac{2}{20} & \frac{2}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}3 & 0{\cdot}2 & 0{\cdot}1 & 0{\cdot}1 \end{pmatrix}.$$

2. Označimo z n število zrn v posamezni škatli, z Z pa število polomljenih. Tedaj je $Z \sim \text{Bin}(n, 0{\cdot}07)$. Veljati mora:

$$P(Z \le 0{\cdot}08\, n) \ge 0{\cdot}99\,.$$

Po Laplaceovi integralski formuli je:

$$P(Z \le 0{\cdot}08\, n) \approx \Phi\left(\frac{0{\cdot}08\, n - 0{\cdot}07\, n}{\sqrt{n \cdot 0{\cdot}07 \cdot 0{\cdot}93}}\right) + \frac{1}{2} = \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{651}}\right) + \frac{1}{2}\,.$$

Torej bo število zrn v škatli ustrezalo približno tedaj, ko bo $\sqrt{n/651} \ge \Phi^{-1}(0{\cdot}49)$ oziroma $n \ge 651\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}49)\big)^2 \doteq 3523{\cdot}14$, torej $n \ge 3524$.

3. Za $i = 1, 2, 3$ naj bo H_i dogodek, da je bil samoglasnik med prvimi tremi črkami prikazan kot i-ti, H_0 pa dogodek, da sploh ni bil prikazan. Nadalje naj bo U_3 dogodek, da Manja ugane besedo po natanko treh prikazanih črkah.

a) Iskana pogojna verjetnost je:

$$P(U_3 \mid H_0) = 0\text{˙}95 \cdot 0\text{˙}85 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}7 = 0\text{˙}33915\,.$$

b) Izračunamo še ostale pogojne verjetnosti: Nadalje je:

$$\begin{aligned} P(U_3 \mid H_1) &= 0\text{˙}95 \cdot 0\text{˙}9 \cdot 0\text{˙}8 \cdot 0\text{˙}6 = 0\text{˙}4104\,, \\ P(U_3 \mid H_2) &= 0\text{˙}95 \cdot 0\text{˙}85 \cdot 0\text{˙}8 \cdot 0\text{˙}6 = 0\text{˙}3876\,, \\ P(U_3 \mid H_3) &= 0\text{˙}95 \cdot 0\text{˙}85 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}6 = 0\text{˙}2907\,. \end{aligned}$$

Iz apriornih verjetnosti hipotez:

$$P(H_0) = \frac{2}{5}\,, \quad P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{5}$$

in izreka o polni verjetnosti dobimo:

$$P(U_3) = \frac{2}{5} \cdot 0\text{˙}33915 + \frac{1}{5} \cdot 0\text{˙}4104 + \frac{1}{5} \cdot 0\text{˙}3876 + \frac{1}{5} \cdot 0\text{˙}2907 = 0\text{˙}3534\,,$$

c) Po Bayesovi formuli je iskana pogojna verjetnost enaka:

$$P(H_0 \mid U_3) = \frac{\frac{2}{5} \cdot 0\text{˙}33915}{0\text{˙}3534} \doteq 0\text{˙}3839\,.$$

4. a) Z upoštevanjem, da je kumulativna porazdelitvena funkcija eksponentne porazdelitve za $t \ge 0$ enaka:

$$F_\lambda(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,,$$

dobimo, da za $0 \le t \le 2$ velja:

$$F_T(t) = \frac{2}{3}\big(1 - e^{-2t}\big)\,,$$

medtem ko za $t \ge 2$ velja:

$$F_T(t) = \frac{2}{3}\big(1 - e^{-2t}\big) + \frac{1}{3}\big(1 - e^{-(t-2)}\big)\,.$$

Torej je:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \le 0 \\ \frac{2}{3}\big(1 - e^{-2t}\big) & ;\ 0 \le t \le 2 \\ 1 - \frac{2}{3}\,e^{-2t} - \frac{1}{3}\,e^{-(t-2)} & ;\ t \ge 2 \end{cases}\,.$$

b) Kumulativna porazdelitvena funkcija je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, torej je T porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_T(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t < 0 \\ \frac{4}{3}\,e^{-2t} & ;\ 0 < t < 2 \\ \frac{4}{3}\,e^{-2t} + \frac{1}{3}\,e^{-(t-2)} & ;\ t > 2 \end{cases}\,.$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 23. 3. 2015

IŠRM

1. Iz:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{1}{(x+y)^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a}{3}\int_1^\infty \frac{1}{(1+y)^3}\,\mathrm{d}y = \frac{a}{24}$$

dobimo $a = 24$. Nadalje je slučajna spremenljivka Z porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^\infty p_{X,Y}(yz,y)|y|\,\mathrm{d}y\,.$$

Ker Z z verjetnostjo 1 zavzame le vrednosti, večje od 0, lahko za $z \le 0$ vzamemo $p_Z(z) = 0$. Za $z \le 1$ velja:

$$p_Z(z) = 24\int_{1/z}^\infty \frac{y}{(yz+y)^4}\,\mathrm{d}y = \frac{12z^2}{(1+z)^4}\,,$$

za $z \ge 1$ pa velja:

$$p_Z(z) = 24\int_1^\infty \frac{y}{(yz+y)^4}\,\mathrm{d}y = \frac{12}{(1+z)^4}\,.$$

Sklep:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0 & ;\ z \le 0 \\ \dfrac{12z^2}{(1+z)^4} & ;\ 0 \le z \le 1 \\ \dfrac{12}{(1+z)^4} & ;\ z \ge 1\,. \end{cases}$$

2. Za $i = 1,2,3,4$ naj bo X_i indikator dogodka, da i-ta ženska vrže šestico in je hkrati ne vrže nobeden od njenih sosedov, medtem ko naj bo Y_i indikator dogodka, da i-ti moški vrže šestico in je hkrati ne vrže nobena od njegovih sosed. Tedaj je $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ in $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$. Pišimo:

$$K(X,Y) = \sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4 K(X_i,Y_j)\,.$$

Pri kovariancah ločimo dve možnosti.

Prva možnost: i-ta ženska in j-ti moški sedita skupaj. V tem primeru pišimo $K(X_i,Y_j) = E(X_iY_j) - E(X_i)\,E(Y_j)$. Nato pa opazimo, da je $X_iY_j = 0$. Zato je:

$$K(X_i,Y_j) = -\,E(X_i)\,E(Y_j) = -\left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^2 = -\frac{625}{46656}\,.$$

Druga možnost: i-ta ženska in j-ti moški ne sedita skupaj. V tem primeru pa se slučajni spremenljivki X_i in Y_j nanašata na disjunktna nabora oseb za mizo, zato sta neodvisni, torej je $K(X_i, Y_j) = 0$.

Ker je natanko 8 urejenih parov (i, j), kjer i-ta ženska in j-ti moški sedita skupaj, je iskana kovarianca enaka:

$$K(X, Y) = -8 \cdot \frac{625}{46656} = -\frac{625}{5832} \doteq -0{\text{'}}107\,.$$

3. Tako X kot Y z verjetnostjo 1 zavzameta vrednosti na pozitivnih številih, zato lahko za vse spremenljivke, s katerimi delamo, privzamemo, da so pozitivne. Iz:

$$p_Y(y) = \lambda\, e^{-\lambda y} \quad \text{in} \quad p_{X|Y}(x \mid y) = y\, e^{-xy}$$

dobimo dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_Y(y)\, p_{X|Y}(x \mid y) = \lambda y\, e^{-(\lambda+x)y}\,,$$

iz nje pa še robno gostoto:

$$p_X(x) = \int_0^\infty \lambda y\, e^{-(\lambda+x)y}\, \mathrm{d}y = \frac{\lambda}{(\lambda + x)^2}\,.$$

Natančneje,

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(\lambda + x)^2} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

4. Naj bo $X \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$. Iz rodovne funkcije:

$$G_X(s) = \frac{(1+s)^n}{2^n}$$

dobimo faktorske momente:

$$E\big[X(X-1)\cdots(X-k+1)\big] = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2^k}\,.$$

Iz prvih štirih faktorskih momentov:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{n}{2}\,, \\ E(X^2 - X) &= \frac{n^2 - n}{4}\,, \\ E(X^3 - 3X^2 + 2X) &= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{8}\,, \\ E(X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X) &= \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{16} \end{aligned}$$

naračunamo drugi, tretji in četrti začetni moment:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{n^2 + n}{4}\,, \\
E(X^3) &= \frac{n^3 + 3n^2}{8}\,, \\
E(X^4) &= \frac{n^4 + 6n^3 + 3n^2 - 2n}{16}\,,
\end{aligned}
$$

iz njih pa disperzijo in četrti centralni moment:

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{n}{4}\,, \\
E\Big[\big(X - E(X)\big)^4\Big] &= E(X^4) - 4\,E(X^3)\,E(X) + 6\,E(X^2)\big(E(X)\big)^2 - 3\big(E(X)\big)^4 = \\
&= \frac{3n^2 - 2n}{16}\,.
\end{aligned}
$$

Tako dobimo, da je sploščenost enaka:

$$
K(X) = \frac{16}{n^2} \cdot \frac{3n^2 - 2n}{16} - 3 = -\frac{2}{n}\,.
$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 12. 6. 2015

IŠRM

1. Če z S označimo izkupiček igralnice, lahko zapišemo:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,,$$

kjer je n število iger, $X_1, \ldots, X_n$ pa so neodvisne slučajne spremenljivke s porazdelitvijo:

$$\begin{pmatrix} -39 & 0 & 1 \\ 0\text{'}01 & 0\text{'}49 & 0\text{'}5 \end{pmatrix}.$$

Velja $E(X_i) = 0\text{'}01$ in $D(X_i) = 15\text{'}6979$, torej $E(S) = 0\text{'}11\,n$ in $D(S) = 15\text{'}6979\,n$. Če je n dovolj velik, je po centralnem limitnem izreku verjetnost, da ima igralnica dobiček, približno enaka:

$$P(S > 0) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(-\frac{0\text{'}11\,n}{\sqrt{15\text{'}6979\,n}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\sqrt{\frac{121n}{156979}}\right).$$

To bo enako $0\text{'}99$ približno takrat, ko bo $\sqrt{\dfrac{121n}{156979}} = 2\text{'}33$, torej približno za $n = 7021$.

2. Po metodi momentov so vzorčni momenti cenilke pravih. To pa lahko uporabimo tudi za standardni odklon, saj se le-ta izraža s prvima dvema momentoma. Če ima X porazdelitev Gama(a, λ), velja:

$$E(X) = \frac{a}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Podano imamo vzorčno povprečje in popravljeni standardni odklon. Od tod izračunamo nepopravljeno vzorčno disperzijo:

$$\frac{99}{100} \cdot 22^2 = 479\text{'}16\,.$$

Od tod dobimo sistem enačb:

$$\frac{\hat{a}}{\hat{\lambda}} = 50\,, \qquad \frac{\hat{a}}{\hat{\lambda}^2} = 479\text{'}16\,,$$

ki ima rešitev $\hat{a} \doteq 5\text{'}217$, $\hat{\lambda} \doteq 0\text{'}1043$. To sta iskani oceni za a in λ.

3. Izvedemo T-test za *neodvisne* vzorce:
$\bar{X} = 17\text{'}23$, $\bar{Y} = 25\text{'}00$, $s \doteq 4\text{'}5957$, $T \doteq -3\text{'}78$, $t_{0.975}(18) \doteq 2\text{'}10$.
Hipotezo zavrnemo – sprejmemo, da magnetno polje vpliva na rast miši.

4. Simetrično porazdelitev najprej parametriziramo:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & 1-2a-2b & b & a \end{pmatrix},$$

nakar parametra ocenimo po metodi največjega verjetja. Velja:

$$\begin{aligned} L &= a^{29} b^{48} (1-2a-2b)^{23}, \\ \ln L &= 29 \ln a + 48 \ln b + 23 \ln(1-2a-2b). \end{aligned}$$

Na robu definicijskega območja za a in b je verjetje enako nič, drugje pa je strogo pozitivno, zato je maksimum dosežen v stacionarni točki. Parcialna odvoda sta enaka:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{29}{a} - \frac{46}{1-2a-2b}, \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial b} = \frac{48}{b} - \frac{46}{1-2a-2b}$$

in sta enaka nič v točkah $\hat{a} = 0{\cdot}145$, $\hat{b} = 0{\cdot}24$. Od tod dobimo testno statistiko:

$$\chi^2 = \frac{(9-14{\cdot}5)^2}{14{\cdot}5} + \frac{(29-14{\cdot}5)^2}{24} + \frac{(23-23)^2}{23} + \frac{(19-14{\cdot}5)^2}{24} + \frac{(20-14{\cdot}5)^2}{14{\cdot}5} \doteq 6{\cdot}26,$$

kar primerjamo s $\chi^2_{0.95}(2) \doteq 5{\cdot}99$. Hipotezo zavrnemo – sprejmemo, da porazdelitev ni simetrična.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 22. 6. 2015

IŠRM

1. a) Označimo število izvlečenih kart z X. Ta slučajna spremenljivka lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4, 5$ ali 6. Za k iz teh vrednosti se dogodek $\{X = k\}$ ujema z dogodkom, da je med prvimi $k-1$ izvlečenimi kartami natanko ena rdeča, obenem pa je tudi k-ta karta rdeča. Sledi:

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{1}\binom{1}{1}\binom{8-k}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{(k-1)(8-k)(7-k)}{140}$$

oziroma:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{15}{70} & \frac{20}{70} & \frac{18}{70} & \frac{12}{70} & \frac{5}{70} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0{\cdot}2143 & 0{\cdot}2857 & 0{\cdot}1714 & 0{\cdot}2571 & 0{\cdot}0714 \end{pmatrix}.$$

b) Označimo z R_1 dogodek, da je prva izvlečena karta rdeča. Iskana pogojna verjetnost je:

$$P(R_1 \mid X > 5) = \frac{P(R_1)\,P(X > 5 \mid R_1)}{P(X > 5)}.$$

Velja:

$$P(R_1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = k \mid R_1) = \frac{\binom{k-2}{0}\binom{1}{1}\binom{8-k}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{(8-k)(7-k)}{70}\,; \quad k = 2, 3, 4, 5, 6\,,$$

torej je:

$$P(R_1 \mid X > 5) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{6}{70} + \frac{2}{70}\right)}{\frac{12}{70} + \frac{5}{70}} = \frac{4}{17} \doteq 0{\cdot}2353\,.$$

2. a) $p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & ; y > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$

b) Ker ne velja $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$, sta slučajni spremenljivki X in Y odvisni. Če označimo $Z = XY$, ima slučajni vektor (X, Z) gostoto:

$$p_{X,Z}(x, z) = \begin{cases} e^{-z} & ; z > x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Že iz oblike domene se vidi, da sta X in Z odvisni.

Slučajni vektor (Y, Z) pa ima gostoto:

$$p_{X,Z}(x, z) = \begin{cases} \dfrac{z}{y^2}\, e^{-z} & ; y > 1, z > 0 \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

ki se da zapisati kot produkt funkcije spremenljivke y in funkcije spremenljivke z. Zato sta Y in Z neodvisni.

3. Pišemo lahko $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{52}$, kjer je:

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; i\text{-ti par je izvlečen} \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja:

$$E(X_i) = P(i\text{-ti par je izvlečen}) = \frac{\binom{20}{2}}{\binom{104}{2}} = \frac{95}{2678}\,,$$

od koder sledi:

$$E(S) = 52 \cdot \frac{95}{2678} = \frac{190}{103} \doteq 1{\cdot}845\,.$$

Nadalje velja:

$$D(X_i) = \frac{95}{2678} - \left(\frac{95}{2678}\right)^2 = \frac{245385}{7171684}$$

ter za $i \neq j$:

$$E(X_i X_j) = P(i\text{-ti in } j\text{-ti par sta oba izvlečena}) = \frac{\binom{20}{2}\binom{18}{2}}{\binom{104}{2}\binom{102}{2}} = \frac{285}{270478}\,,$$

$$K(X_i, X_j) = \frac{285}{270478} - \left(\frac{95}{2678}\right)^2 = -\frac{148295}{724340084}\,.$$

Sledi:

$$D(S) = 52 \cdot \frac{245385}{7171684} - 52 \cdot 51 \cdot \frac{148295}{724340084} = \frac{1324680}{1071509} \doteq 1{\cdot}236\,.$$

4. Najprimernejši je tu inverzijski (Wilcoxon–Mann–Whitneyjev) test. Najprej določimo vezane rnge, ki pripadajo posameznim vrstam (recimo, da štejemo od spredaj nazaj):

ZADAJ

	•	•	P	P	•	P	22·5
	P	P		P	P	•	17
•	•	P					13
	P	•		P	•	•	9
			•		P		5·5
	P	P		•		P	2·5

SPREDAJ

Asistent je poznal 14 študentov. Vsota njihovih rangov je:

$$3 \cdot 2\text{˙}5 + 1 \cdot 5\text{˙}5 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 13 + 4 \cdot 17 + 3 \cdot 22\text{˙}5 = 179\text{˙}5\,,$$

testna statistika pa je enaka:

$$Z = \sqrt{\frac{3}{14 \cdot 11 \cdot 26}}\,\big(2 \cdot 179\text{˙}5 - 14 \cdot 26\big) \doteq -0\text{˙}137\,,$$

kar je po absolutni vrednosti manjše od kritične vrednosti $z_{0.975} \doteq 1\text{˙}96$, zato ničelne hipoteze ne zavrnemo.

Alternativno bi lahko tudi oštevilčili vrstice in uporabili T-test, vendar tu predpostavka o normalni porazdelitvi številke vrstice ni izpolnjena in testna statistika bi prišla drugačna, če bi predzadnjo vrsto, ki je prazna, izpustili.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 27. 8. 2015

IŠRM

1. Možna poteka igre sta le dva: bodisi je imel Janko že na začetku dva dobitna žetona in potem nič več, bodisi je imel enega dobitnega v prvi igri, enega pa v drugi igri. Spodaj sta prikazana ustrezni gibanji števila žetonov skupaj z verjetnostma obeh potekov:

$$\begin{array}{ll} 2 \to 4 \to 0 & 0\text{'}4^2 \cdot 0\text{'}6^4 = 0\text{'}020736\,, \\ 2 \to 2 \to 2 \to 0 & \bigl(2 \cdot 0\text{'}4 \cdot 0\text{'}6\bigr)^2 \cdot 0\text{'}6^2 = 0\text{'}082944\,. \end{array}$$

Verjetnost, da sta bila med vsemi žetoni, ki jih je Janko stavil, natanko dva dobitna, je torej enaka:

$$0\text{'}020736 + 0\text{'}082944 = 0\text{'}10368\,.$$

Pogojna verjetnost, da je imel dva dobitna žetona v isti igri, pa je enaka:

$$\frac{0\text{'}020736}{0\text{'}10368} = 0\text{'}2\,.$$

2. Po Laplaceovi integralski formuli je verjetnost, da število grbov preseže $\frac{n}{2} + \sqrt{n}$, približno enaka:

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} + \sqrt{n} - 0\text{'}55\,n}{\sqrt{0\text{'}55 \cdot 0\text{'}45 \cdot n}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0\text{'}05\,\sqrt{n} - 1}{\sqrt{0\text{'}2475}}\right).$$

Da bo dana verjetnost dosežena ali presežena, bo torej moralo približno veljati $\Phi\left(\frac{0\text{'}05\,\sqrt{n} - 1}{\sqrt{0\text{'}2475}}\right) \geq 0\text{'}45$ oziroma približno $\frac{0\text{'}05\,\sqrt{n} - 1}{\sqrt{0\text{'}2475}} \geq 1\text{'}645$. Slednje je res pri $n \geq \left(\frac{1 + 1\text{'}645\sqrt{0\text{'}2475}}{0\text{'}05}\right)^2 \doteq 1316\text{'}47$. Zaokrožimo navzgor in dobimo, da je minimalno število metov približno 1320.

V resnici je najmanjše število metov, ki ustrezajo zahtevi, že 1315. Ne ustreza pa *vsako* število metov, ki je večje ali enako 1315: prvo število, od katerega naprej vsako število metov ustreza, je šele 1340. Nekaj točnih verjetnosti, kjer z G označimo število grbov:

$$\begin{aligned} n = 1314 &: \quad P(G > 693) \doteq 0\text{'}9471539 \\ n = 1315 &: \quad P(G > 693) \doteq 0\text{'}9502885 \\ n = 1316 &: \quad P(G > 694) \doteq 0\text{'}9476158 \\[1ex] n = 1338 &: \quad P(G > 705) \doteq 0\text{'}9524509 \\ n = 1339 &: \quad P(G > 706) \doteq 0\text{'}9498932 \\ n = 1340 &: \quad P(G > 706) \doteq 0\text{'}9528689 \end{aligned}$$

3. Označimo $S = X + Y$. Uporabimo formulo:

$$p_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y)\, p_X(s-y)\, \mathrm{d}y\,,$$

kjer je:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & ; -1 \le x \le 1 \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} 6y(1-y) & ; 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Torej je:

$$p_S(s) = 3 \int_{\substack{0 \le y \le 1 \\ -1 \le s-y \le 1}} y(1-y)\, \mathrm{d}y = 3 \int_{\max\{0,s-1\} \le y \le \min\{1,s+1\}} y(1-y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Ločimo pet možnosti.

- Če je $s \le -1$, je $\max\{0, s-1\} = 0 \ge \min\{1, s+1\} = s+1$, zato je $p_S(s) = 0$ (tudi iz zaloge vrednosti slučajnih spremenljivk X in Y je razvidno, da je vsota skoraj gotovo večja od -1).
- Če je $-1 \le s \le 0$, je $\max\{0, s-1\} = 0 \le \min\{1, s+1\} = s+1$, zato je $p_S(s) = 3 \int_0^{s+1} y(1-y)\, \mathrm{d}y = \dfrac{1 - 3s^2 - 2s^3}{2}$.
- Če je $0 \le s \le 1$, je $\max\{0, s-1\} = 0 \le \min\{1, s+1\} = 1$, zato je $p_S(s) = 3 \int_0^1 y(1-y)\, \mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}$.
- Če je $1 \le s \le 2$, je $\max\{0, s-1\} = s-1 \le \min\{1, s+1\} = 1$, zato je $p_S(s) = 3 \int_{s-1}^1 y(1-y)\, \mathrm{d}y = \dfrac{2s^3 - 9s^2 + 12s - 4}{2}$.
- Če pa je $s \ge 2$, je $\max\{0, s-1\} = s-1 \ge \min\{1, s+1\} = 1$, zato je $p_S(s) = 0$ (tudi iz zaloge vrednosti slučajnih spremenljivk X in Y je razvidno, da je vsota skoraj gotovo manjša od 2).

4. Označimo s θ (po ničelni domnevi isto) verjetnost, da na posameznem kovancu pade grb. To moramo najprej oceniti po metodi največjega verjetja. Pri posamezni peterici metov je verjetnost, da pade natanko k grbov, enaka:

$$p_k(\theta) := \binom{5}{k} \theta^k (1-\theta)^{5-k}\,.$$

Naše opažanje (statistika) pa sestoji iz frekvenc $N_0, \ldots, N_5$, ki povedo, pri koliko petericah je padlo ustrezno število grbov. Velja:

$$P(N_0 = n_0, N_1 = n_1, \ldots, N_5 = n_5) =$$
$$= \frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!\, n_5!} \big(p_0(\theta)\big)^{n_0} \big(p_1(\theta)\big)^{n_1} \big(p_2(\theta)\big)^{n_2} \big(p_3(\theta)\big)^{n_3} \big(p_4(\theta)\big)^{n_4} \big(p_5(\theta)\big)^{n_5}\,,$$

torej bo verjetje enako:

$$\begin{aligned}L(\theta) &= \frac{n!}{N_0!\,N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!\,N_5!}\times\\&\quad\times\big(p_0(\theta)\big)^{N_0}\big(p_1(\theta)\big)^{N_1}\big(p_2(\theta)\big)^{N_2}\big(p_3(\theta)\big)^{N_3}\big(p_4(\theta)\big)^{N_4}\big(p_5(\theta)\big)^{N_5}=\\&=\frac{n!}{N_0!\,N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!\,N_5!}\,1^{N_0}5^{N_1}10^{N_2}10^{N_3}5^{N_4}1^{N_5}\times\\&\quad\times\theta^{N_1+2N_2+3N_3+4N_4+5N_5}(1-\theta)^{5n-N_1-2N_2-3N_3-4N_4-5N_5}=\\&=\frac{n!}{N_0!\,N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!\,N_5!}\,1^{N_0}5^{N_1}10^{N_2}10^{N_3}5^{N_4}1^{N_5}\times\\&\quad\times\theta^{G}(1-\theta)^{5n-G},\end{aligned}$$

kjer smo z $G = N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + 5N_5$ označili skupno število grbov. Brž ko je $0 < G < 5n$, je verjetje odvedljivo, pri $\theta = 0$, pri $\theta = 1$ enako 0, pri $0 < \theta < 1$ pa strogo pozitivno. Zato bo maksimum dosežen v stacionarni točki. Logaritmirajmo:

$$\begin{aligned}\ln L(\theta) = \ln\left[\frac{n!}{N_0!\,N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!\,N_5!}\,1^{N_0}5^{N_1}10^{N_2}10^{N_3}5^{N_4}1^{N_5}\right]+\\\times\,G\ln\theta+(5n-G)\ln(1-\theta)\end{aligned}$$

in odvajajmo:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{G}{\theta} - \frac{5n-G}{1-\theta}\,.$$

Odvod je enak nič pri $\theta = \hat{\theta} := G/(5n)$. Ocena za θ je torej kar delež grbov. V našem primeru je $n = 3590$, $G = 9207$ in $\hat{\theta} \doteq 0\text{'}5129248$. Pričakovane frekvence so enake $\tilde{N}_k = n\,p_k(\hat{\theta})$. Tabela:

k	N_k	$\tilde{N}_k$
0	100	98'41801
1	524	518'20577
2	1080	1091'41497
3	1126	1149'33748
4	655	605'16700
5	105	127'45677

Testna statistika pride:

$$\chi^2 = \sum_{k=0}^{5}\frac{N_k-\tilde{N}_k}{\tilde{N}_k} \doteq 8\text{'}74\,.$$

Kritična vrednost pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ je $\chi^2_{0.95}(4) \doteq 9\text{'}49$, kar pomeni, da ne moremo reči, da so podatki neskladni z našo domnevo: dopustiti moramo možnost, da je študent pravilno metal kovance iste vrste, ki pa niso bili nujno pošteni.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 3. 2016

IŠRM

1. Označimo s H in K dogodka, da ima Hubert oziroma Kaspar na svoji desni belega viteza, S pa naj bo dogodek, da sta Hubert in Kaspar soseda.

a) Ko posedemo Huberta, so vsi preostali sedeži za Kasparja enako verjetni. Iskana verjetnost je torej enaka:

$$P(S) = \frac{2}{b+r-1}\,.$$

b) Ko posedemo Huberta, so vse možne razporeditve barv preostalih vitezov enako verjetne. Iskana verjetnost je torej enaka:

$$P(H) = \frac{b-1}{b+r-1}\,.$$

c) Če sta Hubert in Kaspar soseda, to pomeni, da mora biti vitez desno od njiju bel. Torej je:

$$P(H \cap K \mid S) = \frac{b-2}{b+r-2}\,.$$

Če pa nista soseda, gre za dve mesti in dobimo:

$$P(H \cap K \mid S^{\mathrm{c}}) = \frac{(b-2)(b-3)}{(b+r-2)(b+r-3)}\,.$$

Iskano verjetnost dobimo po izreku o polni verjetnosti:

$$\begin{aligned}
P(H \cap K) &= P(S)\,P(H \cap K \mid S) + P(S^{\mathrm{c}})\,P(H \cap K \mid S^{\mathrm{c}}) = \\
&= \frac{2}{b+r-1}\,\frac{b-2}{b+r-2} + \frac{b+r-3}{b+r-1}\,\frac{(b-2)(b-3)}{(b+r-2)(b+r-3)} = \\
&= \frac{(b-1)(b-2)}{(b+r-1)(b+r-2)}\,.
\end{aligned}$$

d) Iskano pogojno verjetnost dobimo iz Bayesove formule:

$$P(S \mid H \cap K) = \frac{P(S)\,P(H \cap K \mid S)}{P(S)\,P(H \cap K \mid S) + P(S)\,P(H \cap K \mid S)} = \frac{2}{b-1}\,.$$

2. a) Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \int_{-x/2}^{(1-x)/2} \frac{c}{1+x^2}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2(1+x^2)}\,.$$

Ker je $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$, je $c = 2/\pi$, torej:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,;$$

slučajna spremenljivka X ima torej standardno Cauchyjevo porazdelitev.

b) Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{2z-1}^{2z} \frac{2}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi}\big(\operatorname{arctg}(2z) - \operatorname{arctg}(2z-1)\big) = \\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-2z+4z^2} = \\
&= 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1-2z+4z^2)\,.
\end{aligned}$$

3. Označimo $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da je približno:

$$P(S_n < 300) \approx \Phi\left(\frac{300 - n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\,,$$

kjer je $E(X_1) = 1/2$ in $\sigma_1^2 = D(X_1) = 3/4$. Iskani pogoj bo torej izpolnjen približno takrat, ko bo:

$$\Phi\left(\frac{300 - n/2}{\sqrt{3n}/2}\right) \ge 0{\cdot}45$$

oziroma:

$$n + \Phi^{-1}(0{\cdot}45)\,\sqrt{3n} - 600 \le 0\,,$$

to pa je res za:

$$\begin{aligned}
\frac{-\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\sqrt{3} - \sqrt{3\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\big)^2 + 2400}}{2} &\le \sqrt{n} \le \\
&\le \frac{-\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\sqrt{3} + \sqrt{3\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\big)^2 + 2400}}{2}
\end{aligned}$$

oziroma:

$$n \le \left(\frac{-\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\sqrt{3} + \sqrt{3\big(\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\big)^2 + 2400}}{2}\right)^2 \doteq 534{\cdot}16\,,$$

torej za $n \le 534$.

4. Izvedemo prilagoditveni test hi kvadrat, kjer ničelna hipoteza trdi, da je bila anketa nepristranska. Testna statistika pride:

$$\chi^2 = 500\left[\frac{(0{\cdot}324 - 0{\cdot}305)^2}{0{\cdot}305} + \frac{(0{\cdot}502 - 0{\cdot}483)^2}{0{\cdot}483} + \frac{(0{\cdot}174 - 0{\cdot}212)^2}{0{\cdot}212}\right] \doteq 4{\cdot}37\,,$$

kar je manj od kritične vrednosti $\chi^2_{0.95}(2) \doteq 5{\cdot}99$. Ničelne hipoteze torej ne moremo zavrniti. Z drugimi besedami, ne moremo reči, da je bila anketa pristranska.

2013/14

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 12. 12. 2013

IŠRM

1. a) Za $i = 0, 1, 2, 3$ označimo s H_i dogodek, da se izmed preostalih treh javi i učencev, z A pa dogodek, da sta izmed prvih treh izbrana vsaj dva. Tedaj velja:

$$P(H_i) = \binom{3}{i} \cdot 0\text{˙}3^i \cdot 0\text{˙}7^{3-i}\,, \qquad P(A \mid H_i) = \frac{\binom{3}{2}\binom{i}{1} + \binom{3}{3}}{\binom{3+i}{3}} = \frac{6(3i+1)}{(i+1)(i+2)(i+3)}\,.$$

Po izreku o polni verjetnosti je:

$$P(A) = 0\text{˙}7^3 \cdot 1 + 3 \cdot 0\text{˙}7^2 \cdot 0\text{˙}3 \cdot 1 + 3 \cdot 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}3^2 \cdot \frac{7}{10} + 0\text{˙}3^3 \cdot \frac{1}{2} = 0\text{˙}9298\,.$$

b) $\dfrac{0\text{˙}7^3 \cdot 1}{0\text{˙}7^3 \cdot 1 + 3 \cdot 0\text{˙}7^2 \cdot 0\text{˙}3 \cdot 1 + 3 \cdot 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}3^2 \cdot \frac{7}{10} + 0\text{˙}3^3 \cdot \frac{1}{2}} \doteq 0\text{˙}369\,.$

2. Naj bo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Če je $X = n$, to pomeni, da je naš matematik uspešno vlekel natanko $(8-n)$-krat. Ločimo dve možnosti. Če je neuspešno vlekel iz levega žepa, je v $8-n$ uspešnih vlečenjih 5-krat vlekel iz levega in $(3-n)$-krat iz desnega žepa. To se lahko zgodi za $n = 0, 1, 2, 3$, verjetnost tega dogodka pa je $\binom{8-n}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-n} \cdot \frac{1}{3}$. Če pa je neuspešno vlekel iz desnega žepa, je v $8-n$ uspešnih vlečenjih $(5-n)$-krat vlekel iz levega in 3-krat iz desnega žepa. To se lahko zgodi za $n = 0, 1, \ldots 5$, verjetnost tega dogodka pa je $\binom{8-n}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3}$. Ob dogovoru, da je $\binom{m}{k} = 0$, brž ko je $k \notin \{0, 1, \ldots m\}$, torej velja:

$$P(X = n) = \binom{8-n}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-n} + \binom{8-n}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

oziroma:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{448}{6561} & \frac{644}{6561} & \frac{996}{6561} & \frac{1449}{6561} & \frac{1728}{6561} & \frac{1296}{6561} \end{pmatrix} \doteq$$
$$\doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0\text{˙}068 & 0\text{˙}098 & 0\text{˙}152 & 0\text{˙}221 & 0\text{˙}263 & 0\text{˙}198 \end{pmatrix}.$$

3. *Prvi način*: s kumulativno porazdelitveno funkcijo. Za $y \ge 0$ je:

$$\{Y \le y\} = \left\{2 - \sqrt{y} \le X \le 2 + \sqrt{y}\right\}, \quad \text{torej} \quad P(Y \le y) = \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Za $0 \le y \le 4$ je nadalje $2 - \sqrt{y} \ge 0$, torej:

$$P(Y \le y) = \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} 3\,e^{-3x}\,\mathrm{d}x = e^{-3(2-\sqrt{y})} - e^{-3(2+\sqrt{y})}\,,$$

medtem ko za $y > 4$ velja $2 - \sqrt{y} < 0$, torej:

$$P(Y \le y) = \int_0^{2+\sqrt{y}} 3\, e^{-3x}\, \mathrm{d}x = 1 - e^{-3(2+\sqrt{y})}\,.$$

Sledi:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \le 0 \\ e^{-3(2-\sqrt{y})} - e^{-3(2+\sqrt{y})} & ;\ 0 \le y \le 4 \\ 1 - e^{-3(2-\sqrt{y})} & ;\ y \ge 4 \end{cases}\,.$$

Drugi način: z gostoto. Odvod funkcija $x \mapsto (x-2)^2$ povsod obstaja in je enak $2(x-2)$, torej je enak nič za $x = 2$. To pomeni, da je odvod te funkcije v slučajni točki X enak nič z verjetnostjo nič. Za $y > 0$ ima enačba $(x-2)^2 = y$ rešitvi $x = 2 - \sqrt{y}$ in $x = 2 + \sqrt{y}$, zato je:

$$p_Y(y) = \frac{p_X\big(2 - \sqrt{y}\big)}{2\sqrt{y}} + \frac{p_X\big(2 + \sqrt{y}\big)}{2\sqrt{y}}$$

Vedno velja $p_X\big(2 + \sqrt{y}\big) = e^{-3(2+\sqrt{x})}$. Za $y < 4$ je $2 - \sqrt{y} > 0$, torej je tudi $p_X\big(2 - \sqrt{y}\big) = e^{-3(2-\sqrt{x})}$, medtem ko za $y > 4$ velja $p_X\big(2 - \sqrt{y}\big) = 0$.

Za $y < 0$ enačba $(x-2)^2 = y$ nima rešitve, osamljeni točki $y = 0$ in $y = 4$ pa lahko zanemarimo. Za gostoto lahko torej postavimo:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y < 0 \\ \dfrac{3}{2\sqrt{y}}\Big(e^{-3(2-\sqrt{y})} + e^{-3(2+\sqrt{y})}\Big) & ;\ 0 < y < 4 \\ \dfrac{3}{2\sqrt{y}}\, e^{-3(2-\sqrt{y})} & ;\ y > 4 \end{cases}\,.$$

Ni se težko prepričati, da ta gostota predstavlja isto porazdelitev kot kumulativna porazdelitvena funkcija iz prvega načina.

4. Ob dogovoru, da je $\binom{m}{k} = 0$, brž ko je $k \notin \{0, 1, \ldots m\}$, velja:

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{2^4}\left[\binom{2}{k-1}\binom{1}{l-1} + \binom{2}{k}\binom{1}{l}\right],$$

kar lahko prikažemo s porazdelitveno tabelo (skupaj z robnima porazdelitvama):

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	
$X=0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$
$X=1$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$
$X=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{8}$
$X=3$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Ker je npr. $P(X = 0, Y = 2) = 0$, medtem ko je $P(X = 0)\, P(Y = 2) = 1/32$, sta slučajni spremenljivki X in Y odvisni.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 20. 3. 2014

IŠRM

1. Velja $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, x^2 z)\, x^2\, \mathrm{d}x$. Za $z \le 0$ je to enako nič, za $z > 0$ pa je:

$$p_Z(z) = \int_0^{1/z} \frac{2x}{\pi(1 + x^2)}\, \mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = x^2$ dobimo:

$$p_Z(z) = \int_0^{1/z^2} \frac{1}{\pi(1 + t)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\,.$$

Sklep:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) & ; z > 0 \\ 0 & ; z \le 0 \end{cases}\,.$$

2. *Prvi način.* Velja $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$, kjer je:

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & ; \text{prva ploščica } \boxed{1} \text{ je bila odkrita} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,,$$

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & ; \text{druga ploščica } \boxed{1} \text{ je bila odkrita} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,,$$

$$Y_3 = \begin{cases} 1 & ; \text{tretja ploščica } \boxed{1} \text{ je bila odkrita} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,,$$

$$Y_4 = \begin{cases} 2 & ; \text{ploščica } \boxed{2} \text{ je bila odkrita} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,,$$

$$Y_5 = \begin{cases} 3 & ; \text{ploščica } \boxed{3} \text{ je bila odkrita} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}\,.$$

Zaradi simetrije je vsaka posamezna ploščica odkrita z verjetnostjo 1/2. Sledi $E(S) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4$.

Drugi način. Pišimo $X = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6$, kjer je Z_i vrednost i-te ploščice z leve, potem ko so že bile premešane, če je ta ploščica odkrita, sicer pa nič. Če s K označimo položaj ploščice $\boxed{\mathrm{S}}$, je i-ta ploščica odkrita natanko tedaj, ko je $K > i$. Ker je K porazdeljena enakomerno na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, je $P(K > i) = (6 - i)/6$.

Za $k \le i$ na dogodku $\{K = k\}$ velja $Z_i = 0$, torej je tudi $E(X \mid K = k) = 0$. Za $k > i$ pa ima pogojno na $\{K = k\}$ slučajna spremenljivka Z_i porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\,,$$

torej je $E(Z_i \mid K = k) = \frac{8}{5}$. Po izreku o polnem matematičnem upanju je:

$$E(Z_i) = \sum_{k=1}^{6} P(K = k)\, E(Z_i \mid K = k) = \frac{8}{5} \cdot \frac{6-i}{6} = \frac{4(6-i)}{15}\,.$$

Končno je:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{4(6-i)}{15} = 4\,.$$

Tretji način. Velja $X = U_1 + U_2 + U_3$, kjer je U_1 skupna vrednost odkritih enojk, U_2 skupna vrednost odkritih dvojk, U_3 pa skupna vrednost odkritih trojk. Porazdelitve teh slučajnih spremenljivk razberemo tako, da si npr. pri U_1 predstavljamo, da mešanje poteka tako, da med enojke na slepo postavimo $\boxed{\text{S}}$, nato pa še preostale ploščice, ki na porazdelitev ne vplivajo. Sledi, da je U_1 porazdeljena enakomerno na množici $\{0, 1, 2, 3\}$. Podobno je U_2 porazdeljena enakomerno na množici $\{0, 2\}$, U_3 pa enakomerno na množici $\{0, 3\}$. Sledi:

$$E(X) = \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 4\,.$$

Opomba. Same porazdelitve slučajne spremenljivke X tu ne potrebujemo, znaša pa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1/6 & 1/10 & 1/12 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/12 & 1/10 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

3. Za izračun matematičnega upanja pišimo:

$$E(X) = E\big[E(X \mid Y)\big] = 3\,E(Y) = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 6\,.$$

Disperzijo pa lahko izračunamo na vsaj dva načina.

Prvi način: neposredno. Velja:

$$\begin{aligned}
E(X^2 \mid Y) &= D(X \mid Y) + \big(E(X \mid Y)\big)^2 = 9Y^2 + Y + 1\,, \\
E(X^2) &= E\big[E(X^2 \mid Y)\big] = 9\,E(Y^2) + E(Y) + 1 = \\
&= 9\,D(Y) + 9\big(E(Y)\big)^2 + E(Y) + 1 = \\
&= 9 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 51\,, \\
D(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 15\,.
\end{aligned}$$

Drugi način: razcepimo na pojasnjeno in nepojasnjeno disperzijo. Pojasnjena disperzija je enaka:

$$D\big(E(X \mid Y)\big) = 9\,D(Y) = 12\,,$$

nepojasnjena disperzija pa je enaka:

$$E\big(D(X \mid Y)\big) = E(Y + 1) = 3\,.$$

Skupna disperzija pa je enaka:

$$D(X) = D\big(E(X \mid Y)\big) + E\big(D(X \mid Y)\big) = 15\,.$$

4. Pomagamo si z rodovnimi funkcijami. Če z G označimo rodovno funkcijo slučajne spremenljivke N, z H pa rodovno funkcijo slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$, velja:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^{k+1}}\, s^k = \frac{1}{4-3s}\,, \\ H(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}}\, s^k = \frac{1}{3-2s}\,. \end{aligned}$$

Rodovna funkcija slučajne vsote S pa je enaka:

$$G\big(H(s)\big) = \frac{3-2s}{9-8s} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{3}{9-8s}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8s}{9}\right)^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8s}{9}\right)^k .$$

Sledi:

$$\begin{aligned} P(S=0) &= \frac{1}{3}\,, \\ P(S=k) &= \frac{8^k}{12 \cdot 9^k}\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 9. 6. 2014

IŠRM

1. Če z S označimo Markov izkupiček, potem ko obrede vse avtomate, lahko pišemo:

$$S = I_1 X_1 + I_2 X_2 + \cdots + I_{100} X_{100}\,,$$

kjer je $I_k = 1$, če je Marko igral na k-tem avtomatu, sicer pa je $I_k = 0$; X_k je Markov izkupiček na k-tem avtomatu (namišljen, če Marko tam ni igral). Najprej izračunamo matematično upanje in disperzijo:

$$\begin{aligned} E(I_k X_k) &= E(I_k)\,E(X_k) = -\frac{1}{2}\,, \\ E(X_k^2) &= D(X_k) + \big(E(X_k)\big)^2 = 10\,, \\ E\big((I_k X_k)^2\big) &= E(I_k)\,E(X_k^2) = 5\,, \\ D(I_k X_k) &= E\big((I_k X_k)^2\big) - \big(E(I_k X_k)\big)^2 = \frac{19}{4}\,. \end{aligned}$$

Torej je $E(S) = -100/2 = -50$ in $D(S) = 100 \cdot 19/4 = 475$. Po centralnem limitnem izreku je:

$$P(S > 0) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{475}}\right) \doteq 0\text{'}011\,.$$

2. Iz logaritma gostote:

$$\begin{aligned} \ln p(x \mid \mu, \tau) &= \frac{\ln \tau}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} - \frac{3\ln x}{2} - \frac{\tau}{2x\mu^2}(x-\mu)^2 = \\ &= \frac{\ln \tau}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} - \frac{3\ln x}{2} - \frac{\tau x}{2\mu^2} + \frac{\tau}{\mu} - \frac{\tau}{2x} \end{aligned}$$

dobimo logaritem verjetja:

$$\begin{aligned} \ln L &= \frac{n\ln \tau}{2} - \frac{n\ln(2\pi)}{2} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{\tau}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{X_i} = \\ &= \frac{n\ln \tau}{2} - \frac{n\ln(2\pi)}{2} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{\tau}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n\tau}{\mu} - \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}\,. \end{aligned}$$

Odvajamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{\tau}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n\tau}{\mu^2} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} &= \frac{n}{2\tau} - \frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}\,. \end{aligned}$$

Ko izenačimo z nič, dobimo naslednji cenilki:

$$\hat{\mu} = \bar{X}\,, \qquad \hat{\tau} = \frac{n\bar{X}^2}{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 / X_k}\,, \tag{$*$}$$

ki sta cenilki po metodi največjega verjetja pod pogojem, da izmerjene vrednosti $X_1, \ldots X_n$ niso vse enake in da je v $(\hat{\mu}, \hat{\tau})$ res dosežen maksimum. Za slednje je dovolj videti, da je pri fiksnih izmerjenih vrednostih $X_1, \ldots X_n$, ki niso vse enake:

- za dovolj majhne μ odvod $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}$ pozitiven, za dovolj velike pa negativen, in sicer ne glede na τ;
- pri fiksnem $\mu > 0$ za dovolj majhne τ odvod $\frac{\partial \ln L}{\partial \tau}$ pozitiven, za velike pa negativen.

Oboje je očitno iz izrazov za $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}$ in $\frac{\partial \ln L}{\partial \tau}$. Dokazali smo, da v primeru, ko izmerjene vrednosti $X_1, \ldots X_n$ niso vse enake, cenilki iz $(*)$ ustrezata metodi največjega verjetja. Če pa so izmerjene vrednosti vse enake, recimo X, je pri $\mu = X$ logaritem verjetja strogo naraščajoč v τ in zato ni navzgor omejen. V tem primeru torej cenilka po metodi največjega verjetja ni definirana.

3. Smiselno je uporabiti T-test ali Wilcoxon–Mann–Whitneyjev test.

Pri T-testu izračunamo:
Ljubljančanov: 10, Novomeščanov: 8,
povprečni čas Ljubljančanov 0:46.456, povprečni čas Novomeščanov: 0:46.018,
$s \doteq 10\text{˙}79\,\mathrm{s}$, $T \doteq 0\text{˙}086$, $t_{0.975}(16) \doteq 2\text{˙}12$.
Hipoteze ne moremo zavrniti.

Pri Wilcoxon–Mann–Whitneyjevem testu pa je vsota rangov Ljubljančanov 80, vsota rangov Novomeščanov pa 91. Testna statistika (pri različici brez popravka za zveznost): $Z \doteq -1\text{˙}33$. Ker je $z_{0.975} \doteq 1\text{˙}96$, hipoteze tudi pri tem testu ne moremo zavrniti.

4. Vsota kvadratov rezidualov je:

$$Q = (5 - a - 4b)^2 + 2(3 - a - b)^2 + (3 - a)^2 + (1 - a)^2 + (6 - a - 4b)^2\,.$$

Po odvajanju dobimo:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 12a + 20b - 42\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial b} = 20a + 68b - 100\,.$$

Ko oboje postavimo na nič in rešimo sistem, dobimo cenilki za a in b:

$$\hat{a} = \frac{107}{52}\,, \qquad \hat{b} = \frac{45}{52}\,.$$

Iskana krivulja je torej $y = \frac{107}{52} + \frac{45}{52}\,x^2 \doteq 2\text{˙}058 + 0\text{˙}865\,x^2$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 16. 6. 2014

IŠRM

1. Označimo iskano slučajno spremenljivko z N. Ločimo naslednje primere:

- *Nihče ne zna sam rešiti naloge.* V tem primeru je očitno $N = 0$. Verjetnost tega dogodka je $0{\cdot}7^6 \doteq 0{\cdot}118$.
- *Vsaj eden od študentov na skrajni levi zna sam rešiti nalogo in nihče drug na ostalih štirih položajih je ne zna sam rešiti ter še enako za skrajno desno.* V tem primeru je $N = 4$. Verjetnost tega dogodka je $2 \cdot (1 - 0{\cdot}7^2) \cdot 0{\cdot}7^4 \doteq 0{\cdot}245$.
- *Preostali primeri*: nalogo zna sam rešiti bodisi vsaj eden od študentov na skrajni levi bodisi vsaj eden od študentov na skrajni desni bodisi vsaj eden od študentov v sredini. V tem primeru je $N = 6$, verjetnost tega dogodka pa je $1 - 0{\cdot}7^6 - 2 \cdot (1 - 0{\cdot}7^2) \cdot 0{\cdot}7^4 \doteq 0{\cdot}637$.

Sklep: $N \mathrel{\dot\sim} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0{\cdot}118 & 0{\cdot}245 & 0{\cdot}637 \end{pmatrix}$.

2. Izrazimo:

$$Y = \frac{1}{Z - \frac{1}{X}}$$

in odvajamo:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{\left(z - \frac{1}{x}\right)^2}$$

ali pa izračunamo:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{y=1/(z-1/x)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{\left(z - \frac{1}{x}\right)^2}\,.$$

Sledi:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, p\left(\frac{1}{z - \frac{1}{x}}\right) \frac{1}{\left(z - \frac{1}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\substack{x>0 \\ 1/(z-1/x)>0}} \frac{1}{x^2}\, e^{-1/x}\, e^{-z+1/x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Za $z \le 0$ je torej $p_Z(z) = 0$, za $z > 0$ pa je:

$$p_Z(z) = e^{-z} \int_{1/z}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = z\, e^{-z}\,.$$

Sklep:

$$p_Z(z) = \begin{cases} z\, e^{-z} & ;\ z > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

3. a) Najprej izračunamo:

$$K(X,Y) = r(X,Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 4\,,$$

nato pa še:

$$E(XY) = K(X,Y) + E(X)\,E(Y) = 4 + 2 \cdot 1 = 6\,.$$

b) Iz:

$$K(X, X + tY) = D(X) + t\,K(X,Y) = 4 + 4t$$

dobimo, da sta X in Y nekorelirani pri $t = -1$.

4. $\bar{X} = 77\dot{}7, \quad s \doteq 5\dot{}72, \quad \chi^2_{0.005}(9) \doteq 1\dot{}73, \quad \chi^2_{0.995}(9) \doteq 23\dot{}6.$
Interval zaupanja: $3\dot{}5 < \sigma < 13\dot{}1$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 27. 8. 2014

IŠRM

1. a) Iskana verjetnost je enaka:

$$\begin{aligned} p := \frac{1}{3}\Big[&0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}7 + 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}9 + \\ &+ 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}6 + 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}9 + \\ &+ 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}6 + 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}9\Big] = \\ = 0{\cdot}557\,. \end{aligned}$$

b) $\dfrac{1}{3p}\Big[0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}6 + 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}6\Big] \doteq 0{\cdot}312.$

2. a) Označimo $S := R^2$. Za $s > 0$ velja:

$$p_S(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} p_R\big(\sqrt{s}\big) = \frac{a}{2}\, e^{-s/2}\,,$$

medtem ko za $s \le 0$ lahko postavimo $p_S(s) = 0$. Slučajna spremenljivka S je torej porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(a/2)$.

b) Najprej poiščimo 95. centil slučajne spremenljivke S, ki ga označimo z $s_{0.95}$. Velja:

$$P(S \le s_{0.95}) = 1 - e^{-a s_{0.95}/2} = 0{\cdot}95\,,$$

od koder sledi:

$$s_{0.95} = -\frac{2}{a}\ln 0{\cdot}05 \doteq \frac{5{\cdot}99}{a}\,.$$

95. centil slučajne spremenljivke R pa je enak:

$$r_{0.95} = \sqrt{s_{0.95}} \doteq \frac{2{\cdot}45}{\sqrt{a}}\,.$$

3. Bilanca igralnice v posamezni igri ima porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} -34 & 0 & 2 \\ 1/37 & 18/37 & 18/37 \end{pmatrix}.$$

Recimo, da Berti odigra n iger. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z zgornjo porazdelitvijo in naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Iščemo take n, da bo veljalo $P(S_n > 0) \approx 0{\cdot}95$. Iz:

$$E(X_i) = \frac{2}{37} \quad \text{in} \quad D(X_i) = \frac{34^2 + 4 \cdot 18}{37} - \left(\frac{2}{37}\right)^2 = \frac{45432}{1369}$$

in centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S_n > 0) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(-\frac{\frac{2}{37}\,n}{\sqrt{\frac{45432}{1369}\,n}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(2\sqrt{\frac{n}{45432}}\right) \approx 0\text{˙}95\,.$$

Torej mora biti $2\sqrt{\dfrac{n}{45432}} \approx 1\text{˙}645$, kar je res za $n \approx 30735$.

4. Iz $z_1 = E(X) = a + \dfrac{1}{\lambda}$ in $z_2 = a^2 + \dfrac{2a}{\lambda} + \dfrac{2}{\lambda^2}$ dobimo cenilki:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\hat{z}_2 - \hat{z}_1^2}}\,, \quad \hat{a} = \hat{z}_1 - \sqrt{\hat{z}_2 - \hat{z}_1^2}\,,$$

kjer je kot običajno:

$$\hat{z}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{in} \quad \hat{z}_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}\,.$$

2012/13

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 14. 12. 2012

IŠRM

1. a) To pomeni, da ob obdarovanju velja ena od naslednjih treh možnosti:

- Gal si je želel medvedka, Nik avtomobilček in Tim kocke;
- Gal si je želel avtomobilček, Nik kocke in Tim medvedka;
- Gal si je želel kocke, Nik medvedka in Tim avtomobilček.

Verjetnost tega dogodka je enaka $0{.}4 \cdot 0{.}4 \cdot 0{.}3 + 0{.}4 \cdot 0{.}5 \cdot 0{.}1 + 0{.}2 \cdot 0{.}1 \cdot 0{.}6 = 0{.}08$.

b) $\dfrac{0{.}4 \cdot 0{.}4 \cdot 0{.}3}{0{.}08} \doteq 0{.}6$.

2. To pomeni, da nikoli ne zadenemo 20 točk, obenem pa manj kot 20-krat zadenemo eno točko. Verjetnost tega dogodka lahko zapišemo s formulo:

$$p = \sum_{k=0}^{19} \binom{50}{k} \cdot 0{.}3^k \cdot 0{.}5^{50-k},$$

ki jo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$p = 0{.}8^{50} \cdot \sum_{k=0}^{19} \binom{50}{k} \left(\frac{0{.}3}{0{.}8}\right)^k \left(\frac{0{.}5}{0{.}8}\right)^{50-k}$$

in opazimo, da je nova vsota natančno verjetnost, da je slučajna spremenljivka, porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(50, 0{.}3/0{.}8)$ manjša od 20. To pa lahko dobimo tudi tako, da opazimo, da je pogojno na dogodek, da nikoli ne zadenemo 20 točk, število točk porazdeljeno binomsko $\mathrm{Bin}(50, 0{.}3/0{.}8)$. Sledi:

$$p \approx 0{.}8^{50} \left[\Phi\left(\frac{19{.}5 - 50 \cdot 0{.}375}{\sqrt{50 \cdot 0{.}375 \cdot 0{.}625}}\right) + \frac{1}{2}\right] \doteq 8{.}374 \cdot 10^{-6}.$$

Točen rezultat: $8{.}437 \cdot 10^{-6}$.

3. Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti 2, 3, 4 ali 5. Ustrezne dogodke lahko ponazorimo z naslednjimi nizi:

$$\begin{array}{ll}
X = 2: & 1\searrow,\quad 2\searrow,\quad 3\searrow,\quad 4\searrow \\
X = 3: & 12\searrow,\quad 13\searrow,\quad 14\searrow,\quad 23\searrow,\quad 24\searrow,\quad 34\searrow, \\
X = 3: & 123\searrow,\quad 124\searrow,\quad 134\searrow,\quad 234\searrow, \\
X = 4: & 1234\searrow,
\end{array}$$

kjer puščica pomeni manjše ali enako število. Verjetnost posamezne skupine izidov je $k/4^n$, kjer je k zadnja številka pred puščico, n pa dolžina niza (s puščico vred). Sledi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{10}{16} & \frac{20}{64} & \frac{15}{256} & \frac{4}{1024} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{15}{256} & \frac{1}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{160}{256} & \frac{80}{256} & \frac{15}{256} & \frac{1}{256} \end{pmatrix}.$$

4. $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & ;\ z \leq 0 \\ \dfrac{2z^2}{5} & ;\ 0 \leq z \leq 1 \\ \dfrac{1+z^2}{5} & ;\ 1 \leq z \leq 2 \\ 1 & ;\ z \geq 2 \end{cases}, \quad p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{4z}{5} & ;\ 0 < z < 1 \\ \dfrac{2z}{5} & ;\ 1 < z < 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 29. 3. 2013

IŠRM

1. Iz izražave $Y = XZ$ sledi:

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, xz)\,|x|\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{x^2+x^2z^2\le 1} (1 - x^2 - x^2z^2)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-(1+z^2)^{-1/2}}^{(1+z^2)^{-1/2}} (1 - x^2 - x^2z^2)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi(1+z^2)}\,. \end{aligned}$$

Slučajna spremenljivka Z ima torej standardno Cauchyjevo porazdelitev.

2. Korelacijski koeficient je enak:

$$\begin{aligned} r(X,Y) &= \frac{E(XY) - E(X)\,E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}\sqrt{E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2}} = \\ &= \frac{P(A\cap B) - P(A)\,P(B)}{\sqrt{P(A) - \big(P(A)\big)^2}\sqrt{P(B) - \big(P(B)\big)^2}}\,, \end{aligned}$$

torej je:

$$\frac{4}{5} = \frac{P(A\cap B) - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{9}}}\,,$$

od koder sledi:

$$P(A\cap B) = \frac{1}{6} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{15} \doteq 0\text{˙}355\,.$$

3. Rodovna funkcija števila potomcev v prvi generaciji je:

$$G_1(s) = e^{\lambda(s-1)}\,,$$

rodovna funkcija števila potomcev posameznega potomca v prvi generaciji pa je:

$$G_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(1 - e^{-\lambda}\big)^k s^k}{k\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\ln\Big(1 - \big(1 - e^{-\lambda}\big)s\Big)\,.$$

Rodovna funkcija števila potomcev v drugi generaciji pa je:

$$G_1(G_2(s)) = e^{-\{\ln[1-(1-e^{-\lambda})s]+1\}} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - \big(1 - e^{-\lambda}\big)s} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\big(1 - e^{-\lambda}\big)^k s^k\,.$$

Če z S_2 označimo število potomcev v drugi generaciji, torej velja:

$$P(S_2 = k) = e^{-\lambda}\big(1 - e^{-\lambda}\big)^k\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

kar pomeni, da gre za geometrijsko porazdelitev $\mathrm{Geom}(e^{-\lambda})$, premaknjeno za ena v levo.

4. Iz:

$$E(X_i) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,, \qquad E(X_i^2) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,, \qquad D(X_i) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

sledi:

$$E(S) = 12\,, \qquad D(S) = 2\,.$$

Po centralnem limitnem izreku (ki je pri enakomerni porazdelitvi zelo natančen, zato ga lahko uporabimo tudi za majhno število seštevancev) velja:

$$P(S < x) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 12}{\sqrt{2}}\right)\,,$$

torej bo $\Phi\left(\frac{x-12}{\sqrt{2}}\right) \approx -0\text{˙}45$ oziroma $\frac{x-12}{\sqrt{2}} \approx -1\text{˙}645$ oziroma $x \approx 12 - 1\text{˙}645 \cdot \sqrt{2} \doteq 9\text{˙}67$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 13. 6. 2013

IŠRM

1. a) Glede na to, da je prvi moment enak $z_1 = E(X) = a + \frac{1}{2}$, je $b = e^{z_1 - 1/2}$. Iskana cenilka je torej:

$$\hat{b} = e^{\bar{X} - 1/2} = e^{(X_1 + \cdots + X_n)/n - 1/2}\,.$$

b) Velja:

$$\begin{aligned}
E(\hat{b}) &= e^{-1/2}\, E\Big[e^{X_1/n} e^{X_2/n} \cdots e^{X_n/n}\Big] = \\
&= e^{-1/2}\Big(E\big[e^{X/n}\big]\Big)^n = \\
&= e^{-1/2}\left(\int_a^{a+1} e^{x/n}\,\mathrm{d}x\right)^n = \\
&= e^{a-1/2}\Big(n\big(e^{1/n} - 1\big)\Big)^n\,.
\end{aligned}$$

Torej je:

$$\hat{b}' := \frac{e^{1/2}}{\Big(n\big(e^{1/n} - 1\big)\Big)^n}$$

nepristranska cenilka za b. Če označimo $k_n := \dfrac{e^{1/2}}{\Big(n\big(e^{1/n} - 1\big)\Big)^n}$, velja:

$$\lim_{n\to\infty} \ln k_n = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} n\Big(\ln n + \ln\big(e^{1/n} - 1\big)\Big)\,.$$

S substitucijo $x = 1/n$ in trikratno uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \lim \ln k_n &= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{\Big(\ln\big(e^x - 1\big) - \ln x}{x} = \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x}{e^x - 1 + x\,e^x} = \\
&= \frac{1}{2} - \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x + e^x}{(2 + x)e^x} = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Torej gredo korekcijski faktorji k_n proti 1, ko gre n proti neskončno.

2. $\bar{X} = 29{\cdot}64, \quad s \doteq 3{\cdot}152, \quad t_{0.995}(9) \doteq 3{\cdot}25.$
Interval zaupanja: $26{\cdot}40 < \mu < 32{\cdot}88$.

3. Najprej parameter pri geometrijski porazdelitvi $\mathrm{Geom}(p)$ ocenimo po metodi največjega verjetja. Za slučajno spremenljivko X, ki ima to porazdelitev, velja $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Če torej izmerimo n neodvisnih vrednosti $X_1, \ldots X_n$, je logaritem funkcije verjetja enak:

$$\ln L = n \ln p + (X_1 + \cdots + X_n - n) \ln(1-p)\,.$$

Ta izraz gre proti minus neskončno, če se p bliža bodisi 0 bodisi 1, zato bo maksimum dosežen tam, kjer bo odvod:

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}p} = \frac{n}{p} - \frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{1-p}$$

enak 0, to pa se zgodi, če je p enak:

$$\hat{p} = \frac{n}{X_1 + \cdots + X_n} = \frac{1}{\bar{X}}\,.$$

Za naše podatke dobimo $\hat{p} \doteq 0{\cdot}405$, teoretične frekvence pa pridejo:

vrednost	1	2	3	4	5	6
teo. frekvenca	40˙49	24˙09	14˙34	8˙53	5˙08	3˙02

vrednost	7	8	9	10	11	12	13	14
teo. frekvenca	1˙80	1˙07	0˙64	0˙38	0˙23	0˙13	0˙08	0˙05

Glede na to, da morajo biti teoretične frekvence vsaj 5, združimo vse razrede od vrednosti 6 naprej. Tako dobimo naslednjo tabelo:

vrednost	1	2	3	4	5	6 in več
frekvenca	52	17	11	6	6	8
teo. frekvenca	40˙49	24˙09	14˙34	8˙53	5˙08	7˙40

Vrednost testne statistike pride $\chi^2 \doteq 7{\cdot}11$, kar primerjamo s $\chi^2_{0.95}(4) \doteq 9{\cdot}49$. Ničelne hipoteze torej ne moremo zavrniti, odstopanja niso statistično značilna.

4. Za te podatke je najprimernejši test z znaki, saj delamo z urejenostno mersko lestvico in imamo na istih enotah izmerjeni obe vrednosti spremenljivke. Iz tabele razberemo, da je bilo 30 anketirancev po spremembi ponudbe bolj zadovoljnih, 4 pa so bili manj zadovoljni. Vrednost testne statistike pride:

$$\frac{30-4}{\sqrt{34}} \doteq 4{\cdot}46\,.$$

Po primerjavi z $z_{0.95} \doteq 1{\cdot}645$ sprejmemo alternativno hipotezo, da se je menza izboljšala.

Namesto tega testa bi lahko uporabili tudi inverzijski (Wilcoxon–Mann–Whitneyjev) test, čeprav bi z njim izgubili informacijo o izboljšanju oz. poslabšanju mnenja posameznih strank. Manj primeren pa je T-test, ker z njim anticipiramo številske vrednosti odgovorov.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 27. 6. 2013

IŠRM

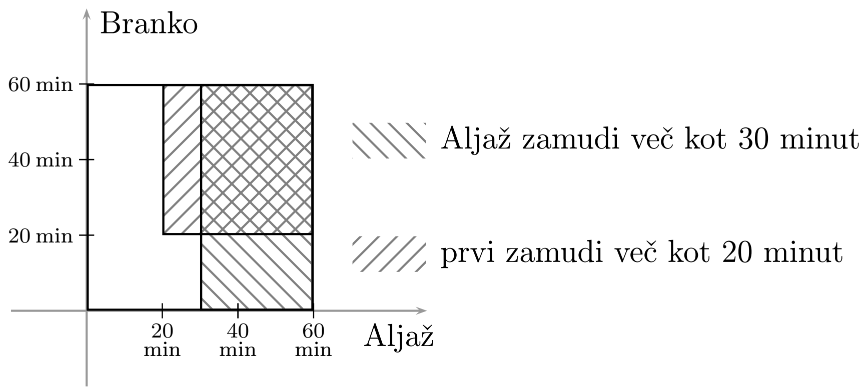
1. a) Če s T_A in T_B označimo Aljaževo oz. Brankovo zamudo, velja $\{T \le t\} = \{T_A \le t\} \cup \{T_B \le t\}$, torej je:

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(T_A \le t) + P(T_B \le t) - P(T_1 \le t, T_2 \le t) =$$
$$= \begin{cases} 0 & ; t \le 0 \\ 2t - t^2 & ; 0 \le t \le 1 \\ 1 & ; t \ge 1 \end{cases} .$$

Ta funkcija je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, zato je T zvezno porazdeljena in ima gostoto:

$$p_T(t) = \begin{cases} 2(1-t) & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

b) Dogodka sta prikazana na naslednji sliki:



Iskana pogojna verjetnost je enaka $\dfrac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \dfrac{3}{4}$.

2. Dopolnjena tabela:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=4$	Skupaj
$X=0$	1/40	1/20	3/40	1/20	1/5
$X=2$	1/20	1/10	3/20	1/10	2/5
$X=3$	1/20	1/10	3/20	1/10	2/5
Skupaj	1/8	1/4	3/8	1/4	1

Velja:

$$E(X) = 2\,, \quad D(X) = \frac{6}{5}\,,$$
$$E(Y) = 2\,, \quad D(Y) = \frac{7}{4}\,,$$
$$D(2X+Y) = 4\,D(X) + D(Y) = \frac{131}{20}\,.$$

3. Velja $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = a^2$, torej $E(S) = 0$ in $D(S) = 500a^2$. Po centralnem limitnem izreku je približno:

$$P(S > 1000) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1000}{a\sqrt{500}}\right),$$

kar mora biti enako 0˙05, torej mora biti $\Phi\left(\frac{1000}{a\sqrt{500}}\right) \approx 0\dot{}45$ oziroma $\frac{1000}{a\sqrt{500}} \approx 1\dot{}645$ oziroma $a \approx 27\dot{}2$.

Opomba. Verjetnosti $P(S > 1000)$ tu ni ustrezno interpretirati kot $P(S > 1000\dot{}5)$, saj S ne zavzame vrednosti na celoštevilski mreži, temveč na mreži z razponom a. Ker ne vemo, kako glede na to mrežo leži število 1000, popravek ni na mestu (v takih primerih v povprečju dobimo najnatančnejše rezultate, če popravka sploh ne uporabimo).

V resnici za $a \le 27.02702$ velja $P(S > 1000) < 0.0480523$, za $a \ge 27.02704$ pa velja $P(S > 1000) > 0.0525776$.

4. Izvedemo dvostranski inverzijski (Wilcoxon–Mann–Whitneyjev) test. Za ta namen tabelo najprej dopolnimo:

	do 20	21–40	41–60	61–80	81–100	101 +	Skupaj
Žalec	29	442	788	351	158	324	2092
Žiri	5	61	184	197	169	559	1175
Skupaj	34	503	972	548	327	883	3267
Rangi	1–34	35–537	538–1509	1510–2057	2058–2384	2385–3267	
Vezani rangi	17˙5	286˙0	1023˙5	1783˙5	2221˙0	2826˙0	

Vsota rangov stanovanj v mestnem območju Žalec: 2.825.988

Testna statistika pride $Z \doteq -22\dot{}89$. Ker je njena absolutna vrednost večja od $z_{0.975} \doteq 1\dot{}960$, hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 27. 8. 2013

IŠRM

1. a) Iz $\int_{-5}^{5}(5+t)\,\mathrm{d}t = \int_{-5}^{5}(5-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{10} x\,\mathrm{d}x = 50$ sledi $a = b = \dfrac{1}{50}$.
b) Dogodek, da oba vstopita še pred začetkom predavanja, je dogodek, da je $A < 0$ in $B < 0$. Zaradi neodvisnosti velja:

$$P(A<0, B<0) = \frac{1}{2500}\int_{-5}^{0}(5+t)\,\mathrm{d}t\int_{-5}^{0}(5-t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{16} = 0{\dot{}}1875\,.$$

c) Izračunati je treba $P(A < B \mid A < 0, B < 0) = \dfrac{P(A < B, A < 0, B < 0)}{P(A < 0, B < 0)}$. Velja:

$$\begin{aligned}
P(A<B, A<0, B<0) &= \frac{1}{2500}\iint_{\substack{-5<u,v<0\\ u<v}}(5+u)(5-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{2500}\iint_{\substack{0<x<5\\ 5<y<10\\ x+y<10}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2500}\int_{5}^{10} y\int_{0}^{10-y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{5000}\int_{5}^{10} y(10-y)^2\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{5000}\int_{0}^{5}(10-t)t^2\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{5}{96}\,.
\end{aligned}$$

Končno je torej $P(A < B \mid A < 0, B < 0) = \dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{5}{96} = \dfrac{5}{18} \doteq 0{\dot{}}278$.

2. Iz:

$$K(aX+bY+cZ, X+Y) = 3a+3b\,, \quad K(aX+bY+cZ, X-Y-2Z) = 3a-3b-6c$$

dobimo, da mora veljati $b = -a$, $c = a$. Takšni so torej večkratniki slučajne spremenljivke $X - Y + Z$.

3. Centralnega limitnega izreka ne moremo uporabiti neposredno na S, ker produkt slučajne spremenljivke X in normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, četudi neodvisne od X, ni nujno normalno porazdeljen. Prav tako centralni limitni izrek ne velja za vsoto $XY_1 + XY_2 + \cdots + XY_{100}$, saj so seštevanci odvisni (centralni limitni izrek se sicer da posplošiti tudi na vsote slučajnih spremenljivk z določeno vrsto odvisnosti, vendar pa je odvisnost prej omenjenih seštevancev premočna). Pravilno pa bo iskano verjetnost računati s pomočjo pogojnih verjetnosti glede na X. Če pišemo $T := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$, po izreku o polni verjetnosti velja:

$$\begin{aligned} P(S > 150) &= P(X = 1)\, P(S > 150 \mid X = 1) + P(X = 2)\, P(S > 150 \mid X = 2) = \\ &= \frac{2}{3}\, P(T > 150) + \frac{1}{3}\, P(T > 75)\,. \end{aligned}$$

Za slučajno spremenljivko T pa centralni limitni izrek velja: iz $E(T) = 100$ in $D(T) = 10000$ dobimo:

$$P(T > a) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a - 100}{100}\right),$$

torej je:

$$P(S > 150) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{4}\right) \doteq 0\text{˙}405\,.$$

Oglejmo si še, koliko bi znašala iskana verjetnost za normalno slučajno spremenljivko z enakim matematičnim upanjem in disperzijo kot S. Za ta namen izračunamo:

$$\begin{aligned} E(S) &= P(X = 1)\, E(S \mid X = 1) + P(X = 2)\, E(S \mid X = 2) = \\ &= \frac{2}{3}\, E(T) + \frac{1}{3} \cdot 2\, E(T) = \\ &= \frac{400}{3}\,. \end{aligned}$$

Nadalje je $E(T^2) = D(T) + \big(E(T)\big)^2 = 20000$ in zato:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= P(X = 1)\, E(S^2 \mid X = 1) + P(X = 2)\, E(S^2 \mid X = 2) = \\ &= \frac{2}{3}\, E(T^2) + \frac{1}{3} \cdot 4\, E(T^2) = \\ &= 40000\,, \\ D(S) &= E(S^2) - \big(E(S)\big)^2 = \frac{200000}{9} \end{aligned}$$

Za normalno slučajno spremenljivko bi bila torej iskana verjetnost enaka:

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{150 - 400/3}{100\sqrt{20}/3}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{20}}\right) \doteq 0\text{˙}455\,.$$

4. Uporabimo Wilcoxon–Mann–Whitneyjev test. Imamo 27 revij, ki realno dopuščajo objavo člankov iz verjetnosti, in 90 preostalih revij. Vsota rangov revij, ki realno dopuščajo objavo člankov iz teorije verjetnosti, je 2006. Testna statistika pride:

$$Z = \sqrt{\frac{3}{27 \cdot 90 \cdot 118}}\big(2 \cdot 2006 - 27 \cdot 118\big) \doteq 2\text{˙}67\,,$$

kar je večje od kritične vrednosti $z_{0.995} \doteq 2\text{˙}58$, zato ničelno hipotezo zavrnemo.

2011/12

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 9. 12. 2011

IŠRM

1. Označimo s H_i dogodek, da je žena odprla i-ti predal, z L dogodek, da je profesorjeva žena našla vsaj en list, z L_2 pa dogodek, da sta v predalu oba lista. Nadalje naj bo p_i verjetnost, da je profesor posamezen list založil v i-ti predal (torej $p_1 = 0{\cdot}6$, $p_2 = 0{\cdot}3$ in $p_3 = 0{\cdot}1$). Tedaj velja:

$$P(L_2 \mid L) = \frac{P(L_2)}{P(L)} = \frac{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\, P(L_2 \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\, P(L \mid H_i)}\,,$$

in nadalje:

$$P(H_i) = \frac{1}{3}\,, \qquad P(L \mid H_i) = 2p_i - p_i^2\,, \qquad P(L_2 \mid H_i) = p_i^2\,.$$

Ko to vstavimo v zgornjo formulo, dobimo $P(L_2 \mid L) \doteq 0{\cdot}299$.

2. Če z S označimo število prvorazrednih izdelkov, je $S \sim \mathrm{Bin}(400, 0{\cdot}2)$. Veljati mora $P(S \geq x) \geq 0{\cdot}95$. Po Laplaceovi integralski formuli je:

$$P(S \geq x) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - 400 \cdot 0{\cdot}2}{\sqrt{400 \cdot 0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}8}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x - 80{\cdot}5}{8}\right).$$

Torej približno velja:

$$x = \left\lfloor 80{\cdot}5 - 8 \cdot \Phi^{-1}(0{\cdot}45) \right\rfloor = \left\lfloor 80{\cdot}5 - 8 \cdot 1{\cdot}645 \right\rfloor = 67\,.$$

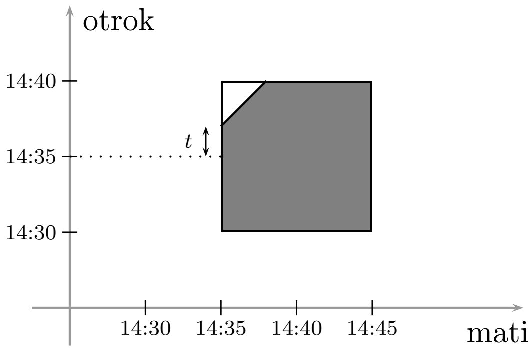
V resnici je $P(S \geq 67) \doteq 0{\cdot}9566512$ in $P(S \geq 68) \doteq 0{\cdot}9432189$.

3. $P(S = 0) = \dfrac{\binom{12}{2}}{\binom{16}{2}} = 0{\cdot}55, \quad P(S = 1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{12}{1}}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}2,$

$P(S = 2) = \dfrac{\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\binom{12}{1}}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}208, \quad P(S = 3) = \dfrac{\left[\binom{2}{1}\right]^2}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}033,$

$P(S = 4) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{16}{2}} \doteq 0{\cdot}008.$

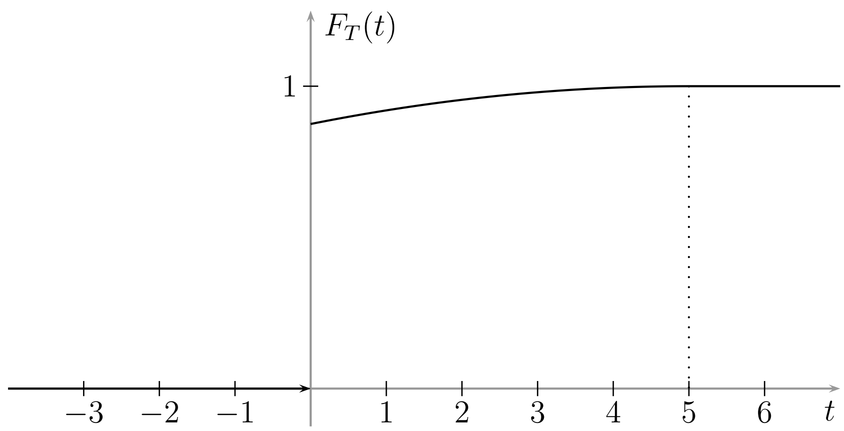
4. Očitno mati čaka otroka od 0 do 5 minut. Območje, kjer mati čaka največ t minut $(0 \leq t \leq 5)$, je prikazano na sliki:



Za $0 \leq t \leq 5$ bo torej $P(T \leq t) = 1 - \dfrac{(5-t)^2}{200} = \dfrac{175 + 10t - t^2}{200}$. Sledi:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t < 0 \\ (175 + 10t - t^2)/200 & ;\ 0 \leq t \leq 5 \\ 1 & ;\ t \geq 5 \end{cases} .$$

Graf:



Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 30. 3. 2012

IŠRM

1. *Prvi način*: za $y \geq 0$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\big)\,.$$

Ker X zavzame le vrednosti od -2 naprej, moramo ločiti dva primera. Za $0 \leq y \leq 4$ velja:

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x-2}\,\mathrm{d}x = e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2}\,,$$

za $y \geq 4$ pa:

$$F_Y(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} e^{-x-2}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\sqrt{y}-2}\,,$$

Če povzamemo, velja:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \leq 0 \\ e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2} & ;\ 0 \leq y \leq 4 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}-2} & ;\ y \geq 4 \end{cases}\,.$$

Drugi način: iz formule za transformacijo gostote sledi:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(p_X\big(-\sqrt{y}\big) + p_X\big(\sqrt{y}\big)\Big)\,.$$

Sledi:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(e^{\sqrt{y}-2} + e^{-\sqrt{y}-2}\Big) & ;\ 0 < y < 4 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\, e^{\sqrt{y}-2} & ;\ y > 4 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

Ni težko preveriti, da si kumulativna porazdelitvena funkcija iz prvega načina in gostota iz drugega načina ustrezata.

2. Velja:

$$\begin{aligned} D\big((X+Y)^2\big) &= E\big((X+Y)^4\big) - \Big[E\big((X+Y)^2\big)\Big]^2 = \\ &= E(X^4) + 4\,E(X^3)\,E(Y) + 6\,E(X^2)\,E(Y^2) + 4\,E(X)\,E(Y^3) + E(Y^4) - \\ &\quad - \Big[E(X^2) + 2\,E(X)\,E(Y) + E(Y^2)\Big]\,. \end{aligned}$$

Iz momentov:

$$E(X^k) = E(Y^k) = \int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k+1}$$

po nekaj računanja dobimo $D\big((X+Y)^2\big) = \dfrac{127}{180}$.

3. Če z S označimo število uspelih poskusov, lahko zapišemo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, kjer je:

$$X_i \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right),$$

slučajna spremenljivka N pa je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/2)$. Le-ta ima rodovno funkcijo:

$$G_1(s) = \frac{s}{2-s},$$

sumandi X_i pa imajo rodovno funkcijo:

$$G_2(s) = \frac{2+s}{3}.$$

Ker so sumandi neodvisni, ima vsota S rodovno funkcijo:

$$G_1(G_2(s)) = \frac{2+s}{4-s} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{s}{4} + \frac{s^2}{16} + \frac{s^3}{64} + \cdots\right),$$

torej je $P(S = 3) = 3/128 \doteq 0{\dot{}}0234$.

4. Pišimo:

$$\begin{aligned} P(S > 20) = {} & P(X_0 = -1)\, P(S > 20 \mid X_0 = -1) + P(X_0 = 0)\, P(S > 20 \mid X_0 = 0) + \\ & + P(X_0 = 2)\, P(S > 20 \mid X_0 = 2). \end{aligned}$$

Če označimo $T = X_1 + X_2 + \cdots X_{100}$, torej $S = X_0 T$, nadalje velja:

$$\begin{aligned} P(S > 20) &= \frac{1}{3}\, P(T < -20) + \frac{1}{6}\, P(T > 10) = \\ &= \frac{1}{3}\, P(-\infty < T < -20{\dot{}}5) + \frac{1}{6}\, P(10{\dot{}}5 < T < \infty). \end{aligned}$$

Ker je $E(X_i) = 0$, $D(X_i) = 1$ ter posledično $E(T) = 0$, $D(T) = 400$ in $\sigma(T) = 20$, iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 20) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{20{\dot{}}5}{20}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{10{\dot{}}5}{20}\right)\right) \doteq 0{\dot{}}1009.$$

Točen rezultat: $0{\dot{}}10049$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 22. 6. 2012

IŠRM

1. Označimo iskani dogodek z S. Le-ta se lahko zgodi na naslednje tri načine:

- Asistent ne premesti niti Aljaža niti Brigite. Naj bo to dogodek S_0.
- Asistent premesti Aljaža na Cvetovo mesto, Brigite pa ne premesti. Naj bo to dogodek S_1.
- Asistent premesti Aljaža na Brigitino mesto, Brigito na Cvetovo mesto in Cveta na Aljaževo mesto. Naj bo to dogodek S_2.

Verjetnostni prostor lahko razdelimo na $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ enako verjetne izide – glede na to, katere študente asistent izbere za premestitev in v katerem vrstnem redu. Vsak tak izid lahko torej ponazorimo z zaporedjem črk oblike xyz. Tako zaporedje si lahko predstavljamo kot povelje, naj gre x tja, kjer je bil prej y, y tja, kjer je bil prej z in z tja, kjer je bil prej x. Naj črka A označuje Aljaža, črka B Brigito, črka C Cveta, črke X, Y in Z katerega koli, ki ni Aljaž ali Brigita, črka W pa katerega koli, ki ni Aljaž, Brigita ali Cveto.

- Dogodek S_0 sestavljajo izidi oblike XYZ, ki jih je $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.
- Dogodek S_1 sestavljajo vsi izidi oblike ACW, WAC in CWA. Teh je $6 \cdot 3 = 18$.
- Dogodek S_2 pa sestavljajo izidi oblike ABC, BCA in CAB, ki so trije.

Iskani verjetnosti sta:

$$P(S) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) = \frac{210 + 36 + 3}{504} = \frac{231}{504} = \frac{11}{24} \doteq 0{\cdot}458\,,$$

$$P(S_1 \cup S_2 \mid S) = \frac{P(S_1) + P(S_2)}{P(S)} = \frac{18 + 3}{231} = \frac{21}{231} = \frac{1}{11} \doteq 0{\cdot}0909\,.$$

Opomba. Po trije in trije izidi, kot smo jih definirali, določajo enako premestitev. Tako bi lahko za izide vzeli tudi kar premestitve. Teh je $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3} = 2 \cdot \dbinom{9}{3} = 168$.

2. *Prvi način*: s kumulativno porazdelitveno funkcijo. Za $y < 0$ je očitno $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$, sicer pa je $F_Y(y) = P\big(1 - \sqrt{y} \le X \le 1 + \sqrt{y}\big)$. Sledi:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \le 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3} & ;\ 0 \le y \le 1 \\ \dfrac{1 + \sqrt{y}}{3} & ;\ 1 \le y \le 4 \end{cases} ,$$

kar je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva funkcija, zato je slučajna spremenljivka Y porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}} & ; 0 < y < 1 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}} & ; 1 \le y \le 4 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Drugi način: neposredno z gostoto. Za $y < 0$ očitno lahko postavimo $p_Y(y) = 0$, za $y > 0$ pa velja:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, p_X\big(1 - \sqrt{y}\big) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\, p_X\big(1 + \sqrt{y}\big)\,,$$

kjer je $p_X(x) = 1/3$, če je $0 < x < 3$, sicer pa je $p_X(x) = 0$. Seveda dobimo isto kot prej.

3. Označimo z S čas, ko podelijo nagrado. Ker je to vsota 10000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z isto porazdelitvijo, ki je eksponentna, je $E(S) = 10000 \cdot 8\text{˙}6000 = 86000$. Nadalje, ker je standardni odklon eksponentne slučajne spremenljivke enak matematičnemu upanju, je $\sigma(S) = \sqrt{10000} \cdot 8\text{˙}6000 = 860$. Iskana verjetnost je torej (približno) enaka:

$$P(S > 86400) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{86400 - 86000}{860}\right) \doteq \frac{1}{2} - \Phi(0\text{˙}465) \doteq 0\text{˙}321\,.$$

Točen rezultat: 0˙31999.

4. Iz teoretičnih frekvenc:

0.870	4.130
2.435	11.565
6.696	22.304

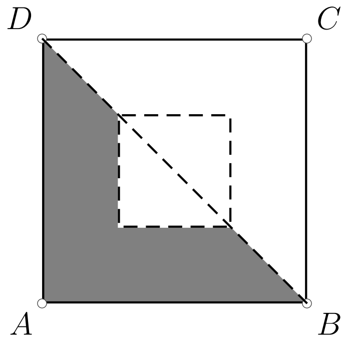
dobimo vrednost testne statistike $\chi^2 \doteq 1\text{˙}59$, kar je manj od kritične vrednposti $\chi^2_{0.95}(2) \doteq 5\text{˙}99$. Torej hipoteze ne zavrnemo. To pa bi morali storiti že potem, ko smo za kar nekaj teoretičnih frekvenc dobili premajhno vrednost (pod 5).

2010/11

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 23. 11. 2010

IŠRM

1. Ugodno območje je označeno na sliki:



in verjetnost želenega dogodka je razmerje ploščin, ki je enako $\dfrac{20}{49} \doteq 0{,}408$.

2. Označimo z I_C in I_V dogodka, da je izpolnjevalcu ime Cvetko oz. Vinko, s P_C in P_V pa dogodka, da se izpolnjevalec piše Cvetko oz. Vinko. Z I'_C in P'_V označimo dogodka, da izpolnjevalec navede ime Cvetko oz. priimek Vinko. Nadalje naj bo še Z dogodek, da se je izpolnjevalec zmotil. Tedaj velja:

$$
\begin{aligned}
P(Z \mid I'_\mathrm{C} \cap P'_\mathrm{V}) &= \frac{P(Z \cap I'_\mathrm{C} \cap P'_\mathrm{V})}{P(I'_\mathrm{C} \cap P'_\mathrm{V})} = \\
&= \frac{P(Z)\, P(I'_\mathrm{C} \cap P'_\mathrm{V} \mid Z)}{P(Z)\, P(I'_\mathrm{C} \cap P'_\mathrm{V} \mid Z) + P(\bar{Z})\, P(I'_\mathrm{C} \cap P'_\mathrm{V} \mid \bar{Z})} = \\
&= \frac{P(Z)\, P(I_\mathrm{V} \cap P_\mathrm{C})}{P(Z)\, P(I_\mathrm{V} \cap P_\mathrm{C}) + P(\bar{Z})\, P(I_\mathrm{C} \cap P_\mathrm{V})} = \\
&= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}00329 \cdot 0{,}00048}{0{,}1 \cdot 0{,}00329 \cdot 0{,}00048 + 0{,}9 \cdot 0{,}00075 \cdot 0{,}00011} \doteq \\
&\doteq 0{,}680\,.
\end{aligned}
$$

3. Označimo z x minimalno potrebno velikost predavalnice. Po Laplaceovi integralski formuli je x približno najmanjše celo število, za katerega velja:

$$
\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - 200 \cdot 0{,}8}{\sqrt{200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) < 0{,}05
$$

oziroma:

$$
\Phi\left(\frac{x - 159{,}5}{\sqrt{32}}\right) > 0{,}05\,.
$$

Torej približno velja $x = \lceil y \rceil$, kjer je y rešitev enačbe:

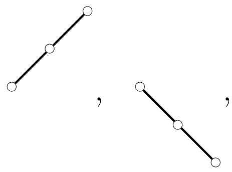
$$\Phi\left(\frac{y - 159{\cdot}5}{\sqrt{32}}\right) = 0{\cdot}45$$

in iz $y \doteq 168.80$ dobimo $x = 169$.

Dejansko je verjetnost, da bo prišlo (strogo) več kot 168 študentov, enaka $0{\cdot}0632$, da jih bo več kot 169, pa $0{\cdot}0430$. Torej je ocena $x = 169$ pravilna.

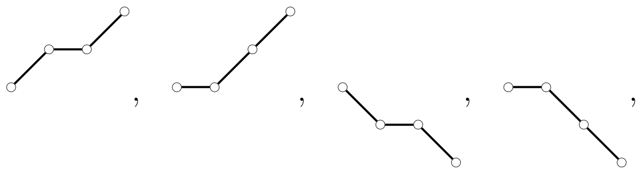
4. Slučajna spremenljivka N je lahko enaka $2, 3, 4$ ali 5. Dogodke, da je $N = 2, 3$ oziroma 4 bomo prikazali grafično z razliko med točkami obeh igralcev.

Dogodek, da je $N = 2$, ustreza potekoma igre:



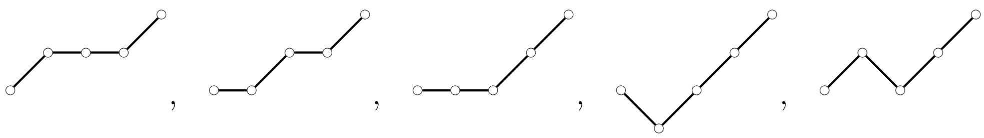
kar nam da $P(N = 2) = 0{\cdot}5^2 + 0{\cdot}3^2 = 0{\cdot}34$.

Dogodek, da je $N = 3$, ustreza potekom igre:

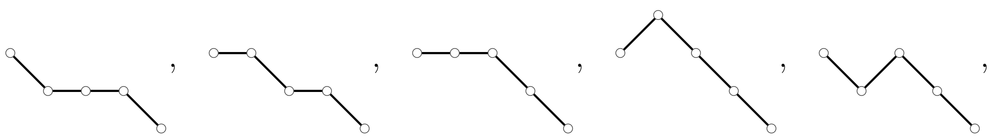


kar nam da $P(N = 3) = 2 \cdot (0{\cdot}5^2 + 0{\cdot}3^2) \cdot 0{\cdot}2 = 0{\cdot}136$.

Dogodek, da je $N = 4$, ustreza potekom igre:



in:



kar nam da $P(N = 4) = 3 \cdot (0{\cdot}5^2 + 0{\cdot}3^2) \cdot 0{\cdot}2^2 + 2 \cdot (0{\cdot}5^3 \cdot 0{\cdot}3 + 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}3^3) = 0{\cdot}1428$.

Končno izračunamo še $P(N = 5) = 1 - 0{\cdot}34 - 0{\cdot}136 - 0{\cdot}1428 = 0{\cdot}3812$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 3. 2. 2011

IŠRM

1. a) *Prvi način*: s pomočjo kumulativne porazdelitvene funkcije. Ker je vedno $Y \geq 0$, je za $y < 0$ očitno $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$. Za $y \geq 0$ pa velja:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(\sqrt{|X|} \leq y\big) = P(|X| \leq y^2) = P\ -y^2 \leq |X| \leq y^2) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-y^2}^{y^2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} y^2 \,.$$

Sledi:

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{4y}{\pi(1+y^4)} & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} \,.$$

Drugi način: z uporabo formule $p_Y(y) = \displaystyle\sum_{x;f(x)=y} \frac{p_X(x)}{|f'(x)|}$. Če postavimo $f(x) = \sqrt{|x|}$, za $y < 0$ enačba $f(x) = y$ ni rešljiva na x, torej je tam $p_Y(y) = 0$. Za $y > 0$ pa ima enačba dve rešitvi, $x = -x^2$ in $x = y^2$. Ker je $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ za $x > 0$ in $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ za $x < 0$, iz vsega skupaj dobimo:

$$p_Y(y) = p_X(-y^2) \cdot 2\sqrt{|-y^2|} + p_X(y^2) \cdot 2\sqrt{|y^2|} = \frac{4y}{\pi(1+y^4)} \,.$$

Dobljena gostota je seveda ista kot pri prvem načinu.

b) Ker je Y zvezno porazdeljena in je njena gostota na intervalu $(0, \infty)$ strogo pozitivna, drugje pa enaka nič, lahko nastavimo kar $F_Y(m) = \frac{1}{2}$, torej $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} m^2 = \frac{1}{2}$, torej $\operatorname{arctg}(m^2) = \frac{\pi}{4}$, torej $m^2 = 1$. Ker Y živi na $(0, \infty)$, mora biti $m = 1$.

2. Iz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x^4 y^5} + \frac{1}{x^5 y^4} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{c}{6} = 1$$

izračunamo $c = 6$. Nadalje je:

$$E(X) = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{1}{x^4 y^5} + \frac{1}{x^5 y^4} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{17}{12} \,,$$
$$E(X^2) = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^4 y^5} + \frac{1}{x^5 y^4} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{5}{2} \,,$$
$$D(X) = \frac{5}{2} - \left(\frac{17}{12} \right)^2 = \frac{71}{144}$$

in zaradi simetrije je tudi $E(Y) = 5/2$ in $D(Y) = 71/44$. Končno je:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 6 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \left(\frac{1}{x^4 y^5} + \frac{1}{x^5 y^4} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \,, \\
K(X,Y) &= 2 - \left(\frac{17}{12} \right)^2 = -\frac{1}{144} \,, \\
r(X,Y) &= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{71}{144} \cdot \frac{71}{144}}} = -\frac{1}{71} \doteq 0{\cdot}0141 \,.
\end{aligned}$$

3. Ker gre za povprečje veliko neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, lahko uporabimo centralni limitni izrek, zanj pa potrebujemo matematično upanje in disperzijo. Znano je, da je $E(X_i) = 1/\lambda$ in $D(X_i) = 1/\lambda^2$. Sledi $E(\bar{X}) = 1/\lambda$ in $D(\bar{X}) = 1/(n\lambda^2)$. Torej je:

$$P\big(\bar{X} > 1{\cdot}01 \, E(\bar{X})\big) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1{\cdot}01/\lambda - 1/\lambda}{\sqrt{1/(n\lambda^2)}} \right) = \frac{1}{2} - \Phi\big(0{\cdot}01\sqrt{n}\big) \,.$$

Za mejno vrednost števila n mora torej približno veljati $0{\cdot}01\sqrt{n} = \Phi^{-1}(0{\cdot}45) \doteq 1{\cdot}645$, od koder dobimo $n \doteq 27060{\cdot}25$. Torej bi rekli, da želena trditev velja za $n \geq 27061$.

Kot pokažejo natančnejši izračuni, pa mora biti v resnici $n \geq 27169$.

4. $\bar{X} = 113{\cdot}1$, $\quad s \doteq 12{\cdot}71$, $\quad SE \doteq 4{\cdot}021$, $\quad df = 9$, $\quad t_{0.995} \doteq 3{\cdot}25$, $\quad \Delta \doteq 13{\cdot}07$.
Interval zaupanja: $100{\cdot}0 < \mu < 126{\cdot}2$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 17. 2. 2011

IŠRM

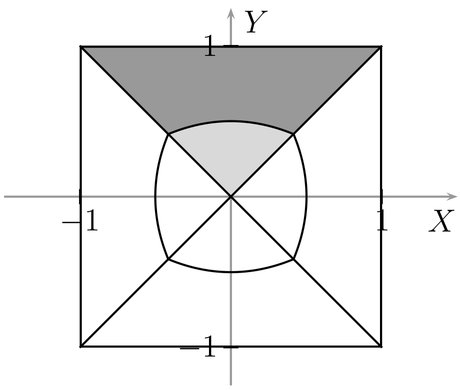
1. Označimo s H_i dogodek, da je Aleksander v prvih 7 dneh šel na avtobus natanko i-krat, z Z pa dogodek, da se Aleksander in Branka nista nikoli srečala. Tedaj velja:

$$
\begin{aligned}
P(H_0) &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}\,, & P(Z \mid H_0) &= 1\,,\\
P(H_1) &= \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120}\,, & P(Z \mid H_1) &= \frac{1}{2}\,,\\
P(H_2) &= \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{63}{120}\,, & P(Z \mid H_2) &= \frac{1}{4}\,,\\
P(H_3) &= \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120}\,, & P(Z \mid H_3) &= \frac{1}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Po Bayesovi formuli je:

$$
\begin{aligned}
&P(H_0 \mid Z) = \\
&= \frac{P(H_0)\,P(Z \mid H_0)}{P(H_0)\,P(Z \mid H_0) + P(H_1)\,P(Z \mid H_1) + P(H_2)\,P(Z \mid H_2) + P(H_3)\,P(Z \mid H_3)} = \\
&= \frac{8}{253} \doteq 0\text{˙}0316\,.
\end{aligned}
$$

2. Kvadrat razdelimo na štiri trikotnike z vrhovi v središču kvadrata in osnovnicami, ki se ujemajo s stranicami kvadrata (glej sliko). Zaradi simetrije je dovolj, če se omejimo na en sam trikotnik. Kvadrat postavimo v koordinatni sistem (X, Y), tako da se središče kvadrata ujema z izhodiščem koordinatnega sistema:



V zgornjem trikotniku bo tedaj točka bližje robu kot središču kvadrata (sivo) natanko tedaj, ko bo $1 - Y < \sqrt{X^2 + Y^2}$. Po ureditvi (in ob upoštevanju lege točke) dobimo, da je to natanko tedaj, ko je $Y > (1 - X^2)/2$. Mejna črta gre od točke $(-a, a)$ do točke (a, a), kjer je $a = 1/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.

Ploščina celega trikotnika je 1, ploščina ugodnega območja (temnosivo) in tudi verjetnost našega dogodka pa je enaka:

$$
\begin{aligned}
(1-a)^2 + \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{1 - x^2}{2}\right) \mathrm{d}x &= (1-a)^2 + \int_0^a (1 + x^2)\, \mathrm{d}x = \\
&= 1 - a + a^2 + \frac{a^3}{3} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3} \doteq 0\text{˙}781\,.
\end{aligned}
$$

3. Iz $E(U_i) = 1/2$, $E(U_i^2) = 1/3$, $E(V_i) = 4/3$, $E(V_i^2) = 2$ in neodvisnosti dobimo $E(X_i) = E(U_i)\,E(V_i) = 2/3$, $E(X_i^2) = E(U_i^2)\,E(V_i^2) = 2/3$ in $D(X_i) = 2/3 - (2/3)^2 = 2/9$. Sledi $E(S) = 200/3$ in zaradi neodvisnosti še $D(S) = 200/9$. Ker je S vsota velikega števila neodvisnih slučajnih spremenljivk, je po centralnem limitnem izreku:

$$
P(S < 60) \approx \Phi\left(\frac{60 - \frac{200}{3}}{\sqrt{\frac{200}{9}}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \Phi\big(\sqrt{2}\big) \doteq 0\text{˙}0787\,.
$$

Točen rezultat: 0˙07642.

4. Iz:

$$
P(X_i = x) = \binom{k-1}{2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{x-3} = \binom{k-1}{2} \frac{(\alpha - 1)^{x-3}}{\alpha^k}
$$

dobimo:

$$
\begin{aligned}
\ln L &= \ln L(x_1, \ldots x_n; \alpha) = \\
&= n \ln \binom{k-1}{2} + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 3n) \ln(\alpha - 1) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ln \alpha\,.
\end{aligned}
$$

Nadalje po odvajanju in ureditvi dobimo:

$$
\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 3n\alpha}{\alpha(\alpha - 1)}\,.
$$

Cenilka po metodi največjega verjetja bo torej:

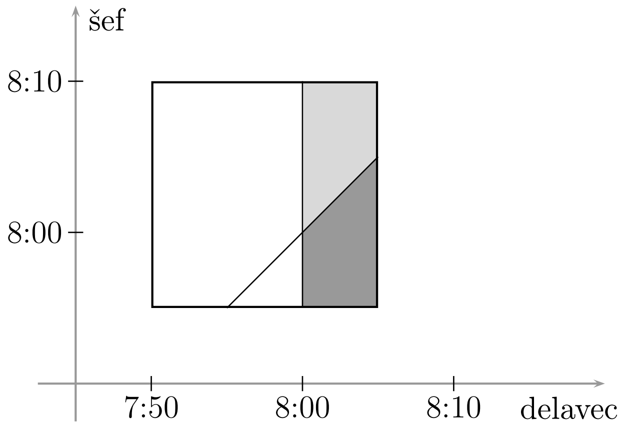
$$
\hat{\alpha} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{3n}\,.
$$

Ker je $E(X_i) = 3/\alpha$, je $E(\hat{\alpha}) = \alpha$, torej je cenilka nepristranska.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 30. 5. 2011

IŠRM

1. Verjetnostni prostor lahko prikažemo na naslednji sliki:



Označimo z A dogodek, da delavec pride po 8. uri, z B pa dogodek, da šef pride pred delavcem. Tedaj je s temnosivo barvo označen dogodek $A \cap B$. Velja:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6},$$

iskana verjetnost pa je enaka:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}.$$

2. $D(X) = D(Y) = \frac{1}{12}, \quad K(X, Y) = \frac{1}{24},$

$D(3X - Y) = 9\,D(X) - 6\,K(X, Y) + K(Y) = \frac{7}{12}.$

3. Ker sumand X_1 izstopa, ga moramo obravnavati posebej. Če z S' označimo vsoto preostalih, t. j. $S' = X_2 + X_3 + \cdots + X_{100}$, velja:

$$\begin{aligned} P(S < 40) &= P(X_1 = -1)\,P(S < 40 \mid X_1 = -1) + P(X_1 = 1)\,P(S < 40 \mid X_1 = 1) = \\ &= \frac{1}{3}\,P(S' < 50) + \frac{2}{3}\,P(S' < 30)\,. \end{aligned}$$

Ker slučajna spremenljivka S' zavzame vrednosti na lihih številih, meji za S' v zgornji formuli ležita točno na sredini med zaporednima vrednostma, kar je v povprečju najprimernejše za normalno aproksimacijo. Iz:

$$E(X_i) = \frac{1}{3}, \quad D(X_i) = \frac{8}{9}; \qquad E(S') = 33, \quad D(S') = 88$$

dobimo:

$$P(S < 40) \approx \frac{1}{3}\left[\Phi\left(\frac{50-33}{\sqrt{88}}\right) + \frac{1}{2}\right] + \frac{2}{3}\left[\Phi\left(\frac{30-33}{\sqrt{88}}\right) + \frac{1}{2}\right] \doteq 0\dot{}57138\,.$$

Točen rezultat: 0˙5695804.

Opomba. Če bi centralni limitni izrek uporabili neposredno na S, bi dobili približek 0˙692, kar precej odstopa od prave vrednosti.

4. $\bar{X} = 75, \quad s \doteq 3\dot{}742, \quad df = 8, \quad \chi^2_{0.025} \doteq 2\dot{}18, \quad \chi^2_{0.975} \doteq 17\dot{}5.$
Interval zaupanja: $2\dot{}52 < \sigma < 7\dot{}17$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 6. 9. 2011

IŠRM

1. Naj bo J dogodek, da strelja Janez, F pa dogodek, da strelja Lojze. Nadalje naj bodo Z_1, Z_2 in Z_3 dogodki, da strelec prvič, drugič oz. tretjič zadene. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}
P(Z_3 \mid Z_1 \cap Z_2) &= \frac{P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3)}{P(Z_1 \cap Z_2)} = \\
&= \frac{P(J)\,P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \mid J) + P(L)\,P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \mid L)}{P(J)\,P(Z_1 \cap Z_2 \mid J) + P(L)\,P(Z_1 \cap Z_2 \mid L)} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0\text{'}8^3 + \frac{1}{2} \cdot 0\text{'}3^3}{\frac{1}{2} \cdot 0\text{'}8^2 + \frac{1}{2} \cdot 0\text{'}3^2} \doteq \\
&\doteq 0\text{'}738\,.
\end{aligned}$$

2. *Prvi način.* Iz $X = YZ$ izračunamo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(yz, y)\,|y|\,\mathrm{d}y\,.$$

Za $z \le 0$ lahko vzamemo $p_Z(z) = 0$, za $z > 1$ pa velja:

$$p_Z(z) = \int_0^{\infty} y\,e^{-yz}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{z^2}\,.$$

Torej velja:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/z^2 & ;\ z > 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

Drugi način. Iz $Y = X/Z$ izračunamo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\left(x, \frac{x}{z}\right) \frac{|x|}{z^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tako kot prej sledi, da za $z \le 0$ lahko vzamemo $p_Z(z) = 0$, za $z > 1$ pa velja:

$$p_Z(z) = \frac{1}{z^2} \int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{z^2}$$

in rezultat je seveda isti kot prej.

3. Iz:

$$E(X_i) = 1\,, \quad D(X_i) = 2p\,, \quad E(S) = 100\,, \quad D(S) = 200p$$

in centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S < 90) \approx \Phi\left(\frac{89\text{'}5 - 100}{\sqrt{200p}}\right) + \frac{1}{2}$$

Torej bo $\Phi\left(\dfrac{10\text{'}5}{\sqrt{200p}}\right) \approx 0\text{'}45$ oziroma $\dfrac{10\text{'}5}{\sqrt{200p}} \approx 1\text{'}645$ oziroma $p \approx 0\text{'}204$.
Točen rezultat: 0'20414.

4. $\bar{X} = 29\text{'}85, \quad s \doteq 2\text{'}695, \quad df = 9, \quad t_{0.995} \doteq 3\text{'}25, \quad \Delta \doteq 2\text{'}77.$
Interval zaupanja: $27\text{'}08 < \sigma < 32\text{'}62$.

2009/10

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 18. 11. 2009

IŠRM

1. Čeprav naloga v resnici sprašuje po pogojni verjetnosti, jo brez težav prevedemo na brezpogojno verjetnost: verjetnostni prostor sestavljajo vse možne razporeditve vseh kart razen srčevega asa, za katerega vemo, kje je. Od tod naprej gremo lahko na vsaj dva načina.

Prvi način. Označimo z A dogodek, da iz drugega kupa izvlečemo prestavljenega srčevega asa, z B pa dogodek, da povlečemo dve srci. Tedaj velja:

$$P(A) = \frac{2}{9}\,, \qquad P(B \mid A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}\,,$$
$$P(\overline{A}) = \frac{7}{9}\,, \qquad P(B \mid \overline{A}) = \frac{13}{\binom{15}{3}} = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{35}$$

in iz izreka o popolni verjetnosti sledi:

$$P(B) = P(A)\,P(B \mid A) + P(\overline{A})\,P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{15}\,.$$

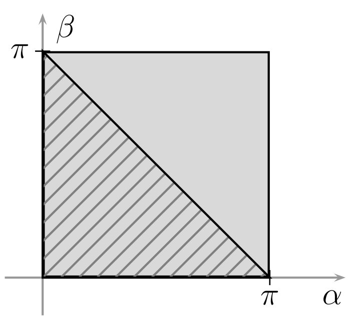
Drugi način. Za $i = 0, 1, 2, 3$ označimo s H_i dogodek, da je v drugem kupu poleg prestavljene karte še natanko i src, z B pa tako kot prej dogodek, da povlečemo dve srci. Tedaj velja:

$$P(H_i) = \frac{\binom{8}{i}\binom{7}{3-i}}{\binom{15}{3}} = \frac{\binom{3}{i}\binom{12}{8-i}}{\binom{15}{8}}\,, \quad P(B \mid H_i) = \frac{\binom{i+2}{2}}{\binom{9}{2}}$$

(med drugim je $P(B \mid H_0) = 0$). Spet po izreku o popolni verjetnosti velja:

$$P(B) = P(H_1)\,P(B \mid H_1) + P(H_1)\,P(B \mid H_2) + P(H_1)\,P(B \mid H_3) = \frac{1}{15}\,.$$

2. Označimo $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle ABC$ in $\gamma := \angle ACB$. Ker je vsota vseh treh kotov enaka π, bo kot γ manjši od $\pi/2$ natanko tedaj, ko bo $\alpha + \beta > \pi/2$. Območje, kjer to velja, je predstavljeno na naslednji skici:



Iz razmerja ploščin dobimo, da je verjetnost enaka $1/2$.

3. Označimo z N število ponesrečenih. Če premija znaša x evrov, ima zavarovalnica izgubo natanko tedaj, ko je $N > x$. Torej mora biti x najmanjše število, za katero je $P(N > x) < 0{\text{˙}}05$. Taka števila so nujno cela. Slučajna spremenljivka N je porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(1000, 1/500)$ in iz Poissonove aproksimacije dobimo:

$$P(N > 4) \approx 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) \doteq 0{\text{˙}}05265\,,$$
$$P(N > 5) \approx 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) \doteq 0{\text{˙}}01656\,.$$

Tudi točnih rezultatov ni težko dobiti:

$$P(N > 4) \doteq 0{\text{˙}}05247\,, \quad P(N > 5) \doteq 0{\text{˙}}01646\,.$$

Od tod zaključimo, da mora premija znašati najmanj 5 evrov.

4. Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Slučajna spremenljivka X je enaka k natanko tedaj, ko je izpolnjen eden izmed naslednjih dveh pogojev:

- v prvih $k - 1$ metih pade le od 3 do 6 pik, v k-tem metu pa padeta 2 piki;
- najprej v nekaj (lahko nič) metih pade od 3 do 6 pik, nato pade 1 pika, nakar v nekaj (lahko nič) metih pade od 2 do 6 pik, nazadnje pa v k-tem metu spet pade 1 pika.

Verjetnost tega dogodka lahko izračunamo na najmanj dva načina.

Prvi način. Neposredno, pri čemer v drugem primeru z i označimo število metov do nevključno prve enojke:

$$P(X = k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} + \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{4}{6}\right)^{i} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-i-2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}\,.$$

Torej je X porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/6)$.

Drugi način. Pri vseh metih od nevključno prve enojke naprej zamenjamo enojke in dvojke. Ker je kocka poštena, se verjetnosti ne spremenijo. Na ta način problem prevedemo na čakanje na prvo dvojko, torej mora biti X porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/6)$.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 1. 12. 2009

FRI–UNI

Soavtor: Peter Nose

1. Če z A označimo dogodek, da ima Pepe škisa, z B pa dogodek, da ni bilo nič sumljivega, velja:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{54} + \frac{6}{54} \cdot 0\text{˙}5}{1 - \frac{6}{54} \cdot 0\text{˙}2} = \frac{25}{88} \doteq 0\text{˙}284\,.$$

2. Označimo z A_1 število pik, ki so padle pri prvem metu, in z A_2 število pik, ki so padle pri drugem. Ker imamo 11 različnih izidov, mora biti $P(A_1 + A_2 = k) = 1/11$ za vse $k \in \{2, 3, \ldots, 12\}$. Če še s p_k označimo verjetnost dogodka, da na kocki pade natanko k pik, od tod sledi:

$$P(A_1 + A_2 = 2) = p_1^2 = \frac{1}{11}\,, \quad \text{torej} \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}$$
$$P(A_1 + A_2 = 3) = p_1 p_2 + p_2 p_1 = \frac{2p_2}{\sqrt{11}} = \frac{1}{11}\,, \quad \text{torej} \quad p_2 = \frac{1}{2\sqrt{11}}$$
$$P(A_1 + A_2 = 4) = p_1 p_3 + p_2^2 + p_3 p_1 = \frac{2p_3}{\sqrt{11}} + \frac{1}{44} = \frac{1}{11}\,, \quad \text{torej} \quad p_3 = \frac{3}{8\sqrt{11}}\,.$$

Podobno, če gledamo vsoto pik 12, 11 in 10, dobimo še:

$$p_6 = \frac{1}{\sqrt{11}}\,, \quad p_5 = \frac{1}{2\sqrt{11}}\,, \quad p_4 = \frac{3}{8\sqrt{11}}\,.$$

Toda vsota teh verjetnosti ni enaka 1 (enaka je $15/\big(4\sqrt{11}\big)$), zato takšna obtežitev kocke ne obstaja.

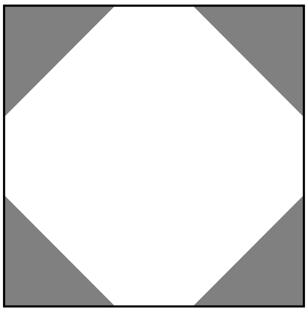
3. Navzkrižna in robni porazdelitvi:

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	
$X=-1$	0˙04	0˙06	0˙06	0˙04	0˙2
$X=0$	0˙08	0˙12	0˙12	0˙08	0˙4
$X=1$	0˙08	0˙12	0˙12	0˙08	0˙4
	0˙2	0˙3	0˙3	0˙2	1

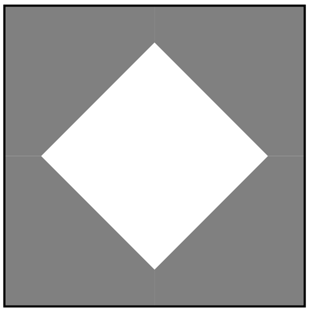
Pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $X - Y$ glede na $X^2 + Y^2 = 1$ lahko zapišemo s porazdelitveno shemo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} \end{pmatrix}.$$

4. Iz oblik dogodka, da je $M < m$, pri $0 \le m \le 1$ in $1 \le m \le 2$:



oziroma



ter razmerij ploščin razberemo kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$p_M(m) = \begin{cases} 0 & ; m \leq 0 \\ m^2/2 & ; 0 \leq m \leq 1 \\ (-m^2 + 4m - 2)/2 & ; 1 \leq m \leq 2 \\ 1 & ; m \geq 2 \end{cases}$$

in iz nje še porazdelitveno gostoto:

$$p_M(m) = \begin{cases} m & ; 0 \leq m \leq 1 \\ 2 - m & ; 1 \leq m \leq 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

5. a) Iz eksponentne porazdelitve razberemo, da ima življenjska doba posamezne varovalke gostoto:

$$p(v) = \begin{cases} 5e^{-5v} & ; v > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Zaradi neodvisnosti je potem gostota porazdelitve slučajnega vektorja (X, Y) enaka:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 25e^{-5x-5y} & ; x, y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

b) Velja $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2/5$.

6. a) Če z X označimo število grbov, iz Laplaceove integralske formule dobimo:

$$\begin{aligned} P(1764 < X < 1836) &= P(1764^{\cdot}5 < X < 1835^{\cdot}5) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{1835^{\cdot}5 - 3600 \cdot 0^{\cdot}5}{\sqrt{3600 \cdot 0^{\cdot}5 \cdot 0^{\cdot}5}}\right) - \Phi\left(\frac{1764^{\cdot}5 - 3600 \cdot 0^{\cdot}5}{\sqrt{3600 \cdot 0^{\cdot}5 \cdot 0^{\cdot}5}}\right) = \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{35^{\cdot}5}{30}\right) \doteq 0^{\cdot}763323 . \end{aligned}$$

Točen rezultat: $0^{\cdot}7633273$.

b) Če z n označimo število metov, spet iz Laplaceove integralske formule dobimo:

$$\begin{aligned} P(0^{\cdot}45n < X < 0^{\cdot}55n) &\approx \Phi\left(\frac{0^{\cdot}55\, n - 0^{\cdot}5\, n}{\sqrt{n \cdot 0^{\cdot}5 \cdot 0^{\cdot}5}}\right) - \Phi\left(\frac{0^{\cdot}45\, n - 0^{\cdot}5\, n}{\sqrt{n \cdot 0^{\cdot}5 \cdot 0^{\cdot}5}}\right) = \\ &= 2\Phi\big(0^{\cdot}1\sqrt{n}\big) = 0^{\cdot}997 . \end{aligned}$$

Iz tega in $0˙997/2 = 0˙4985 \doteq \Phi(2˙9677)$ razberemo, da je zahteva naloge izpolnjena približno za $n > 880˙7$, torej $n \geq 881$.

V resnici je prvo število metov, ki izpolnjuje zahtevo naloge, 871. Toda pozor, 872 zahteve naloge ne izpolnjuje! Prvo število metov, za katerega velja, da vsako večje ali enako število izpolnjuje zahteve naloge, je 888.

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 27. 1. 2010

IŠRM

1. Ker je Y diskretna slučajna spremenljivka, ki zavzema vrednosti iz $\mathbb{N}$, lahko uporabimo izrek o popolni verjetnosti:

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{X}{Y} > 1\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k)\, P\left(\frac{X}{Y} > 1 \,\middle|\, Y = k\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k)\, P\left(\frac{X}{k} > 1\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k)\, P(X > k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Phi(k)}{2^k}
\end{aligned}
$$

Zadostuje sešteti prva dva člena, rezultat je 0˙085.

2. Uporabimo lahko centralni limitni izrek v šibkejši ali močnejši različici.

- V močnejši različici ga lahko uporabimo z argumentom, da je S vsota slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots X_{100}, 2X_{101}, \ldots 2X_{200}$, ki jih je veliko, so neodvisne in nobena ne izstopa posebej.
- V šibkejši različici pa ga lahko uporabimo:
  - bodisi z argumentom, da je S vsota slučajnih spremenljivk $X_1 + 2X_{101}, \ldots, X_{100} + 2X_{200}$, ki jih je veliko, so neodvisne in enako porazdeljene;
  - bodisi z argumentom, da je S vsota slučajnih spremenljivk $X_1 + \ldots + X_{100}$ in $2X_{101} + \ldots + 2X_{200}$, ki sta obe vsoti veliko neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk ter zato približno normalni.

Iz:

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1\,, \\
E(X_i^2) &= \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2\,, \quad D(X_i) = 1
\end{aligned}
$$

izračunamo:

$$
E(S) = (100 + 100 \cdot 2) \cdot 1 = 300\,, \quad D(S) = (100 + 100 \cdot 2^2) \cdot 1 = 500\,.
$$

Sledi:

$$
P(S > 300) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{330 - 300}{\sqrt{500}}\right) \doteq 0˙0899\,.
$$

3. Iz funkcije verjetja:

$$L = 4 \ln a + 5 \ln b + \ln(1 - 2a - b)$$

in njenih parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{4}{a} - \frac{2}{1 - 2a - b}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{5}{b} - \frac{1}{1 - 2a - b}$$

dobimo oceno $\hat{a} = 0{\cdot}2$, $\hat{b} = 0{\cdot}5$. Ocenjena porazdelitev je torej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{\cdot}2 & 0{\cdot}2 & 0{\cdot}5 & 0{\cdot}1 \end{pmatrix}.$$

4. Označimo z z kvantil standardne normalne porazdelitve za verjetnost $0{\cdot}975$, z $n = 100$ velikost vzorca, s $\hat{p}$ pa standardno točkasto oceno za p, t. j. $\hat{p} = 0{\cdot}6$.

a) Po standardni približni metodi iz:

$$\Delta = \frac{z\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \doteq \frac{1{\cdot}96 \cdot \sqrt{0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}4}}{\sqrt{100}} \doteq 0.0961$$

(zaokroženo navzgor) dobimo interval zaupanja $0{\cdot}5039 < \Delta < 0{\cdot}6961$.

b) Hipoteze ne zavrnemo, če velja:

$$\frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} < z\,.$$

Za rešitev te neenačbe najprej opazimo, da gre izraz na levi proti neskončno, brž ko gre p_0 proti 0 ali 1. Nato rešimo ustrezno enačbo, ki je ekvivalentna enačbi:

$$\frac{n(\hat{p} - p_0)^2}{p_0(1-p_0)} = z^2$$

oziroma (za $0 < p_0 < 1$):

$$(n + z^2)p_0^2 - (2n\hat{p} + z^2)p_0 + np_0^2 = 0$$

Rešitvi sta:

$$p_0 = \frac{2n\hat{p} + z^2 \pm \sqrt{4n\hat{p}(1-\hat{p})z^2 + z^4}}{2(n + z^2)}$$

Hipoteze torej ne zavrnemo pri tistih p_0, ki ležijo med obema rešitvama. Zahtevana vrednost bo torej zgornja rešitev:

$$p_0 = \frac{2n\hat{p} + z^2 + \sqrt{4n\hat{p}(1-\hat{p})z^2 + z^4}}{2(n + z^2)} \doteq 0{\cdot}6906\,.$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 15. 1. 2010

FRI–UNI

Avtor: Peter Nose

1. a) Velja:

$$P(S_1 = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(S_1 = 4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$
$$P(S_1 = 2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \qquad P(S_1 = 5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$
$$P(S_1 = 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5},$$

torej je:

$$E(S_1) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{3}.$$

b) $E(K_1) = E(S_1) = \dfrac{7}{3}$.

c) Velja:

$$\begin{aligned} E(S_2 \mid S_1 = 2) &= \sum_{s=3}^{6} s \cdot P(S_2 = s | S_1 = 2) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 4{\cdot}5\,. \end{aligned}$$

d) Velja:

$$\begin{aligned} E(S_1 K_1) &= \sum_{s=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} s \cdot k \cdot P(S_1 = s, K_1 = k) = 2 \cdot \sum_{s=1}^{5} \sum_{k=s+1}^{5} s \cdot k \cdot P(S_1 = s, K_1 = k) \\ &= 2 \cdot \Bigg(1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \\ &\quad + 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \\ &\quad + 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \Bigg) = \\ &= \frac{217}{45} \doteq 4{\cdot}82\,, \end{aligned}$$

$$K(S_1, K_1) = E(S_1 K_1) - E(S_1)\, E(K_1) = \frac{217}{45} - \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{28}{45} \doteq -0{\cdot}62\,.$$

2. *Metoda momentov.* Pri tej metodi moramo vse neznane parametre izraziti z začetnimi momenti. Ker je populacija porazdeljena binomsko, vemo pa, da je matematično upanje binomske porazdelitve enako np, lahko takoj izračunamo prvi začetni moment $z_1 = E(X) = 5p$. Od tod sledi $p = z_1/5$ in $\hat{p} = \hat{z}_1/5 = \overline{X}/5$. Iz vzorca najprej izračunajmo povprečje:

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+4+3+2+3+4+3}{11} = \frac{34}{11}$$

in od tod vrednost cenilke $\hat{p} = 34/55 \doteq 0\text{˙}618$ za parameter p.

Metoda največjega verjetja. Pri tej metodi določimo parametre tako, da ima vzorec največjo verjetnost. Zato najprej s pomočjo vzorca izrazimo verjetje L.

$$\begin{aligned} L = {} & \left(\binom{5}{1} p^1 (1-p)^4\right)^1 \cdot \left(\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3\right)^2 \cdot \left(\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2\right)^4 \cdot \\ & \cdot \left(\binom{5}{4} p^4 (1-p)^1\right)^3 \cdot \left(\binom{5}{5} p^5 (1-p)^0\right)^1 \\ = {} & \binom{5}{1}^1 \binom{5}{2}^2 \binom{5}{3}^4 \binom{5}{4}^3 \binom{5}{5}^1 p^{34} (1-p)^{21} \\ = {} & \text{const} \cdot p^{34} (1-p)^{21} \,. \end{aligned}$$

Ker iščemo maksimum verjetja po parametru p, odvajamo $\log L$ po parametru p:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \log L &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\log \text{const} + \log p^{34} + \log (1-p)^{21}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\log \text{const} + 34 \log p + 21 \log (1-p)\right) = \\ &= 0 + \frac{34}{p} + \frac{21}{1-p}(-1) \,. \end{aligned}$$

Če obe strani zadnje enačbe množimo z $p(1-p)$, dobimo oceno $\hat{p} = 34/55 \doteq 0\text{˙}618$ za parameter p.

3. Uporabimo obrazec za interval zaupanja za μ pri znanem σ. Tako moramo izračunati:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{13+12+11+15+7+8+7+8+9}{9} = 10 \,, \\ c &= t_{(1+\beta)/2} = t_{(1+0.99)/2} = t_{0.995} \doteq 2\text{˙}58 \text{ pri } df = \infty \\ \Delta &= \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2\text{˙}58 \cdot 4}{\sqrt{9}} = 3\text{˙}44 \end{aligned}$$

(zaokroženo navzgor). Iskani interval zaupanja je torej $(\overline{X} - \Delta, \overline{X} + \Delta) =$ $= (6\text{˙}56, 13\text{˙}44)$.

4. Testiramo ničelno hipotezo $H_0 : \sigma^2 = 0\text{˙}1$ proti alternativni hipotezi $H_1 : \sigma^2 < 0\text{˙}1$

pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\dot{}1$. Velja:

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{5\dot{}7 + 6\dot{}2 + 6\dot{}4 + 5\dot{}8 + 6\dot{}2 + 5\dot{}9 + 5\dot{}7 + 6\dot{}1}{8} = 6 \\
(n-1)\cdot s^2 &= (5\dot{}7-6)^2 + (6\dot{}2-6)^2 + (6\dot{}4-6)^2 + (5\dot{}8-6)^2 + \\
&\quad + (6\dot{}2-6)^2 + (5\dot{}9-6)^2 + (5\dot{}7-6)^2 + (6\dot{}1-6)^2 = 0\dot{}48 \\
\chi^2 &= \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{0\dot{}48}{0\dot{}1} = 4\dot{}8\,.
\end{aligned}
$$

Kritično območje pri $\alpha = 0\dot{}1$ in $df = 8 - 1 = 7$ je $K_\alpha = [0, 2\dot{}83]$. Ker testna statistika ne pade v kritično območje, ničelne hipoteze ne zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 16. 2. 2010

IŠRM

1. $\dfrac{0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}8}{0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}8 + 0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}2} = \dfrac{14}{15} \doteq 0{\cdot}933.$

2. Lahko gremo najprej računat kar gostoto slučajne spremenljivke Z. Velja:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} \, \mathrm{d}x \, .$$

Za $z \le 0$ lahko postavimo $p_Z(z) = 0$, za $z > 0$ pa velja:

$$p_Z(z) = \int_{\sqrt{z}}^{\infty} \frac{cz^2 \, e^{-z}}{x^3} \, \mathrm{d}x = \frac{cz \, e^{-z}}{2} \, .$$

Nato iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_Z(z) \, \mathrm{d}z = \frac{c}{2} \int_0^{\infty} z \, e^{-z} \, \mathrm{d}z = \frac{c}{2}$$

izračunamo $c = 2$. Torej je:

$$p_Z(z) = \begin{cases} z \, e^{-z} & ; \, z > 0 \\ 0 & ; \, \text{sicer} \end{cases} \, .$$

3. Rezultat je 0, ker je vsota $X_1X_2 + X_1X_3 + \cdots + X_1X_{100}$ vselej enaka najmanj 9.900.

4. $\chi^2 = 9{\cdot}92, \quad \mathit{df} = 5, \quad K_\alpha = [11{\cdot}1, \infty).$
Hipoteze ne moremo zavrniti.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 6. 2010

IŠRM

1. Dogodke, kdo kaj naroči, označimo s črkami A, B, C in D glede na to, kdo naroči, in črkami t, k, p in b v indeksih glede na to, kaj naroči. Tako velja:

$$\begin{aligned} P(D_{\mathrm{b}} \mid B_{\mathrm{k}}) &= \frac{P(B_{\mathrm{k}} \cap D_{\mathrm{b}})}{P(B_{\mathrm{k}})} = \\ &= \frac{P(A_{\mathrm{t}} \cap B_{\mathrm{k}} \cap C_{\mathrm{p}}) + P(A_{\mathrm{p}} \cap B_{\mathrm{k}} \cap C_{\mathrm{t}})}{P(A_{\mathrm{t}} \cap B_{\mathrm{k}}) + P(A_{\mathrm{p}} \cap B_{\mathrm{k}}) + P(A_{\mathrm{b}} \cap B_{\mathrm{k}})} = \\ &= \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}} \doteq 0\text{˙}417. \end{aligned}$$

2. Slučajna spremenljivka Z lahko zavzame kvečjemu vrednosti med 0 in 1. Za $0 < z < 1$ je njena gostota enaka:

$$p_Z(z) = \int_0^\infty p(x)\, p\Big(\frac{x}{z} - x\Big) \frac{x}{z^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^2}{z^2} \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x/z} \,\mathrm{d}x = 1\,,$$

torej je slučajna spremenljivka Z porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$.

3. Označimo $S = X_2 + X_3 + \cdots + X_{100}$. Tedaj velja:

$$P(X_1 S < 1500) = 0\text{˙}6\, P(10S < 1500) + 0\text{˙}4\, P(11S < 1500)\,.$$

Zaradi neodvisnosti lahko uporabimo centralni limitni izrek. Za $i = 2, \ldots 100$ velja $E(X_i) = 1\text{˙}4$ in $D(X_i) = 0\text{˙}24$, od koder sledi $E(S) = 99 \cdot 1\text{˙}4 \doteq 138\text{˙}6$ in $D(S) = 99 \cdot 0\text{˙}24 \doteq 23\text{˙}76$. Torej približno velja:

$$\begin{aligned} P(X_1 S < 1500) &\approx 0\text{˙}6 \left[\Phi\left(\frac{150 - 138\text{˙}6}{\sqrt{23\text{˙}76}}\right) + \frac{1}{2}\right] + 0\text{˙}4 \left[\Phi\left(\frac{1500/11 - 138\text{˙}6}{\sqrt{23\text{˙}76}}\right) + \frac{1}{2}\right] \doteq \\ &\doteq 0\text{˙}6 \cdot \Phi(2\text{˙}339) - 0\text{˙}4 \cdot \Phi(0\text{˙}459) + \frac{1}{2} \doteq 0\text{˙}7235\,. \end{aligned}$$

Točen rezultat: 0.72619.

4. $\bar{X} \doteq 80\text{˙}0208$, $\bar{Y} \doteq 79\text{˙}9788$, $s \doteq 0\text{˙}0269$, $T \doteq 3\text{˙}47$, $df = 19$,
$K_\alpha = (-\infty, -2.87] \cup [2.87, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 1. 9. 2010

IŠRM

1. a) Označimo z A_z, B_z in C_z dogodke, da si je Andrej, Boris oz. Cveto zapomnil, v kateri škatli je nagrada, z A_o, B_o in C_o pa dogodke, da je Andrej, Boris oz. Cveto odkril nagrado.

Računali bomo verjetnost dogodka, da nihče ni odkril nagrade, t. j. dogodka $\overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}} \cap \overline{C_\mathrm{o}}$. To bomo izračunali z zaporednimi pogojnimi verjetnostmi. Očitno je $A_\mathrm{o} = A_\mathrm{z}$, torej je $P(\overline{A_\mathrm{o}}) = 0{\cdot}7$. Izračunajmo zdaj $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}})$. Če niti Andrej niti Boris nista odkrila nagrade, to pomeni, da si Boris ni zapomnil, kje je nagrada. Torej lahko pišemo $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}}) = P(\overline{B_\mathrm{z}} \mid \overline{A_\mathrm{o}})\, P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{z}})$. Zaradi neodvisnosti je $P(\overline{B_\mathrm{z}} \mid \overline{A_\mathrm{o}}) = P(\overline{B_\mathrm{z}}) = 0{\cdot}8$. Končno opazimo, da lahko v primeru, če Andrej ni odkril nagrade, Boris pa si ni zapomnil, kje je, Boris odkrije nagrado le v primeru, če je imel v mislih isto škatlo kot Andrej in je potem na slepo odkril pravo škatlo. Sledi $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{z}}) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ in posledično $P(\overline{B_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}}) = 0{\cdot}8 \cdot \bigl(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\bigr)$. Podobno dobimo $P(\overline{C_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}}) = 0{\cdot}4 \cdot \bigl(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\bigr)$. Verjetnost, da igralci odkrijejo nagrado, je tako enaka:

$$1 - 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}8 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 0{\cdot}4 \cdot \left(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\right) = 0{\cdot}825\,.$$

b) Iskana pogojna verjetnost je:

$$\begin{aligned}
P(C_\mathrm{o} \mid A_\mathrm{o} \cup B_\mathrm{o} \cup C_\mathrm{o}) &= \frac{P(\overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}} \cap C_\mathrm{o})}{P(A_\mathrm{o} \cup B_\mathrm{o} \cup C_\mathrm{o})} = \\
&= \frac{P(\overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}})\bigl(1 - P(\overline{C_\mathrm{o}} \mid \overline{A_\mathrm{o}} \cap \overline{B_\mathrm{o}})\bigr)}{P(A_\mathrm{o} \cup B_\mathrm{o} \cup C_\mathrm{o})} = \\
&= \frac{0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}8 \cdot \bigl(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\bigr) \cdot \Bigl(1 - 0{\cdot}4 \cdot \bigl(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\bigr)\Bigr)}{1 - 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}8 \cdot \bigl(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\bigr) \cdot 0{\cdot}4 \cdot \bigl(1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\bigr)} \doteq \\
&\doteq 0{\cdot}294\,.
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}K(X, XY) &= E(X^2 Y) - E(X)\,E(XY) = E(X^2)\,E(Y) - \bigl(E(X)\bigr)^2\,E(Y) = \\ &= D(X)\,E(Y) = \frac{1}{24} \doteq 0{\cdot}0417.\end{aligned}$$

3. Ker gre za vsoto veliko neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, lahko uporabimo centralni limitni izrek. Iz $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = 2a$ dobimo $E(S) = 0$ in $D(S) = 2000a$. Sledi:

$$P(S > 20) = P(S > 20{\cdot}5) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{20{\cdot}5}{\sqrt{2000a}}\right).$$

Neenakost $P(S > 20) \geq \dfrac{1}{4}$ torej velja približno za $\Phi\left(\dfrac{20{\text{˙}}5}{\sqrt{2000a}}\right) \leq \dfrac{1}{4}$ oziroma $\dfrac{20{\text{˙}}5}{\sqrt{2000a}} \geq 0{\text{˙}}6745$ oziroma $a \geq 0{\text{˙}}462$ (zaokroženo navzgor). Približni interval, na katerem velja neenakost, je torej $[0{\text{˙}}462, 0{\text{˙}}5]$.

Če ne upoštevamo popravka s polovičko, dobimo $[0{\text{˙}}440, 0{\text{˙}}5]$.

V resnici neenakost velja za $a \in [0{\text{˙}}46174, 0{\text{˙}}5]$, za $a = 0{\text{˙}}46173$ pa ne velja več.

4. Iz teoretičnih frekvenc:

1	2	3	4	> 4
50	25	12˙5	6˙25	6˙25

dobimo $\chi^2 \doteq 8{\text{˙}}72$. Iz $df = 4$ dobimo kritično območje $[9.49, \infty)$, torej hipoteze ne moremo zavrniti.

2008/09

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 19. 11. 2008

IŠRM

1. a) Označimo s H_1 dogodek, da je druga nogavica iste barve kot prva, s H_2 pa dogodek, da je drugačne barve. Tedaj velja:

$$P(H_1) = 0\text{˙}7 + 0\text{˙}3 \cdot \frac{3}{7}\,, \qquad P(H_2) = 0\text{˙}3 \cdot \frac{4}{7}\,.$$

Označimo z A dogodek, da Pepček prinese, tako kot mu je bilo naročeno. Tedaj velja:

$$P(A \mid H_1) = \frac{1 + \binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} \qquad P(A \mid H_2) = \frac{3^2}{\binom{6}{2}}$$

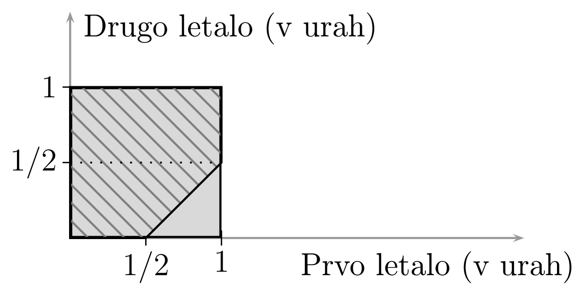
in po izreku o popolni verjetnosti izračunamo:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A \mid H_1) + P(H_2)\,P(A \mid H_2) \doteq 0\text{˙}490\,.$$

b) Po Bayesovi formuli izračunamo:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\,P(A \mid H_2)}{P(A)} \doteq 0\text{˙}210\,.$$

2. Zamudi obeh letal ponazorimo s točko v koordinatnem sistemu. Tako dobimo enakomerno porazdelitev na kvadratu s stranico 1 ura, ugodni izidi pa so prikazani na naslednji skici:



Iz ploščine dobimo, da je verjetnost enaka 7/8.

3. Označimo s k število sedežev v predavalnici, z S pa število študentov, ki bodo prišli na kolokvij. Po Laplaceovi integralski formuli mora veljati:

$$P(S > k) = P\big(k + \tfrac{1}{2} < S < \infty\big) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - 120}{\sqrt{200 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}4}}\right)\,.$$

Desna stran je enaka 0˙05 pri $k \doteq 130\text{˙}9$, torej bi moralo biti 131 sedežev dovolj. Tudi v resnici je (do zaokrožitvenih napak) točna verjetnost, da bo prišlo več kot 131 študentov, enaka 0˙0475, medtem ko je verjetnost, da bo prišlo več kot 130 študentov, enaka 0˙0639.

4. Iz:

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4a^3}{3} = 1$$

izračunamo $a = \sqrt[3]{3/4}$. Nadalje za $0 \leq y \leq a^2$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2a^2\sqrt{y} - \frac{2}{3}\,y^{3/2}\,.$$

Torej je:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\,\sqrt{y} - \frac{2}{3}\,y^{3/2} & ;\ 0 \leq y \leq \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \\ 1 & ;\ y \geq \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \end{cases}\,.$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 23. 1. 2009

IŠRM

1. *Prvi način*: iz izražave $Y = X/Z$ za $z \neq 0$ dobimo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\left(x, \frac{x}{z}\right) \left|\frac{x}{z^2}\right| \, \mathrm{d}x \, .$$

Ko vstavimo gostoto, pri čemer upoštevamo, da se pogoj $0 \le Y \le 1$ pozna pri mejah, dobimo:

$$p_Z(z) = \frac{1}{z^2\sqrt{2\pi}} \int_0^z x\, e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-z^2/2}}{z^2\sqrt{2\pi}} \, .$$

Za $z = 0$ lahko predpišemo kar koli. Če recimo postavimo $p_Z(0) := 1/\big(2\sqrt{2\pi}\big)$, dosežemo, da je gostota zvezna.

Drugi način: iz izražave $X = YZ$ dobimo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(yz, y)|y| \, \mathrm{d}y \, .$$

Ko vstavimo gostoto, dobimo:

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-y^2z^2/2} \, \mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-z^2/2}}{z^2\sqrt{2\pi}} & ; z \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} & ; z = 0 \end{cases} .$$

2. Velja $E(X_i) = 2$ in $D(X_i) = 2{\cdot}8$, od koder dobimo $E(S) = 1000$ in $D(S) = 1400$. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da mora približno veljati:

$$P(S < 950) = P(949{\cdot}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{50{\cdot}5}{\sqrt{1400}}\right) \doteq 0{\cdot}08856 \, .$$

Točen rezultat: $0{\cdot}088340$.

3. a) Iz $E(X_i) = a$ izračunamo $E\big(\hat{a}(k)\big) = kna$, od koder dobimo, da je cenilka nepristranska za $k = 1/n$. To je opazljiva količina (neodvisna od neznanega parametra a), zato res dobimo cenilko.

b) Računamo po formuli $q\big(\hat{a}(k)\big) = D\big(\hat{a}(k)\big) + B\big(\hat{a}(k)\big)^2$. Iz $D(X_i) = a^2$ dobimo $D\big(\hat{a}(k)\big) = k^2na^2$, iz $E\big(\hat{a}(k)\big) = kna$ pa dobimo $B\big(\hat{a}(k)\big) = a(kn - 1)$. Sledi:

$$q\big(\hat{a}(k)\big) = a^2(k^2n + k^2n^2 - 2kn + 1) \, ,$$

kar je najmanjše pri $k = 1/(n + 1)$.

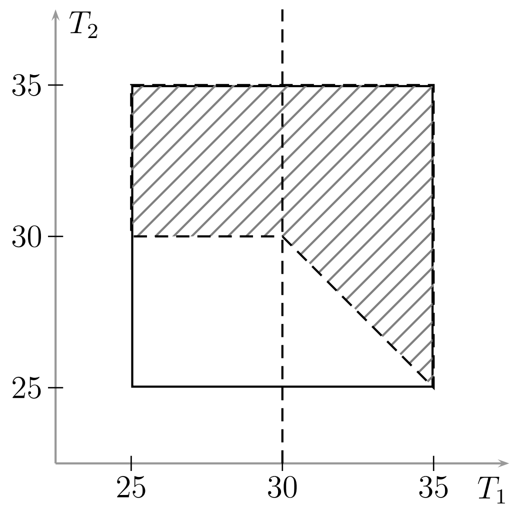
Cenilka, pri kateri je srednja kvadratična napaka najmanjša, je torej pristranska.

4. $\bar{X} = 52$, $\quad \bar{X} = 49{\cdot}5$, $\quad s \doteq 2{\cdot}069$, $\quad df = 16$, $\quad T \doteq 2{\cdot}547$,
$K_\alpha \doteq (-\infty, -2{\cdot}12) \cup (2{\cdot}12, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 12. 2. 2009

IŠRM

1. a) Označimo s T_1 čas, ki ga je profesor porabil za prvega, s T_2 pa čas, ki ga je porabil za drugega kandidata. Območje, ko mora tretji kandidat čakati, je prikazano na sliki:



Ker sta T_1 in T_2 neodvisni in porazdeljeni enakomerno, je tudi slučajni vektor (T_1, T_2) porazdeljen enakomerno po kvadratu na sliki. Zato je verjetnost iskanega dogodka kar kvocient ploščin, ki je enak $5/8$.

b) Iskana pogojna verjetnost je razmerje med ploščino označenega območja desno od črtkane črte in ploščino celotnega označenega območja. Le-to je enako $3/5$.

2. Velja $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, kjer je:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, če je } i\text{-ti igralec dobil natanko dva pika} \\ 0 & \text{, sicer} \end{cases} .$$

Nadalje je:

$$E(X_i) = P\big(i\text{-ti igralec dobi natanko dva pika}\big) = \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{2}}{\binom{32}{4}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{6}}{\binom{32}{8}} = \frac{966}{4495} \doteq$$

$$\doteq 0{\cdot}215$$

in $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = \dfrac{3864}{4495} \doteq 0{\cdot}860.$

Opomba. Dosti težje je iskano matematično upanje izračunati iz porazdelitve slučajne spremenljivke S, ki je enaka:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{100247}{292175} & \frac{137184}{292175} & \frac{50292}{292175} & \frac{4416}{292175} & \frac{36}{292175} \end{pmatrix}$$

oziroma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{\cdot}3431 & 0{\cdot}4695 & 0{\cdot}1721 & 0{\cdot}01511 & 0{\cdot}0001232 \end{pmatrix} .$$

3. Označimo $S := X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{300}^2$. Ker je S vsota velikega števila neodvisnih dovolj lepih slučajnih spremenljivk, je porazdeljena približno normalno z ustreznim matematičnim upanjem in disperzijo. Iz $E(X_i^2) = 1/3$ in $D(X_i^2) = 4/45$ izračunamo $E(S) = 100$ in $D(S) = 80/3$, torej je približno $S \sim \mathrm{N}\big(100, \sqrt{80/3}\big) \doteq \mathrm{N}(100, 5{\dot{}}164)$. Sledi:

$$P(S < 95) \approx \Phi\left(\frac{95 - 100}{5{\dot{}}164}\right) + \frac{1}{2} \doteq 0{\dot{}}1665\,.$$

4. $\bar{X} = 45{\dot{}}51, \quad s \doteq 3{\dot{}}710, \quad df = 74, \quad c \doteq 1.992.$
Interval zaupanja: $44{\dot{}}65 \le \mu \le 46{\dot{}}36$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 18. 6. 2009

IŠRM

1. *Prvi način.* Slučajna spremenljivka S lahko zavzame vrednosti $6k + r$, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots$ in $r = 1, 2, 3, 4, 5$. Velja:

$$P(S = 6k + r) = \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}$$

oziroma:

$$S \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \cdots \end{pmatrix},$$

torej je:

$$E(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{5} (6k + r) \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (30k + 15) \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}.$$

Ob upoštevanju znanih formul:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}; \qquad -1 < q < 1$$

dobimo:

$$E(S) = \frac{30 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2} + \frac{15}{6\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = 4{\cdot}2\,.$$

Drugi način. Označimo z N število metov kocke, z R pa število pik, ki so padle pri zadnjem metu. Tedaj je $S = 6(N-1) + R$. Slučajna spremenljivka N je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(5/6)$, zato je $E(N) = 6/5$. Nadalje je zaradi simetrije slučajna spremenljivka R porazdeljena enakomerno na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, zato je $E(R) = 3$. Torej je $E(S) = 6 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1\right) + 3 = 4{\cdot}2$.

2. Nastavimo $P(X > Y \mid X > 1) = \dfrac{P(X > Y, X > 1)}{P(X > 1)}$ in računamo:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e}, \\ P(X > Y, X > 1) &= \iint_{\substack{x>y>0 \\ x>1}} e^{-x}\,e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_1^{\infty} \int_0^{x} e^{-y}\,\mathrm{d}y\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_1^{\infty} (1 - e^{-x}) e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}. \end{aligned}$$

Sledi $P(X > Y \mid X > 1) = 1 - \dfrac{1}{2e} \doteq 0{\cdot}816$.

3. Najprej opazimo, da je $b = 1 - 2a$. Od tod dobimo, da je $E(X_i) = 1$, ne glede na a, in izračunamo še $D(X_i) = 2a$. Torej je $E(S) = 1000$ in $D(S) = 2000a$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 1030) = P(1030\text{˙}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1030\text{˙}5 - 1000}{\sqrt{2000a}}\right),$$

torej mora približno veljati:

$$\Phi\left(\frac{30\text{˙}5}{\sqrt{2000a}}\right) = 0\text{˙}45$$

oziroma:

$$\frac{30\text{˙}5}{\sqrt{2000a}} = 1\text{˙}644854\,,$$

kar nam da $a \approx 0\text{˙}171916$ in $b \approx 0\text{˙}656169$.

Če ne upoštevamo popravka s polovičko, dobimo $a \approx 0\text{˙}166325$, $b \approx 0\text{˙}667350$.

Točen rezultat: $a \doteq 0\text{˙}1719568$, $b \doteq 0\text{˙}6560864$.

4. Označimo z Δ razliko v teži posamezne osebe (teža po dieti minus teža pred dieto). Tedaj je $\Delta \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ in testiramo ničelno hipotezo, da je $\mu = 0$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 0$.
Velja $\bar{\Delta} \doteq -5\text{˙}6$, $\quad s \doteq 6\text{˙}433$, $\quad df = 9$, $T \doteq -2\text{˙}75$, $\quad c \doteq (-\infty, -1\text{˙}83]$.
Ničelno hipotezo zavrnemo, torej sprejmemo hipotezo, da dieta deluje.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 15. 9. 2009

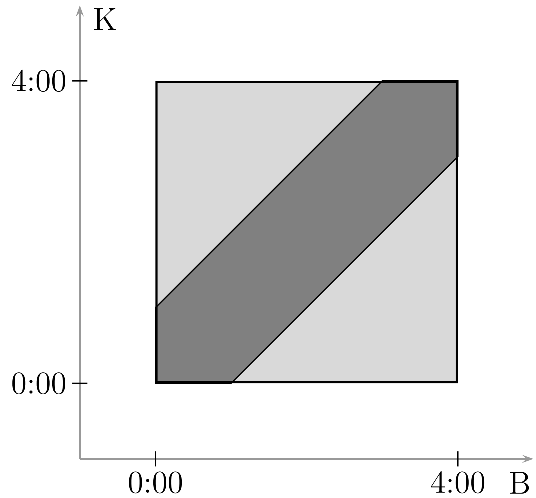
IŠRM

1. Označimo plesalke z A, B, C, plesalce s K, L, M, z X pa še plesalca, ki ga izbere Cirila, če izbere nekoga, ki ni eksplicitno omenjen v nalogi. Nadalje z L_1 oziroma M_1 označimo dogodek, da Luka oziroma Matej pleše z dekletom, ki mu je všeč. Možni izidi so prikazani v naslednji tabeli:

Opis izida	Verjetnost	L_1	M_1
$\mathrm{A+K, B+L, C+M}$	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$	✓	✓
$\mathrm{A+K, B+L, C+X}$	$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{16}$	✓	
$\mathrm{A+M, B+K, C+L}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$		✓
$\mathrm{A+M, B+L, C+K}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$	✓	✓

Sledi $P(M_1 \mid L_1) = \dfrac{P(M_1\cap L_1)}{P(L_1)} = \dfrac{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}+\frac{7}{16}+\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{8}$.

2. Verjetnostni prostor lahko predstavimo na naslednji način:



Označimo s T čas spanca, ki ga dvojčka ukradeta staršem. Na svetlosivem področju (ki ga označimo z A) je $T=2$, na temnosivem (ki ga označimo z B) pa se T giblje med 1 in 2, in sicer je $T = 1 + |X-Y|$, kjer je X čas, ko se zbudi Budimir, Y pa čas, ko se zbudi Kazimir. Nadaljevati je možno na vsaj dva načina.

Prvi način. Ob upoštevanju simetrije računamo:

$$E(T) = 1 + P(A) + \frac{1}{16}\iint\limits_{\substack{0\le x\le 4\\ |x-y|\le 1}} |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{25}{16} + \frac{1}{8}\iint\limits_{\substack{0\le x\le 4\\ 0\le x-y\le 1}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

V integralu uvedemo nove koordinate, in sicer x pustimo, namesto y pa uvedemo $u = x - y$. Dobimo:

$$\iint_{\substack{0 \le x \le 4 \\ 0 \le x-y \le 1}} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{0 \le u \le 1 \\ 0 \le x \le 4-u}} u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ = \int_0^1 u \int_0^{4-u} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u(4-u)\,\mathrm{d}u = $$
$$= \frac{5}{3}\,.$$

Ko vse skupaj seštejemo, dobimo $E(T) = \dfrac{85}{48}$ (1 h 46 min 15 s).

Drugi način. Pomagamo si s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke T glede na dogodek B. Za $1 \le t \le 2$ velja:

$$P\big(\{T < t\} \cap B\big) = P(T < t) = 1 - \frac{(5-t)^2}{16}\,,$$
$$P(T < t \mid B) = \frac{16}{7}\left(1 - \frac{(5-t)^2}{16}\right),$$
$$p_{T|B}(t) = \frac{2(5-t)}{7}\,.$$

Sledi:

$$E(T \mid B) = \frac{2}{7}\int_1^2 t(5-t)\,\mathrm{d}t = \frac{31}{21}\,,$$
$$E(T) = P(A)\,E(T \mid A) + P(B)\,E(T \mid B) = \frac{9}{16}\cdot 2 + \frac{7}{16}\cdot\frac{31}{21} = \frac{85}{48}\,.$$

3. a) $E(X_i)\,E(Z_i)\,E(U_i) = 0, \quad D(X_i) = E(X_i^2) = E(Z_i^2)\,E(U_i)^2 = D(Z_i)\,E(U_i^2) = \dfrac{5}{2}.$

b) Če označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$, velja $E(S) = 0$ in $D(S) = 250$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 7) \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{250}}\right) \doteq \frac{1}{2} - \Phi(0{\cdot}44272) \doteq 0{\cdot}32898\,.$$

Točen rezultat: $0{\cdot}328781$.

4. $\bar{X} = 52{\cdot}5, \quad \bar{Y} \doteq 54{\cdot}071, \quad s \doteq 17{\cdot}28, \quad df = 18, \quad T \doteq 0{\cdot}186.$
$K_\alpha = (-\infty, -2{\cdot}11] \cup [2{\cdot}11, \infty)$. Hipoteze ne moremo zavrniti.

2007/08

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 14. 11. 2007

IŠRM

1. a) $1 - 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}4^4 - 0\text{˙}3 \cdot 0\text{˙}4^4 - 4 \cdot 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}4^3 = 0\text{˙}86688$,
b) Vse možne razporeditve barv luči, pri katerih sta vsaj dve zeleni, obenem pa nobeni dve zaporedni nista zeleni, so: ZRZRR, ZRRZR, ZRRRZ, RZRZR, RZRRZ, RRZRZ in ZRZRZ. Od tod dobimo, da je iskana pogojna verjetnost enaka:

$$\frac{3 \cdot 0\text{˙}3 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}4^3 + 3 \cdot 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}6^2 \cdot 0\text{˙}4^2 + 0\text{˙}3 \cdot 0\text{˙}6^2 \cdot 0\text{˙}4^2}{0\text{˙}86688} \doteq 0\text{˙}199\,.$$

2. Označimo z a širino posamezne proge in dolžino igle, s h oddaljenost zgornjega konca igle do najbližnje spodnje rumene proge, na kateri *ni* igle, s φ pa kot med iglo in navpičnico. Tedaj igla v celoti leži na modri progi natanko tedaj, ko je $a\cos\varphi \le h \le a$. Verjetnost je potem enaka:

$$\frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi/2}\bigl(a - a\cos\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \doteq 0\text{˙}182\,.$$

3. $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

4. Naj bo n število posajenih sadik. Po Laplaceovi integralski formuli mora za mejno vrednost parametra n približno veljati:

$$\Phi\left(\frac{0\text{˙}62\,n - 0\text{˙}6\,n}{\sqrt{n \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}4}}\right) - \Phi\left(\frac{0\text{˙}58\,n - 0\text{˙}6\,n}{\sqrt{n \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}4}}\right) = 0\text{˙}99\,.$$

Po ureditvi dobimo $\Phi\bigl(\sqrt{n/600}\bigr) = 0\text{˙}495$, nakar iz tabele funkcije Φ razberemo $\sqrt{n/600} = 2\text{˙}575$, od koder dobimo $n = 3978\text{˙}375$. Torej naj bi ustrezna verjetnost izpolnjevala naš pogoj, brž ko je $n \ge 3979$.

V resnici je dovolj posaditi že 3950 sadik. Toda pozor: ne ustreza *vsak* $n \ge 3950$. Šele za vsak $n \ge 3991$ so zahteve naloge izpolnjene. Nekaj primerov točnih verjetnosti:

$$\begin{aligned}
n = 3949:&\quad P(2291 \le S \le 2448) \doteq 0\text{˙}9897234363\\
n = 3950:&\quad P(2291 \le S \le 2449) \doteq 0\text{˙}9901869323\\
n = 3990:&\quad P(2315 \le S \le 2473) \doteq 0\text{˙}9898114894\\
n = 3991:&\quad P(2315 \le S \le 2474) \doteq 0\text{˙}9902684172
\end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 17. 1. 2008

IŠRM

1. $P(Y > X^2) = \displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\infty} \frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

2. Najprej lahko izberemo, na katerih sedežih bodo sedeli možje in na katerih žene. Sedeže, na katerih bodo sedeli npr. možje, označimo z 1, 2, 3 in 4. Tedaj je $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, kjer je:

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; \text{če ima mož, ki sedi na } i\text{-tem sedežu, poleg sebe svojo ženo} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Tedaj je za vsak i očitno $E(X_i) = 1/2$ in iz linearnosti matematičnega upanja sledi $E(S) = 2$.

Za izračun disperzije upoštevamo, da je $E(X_i^2) = E(X_i) = 1/2$. Če je med i-tim in j-tim moškim sedežem natanko en ženski sedež, je $E(X_i X_j) = 1/4$ (ločimo primer, ko ena izmed žena izbranih mož sedi vmes, in primer, ko nobena izmed teh dveh žena ne sedi vmes). Če sta i-ti in j-ti sedež nasproti, pa je $E(X_i X_j) = 1/3$. Tako dobimo $E(S^2) = 16/3$ in $D(S) = 4/3$.

Druga možnost je, da nalogo rešimo neposredno z določitvijo porazdelitve slučajne spremenljivke S (gledamo 24 enako verjetnih razporeditev žena). Tako dobimo, da je:

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/12 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/12 \end{pmatrix} .$$

3. Iz $E(X_i) = 0$ in $D(X_i) = 1/3$ dobimo $E(\bar{X}) = 0$ in $D(\bar{X}) = 1/300$. Tako velja:

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{X}| > \frac{1}{10}\right) &= 1 - P\left(|\bar{X}| \le \frac{1}{10}\right) \approx \\ &\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{1/10}{\sqrt{1/300}}\right) - \Phi\left(-\frac{1/10}{\sqrt{1/300}}\right)\right] = \\ &= 1 - 2\Phi\big(\sqrt{3}\big) \doteq 0\text{'}08326452 . \end{aligned}$$

Točen rezultat: 0'08326461 .

4. $\bar{X} = 52\text{'}125, \quad s \doteq 1\text{'}8851, \quad df = 7, \quad T \doteq 3\text{'}19,$
$K_\alpha \doteq (-\infty, -3\text{'}00) \cup (3\text{'}00, \infty).$
Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 14. 2. 2008

IŠRM

1. Ločimo $\binom{16}{2}$ možnih razporeditev dveh pikov v kupu kart, iz katerega vlečejo naši igralci. Če je A dogodek, da asa izvleče Andraž, A_1 pa dogodek, da ga izvleče v prvo, dobimo:

$$P(A) = \frac{15+11+7+3}{\dbinom{16}{2}} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}\,,$$
$$P(A_1 \mid A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \doteq 0\text{˙}417\,.$$

2. Naj bo X čas v urah, ki bi ga Janez porabil za delo, če bi ga opravil do konca. Če je $X \le 4$, je $T = X$, sicer pa je $T = 2$. Sledi:

$$E(T) = \int_1^4 t\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_4^\infty 2\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 4 + \frac{1}{2} \doteq 1\text{˙}886\,,$$
$$E(T^2) = \int_1^4 t^2\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_4^\infty 4\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 4\,,$$
$$D(T) = E(T^2) - \big(E(T)\big)^2 \doteq 0\text{˙}442\,.$$

3. Iz $E(X) = 0$ in $D(X) = 36$ ter $E(Y) = 320$ in $D(Y) = 64$ izračunamo $E(X+Y) = 320$ in $D(X+Y) = 100$. Ker je po Laplaceovi integralski formuli Y porazdeljena približno normalno, to velja tudi za $X+Y$. Sledi:

$$P(X+Y > 335) \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{335-320}{10}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(1\text{˙}5) \doteq 0\text{˙}0668\,.$$

Točen rezultat: 0˙0658.

4. $\bar{X} = 51, \quad s \doteq 2\text{˙}138, \quad df = 7, \quad c = t_{0.995} \doteq 3\text{˙}50, \quad \Delta \doteq 2\text{˙}65.$
Interval zaupanja: $48\text{˙}35 \le \sigma \le 53\text{˙}65$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 8. 7. 2008

IŠRM

1. Označimo z A dogodek, da Pepček vloži vsa pisma v prave ovojnice, z B pa dogodek, da prvo pismo vloži v napačno ovojnico. Tedaj velja:

$$P(A) = \left(0\text{'}9 + 0\text{'}1 \cdot \frac{1}{3}\right)\left(0\text{'}9 + 0\text{'}1 \cdot \frac{1}{2}\right) \doteq 0\text{'}8867\,,$$

$$P(B \mid \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)}{1 - P(A)} = \frac{0\text{'}1 \cdot \frac{2}{3}}{1 - P(A)} \doteq 0\text{'}5882\,.$$

2. Za izračun konstante c je najlažje upoštevati:

$$1 = c \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c \int_0^\infty \frac{1}{2(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\,,$$

od koder dobimo $c = 2$. Za izračun matematičnega upanja pa se splača nastaviti:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = 2 \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{x(1+x)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

3. Velja:

$$P(X_1 X_2 \cdots X_n > 1) = P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n > 0)\,,$$

kjer je $Y_i := \ln X_i$. Tako smo produkt prevedli na vsoto, katere porazdelitev lahko aproksimiramo z ustrezno normalno.

Če s q označimo gostoto slučajnih spremenljivk Y_i ter še $a = \ln(0\text{'}9)$ in $b = \ln(1\text{'}1)$, za $a < y < a$ velja:

$$q(y) = \frac{1}{e^y(b-a)} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, e^y \right| = \frac{1}{b-a}\,,$$

torej so slučajne spremenljivke $Y_1, \ldots Y_{500}$ porazdeljene enakomerno na intervalu (a, b). Če označimo še $S := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{500}$, velja $E(S) = 500(a+b)/2$ in $D(S) = 500(b-a)^2/12$. Sledi:

$$P(S > 0) \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{-250(a+b)}{(b-a)\sqrt{500/12}}\right) \doteq \frac{1}{2} - \Phi(1\text{'}9397) \doteq 0\text{'}026206\,.$$

Točen rezultat: 0'026197.

4. $\bar{X} = 66$, $s \doteq 2\text{'}3452$, $df = 8$, $T \doteq 2\text{'}5584$, $K_\alpha \doteq (2\text{'}90, \infty)$.
Hipoteze ne moremo zavrniti.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 4. 9. 2008

IŠRM

1. a) Označimo s K_1, K_2 in K_3 dogodke, da imamo v posamezni garnituri na voljo vsaj še 5 kozarcev. Tedaj za $i = 1, 2, 3$ velja:

$$P(K_i) = 0{\dot{}}7^6 + 6 \cdot 0{\dot{}}3 \cdot 0{\dot{}}7^5 \,.$$

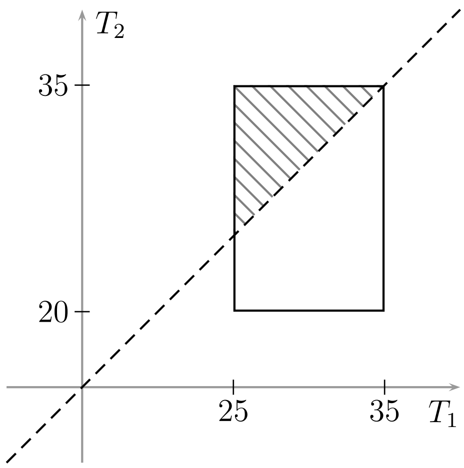
Če s K označimo dogodek, da imamo na voljo vsaj 5 enakih kozarcev, velja $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Ker so dogodki K_1, K_2 in K_3 neodvisni, velja:

$$P(K) = 1 - \big(1 - P(K_1)\big)\big(1 - P(K_2)\big)\big(1 - P(K_3)\big) \doteq 0{\dot{}}805 \,.$$

b) Označimo s T dogodek, da smo razbili največ tri kozarce. Ker je $T \subseteq K$, velja:

$$\begin{aligned} P(T \mid K) &= \frac{P(T \cap K)}{P(K)} = \frac{P(T)}{P(K)} = \\ &= \frac{1}{P(K)} \left[0{\dot{}}7^{18} + \binom{18}{1} \cdot 0{\dot{}}3 \cdot 0{\dot{}}7^{17} + \binom{18}{2} \cdot 0{\dot{}}3^2 \cdot 0{\dot{}}7^{16} + \binom{18}{3} \cdot 0{\dot{}}3^3 \cdot 0{\dot{}}7^{15} \right] \doteq \\ &\doteq 0{\dot{}}204 \,. \end{aligned}$$

2. a) Označimo z T_1 čas potovanja s prvo, s T_2 pa čas potovanja z drugo progo (s čakanjem vred). Območje, ko Andraž pride prej s prvo kot z drugo progo, je prikazano na sliki:



Ker sta T_1 in T_2 neodvisni in porazdeljeni enakomerno, je tudi slučajni vektor (T_1, T_2) porazdeljen enakomerno po pravokotniku na sliki. Zato je verjetnost iskanega dogodka kar kvocient ploščin, ki je enak $1/3$.

b) Velja $T = T_1 - T_2$. Ker sta T_1 in T_2 porazdeljeni enakomerno, je $E(T_1) = 30$ in $E(T_2) = 27{\dot{}}5$ ter $D(T_1) = 100/12$ in $D(T_2) = 225/12$. Zato je $E(T) = E(T_1) - E(T_2) = 2{\dot{}}5$ in $D(T) = D(T_1) + D(T_2) = 325/12 \doteq 27{\dot{}}08$.

3. Označimo z X število cifer na kovancu po en evro, z Y pa število cifer na kovancu za dva evra. Tedaj sta X in Y neodvisni, $X \sim \mathrm{Bin}(225, 1/2)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(100, 1/2)$ in velja $S = X + 2Y$. Ker je S vsota velikega števila neodvisnih dovolj lepih slučajnih spremenljivk, je porazdeljena približno normalno z ustreznim matematičnim upanjem in disperzijo. Velja:

$$\begin{aligned} E(S) &= 225 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = \frac{425}{2} = 212\text{'}5\,, \\ D(S) &= 225 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{625}{4}\,, \\ \sigma(S) &= \frac{25}{2} = 12\text{'}5\,. \end{aligned}$$

Torej je približno $S \sim \mathrm{N}(212\text{'}5, 12\text{'}5)$. Sledi:

$$P(S > 225) = P(225 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{225 - 212\text{'}5}{12\text{'}5}\right) \doteq 0\text{'}15866\,.$$

Če upoštevamo, da je S celoštevilska, lahko iskano verjetnost interpretiramo tudi kot:

$$P(S > 225) = P(225\text{'}5 < S < \infty) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{225 - 212\text{'}5}{12\text{'}5}\right) \doteq 0\text{'}14917\,.$$

Točen rezultat: 0'1492866.

4. $\bar{X} = 51$, $\quad s \doteq 2\text{'}138$, $\quad df = 7$, $\quad c_1 \doteq 0\text{'}989$, $\quad c_2 \doteq 20\text{'}3$.
Interval zaupanja: $1\text{'}26 \le \sigma \le 5\text{'}69$.

2006/07

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 21. 11. 2006

IŠRM

1. a) *Prvi način.*

a) Mislimo si, da najprej posedemo prvega moškega, nato prvo žensko (njegovo ženo), nato drugega moškega itd. Verjetnost, da prva ženska sedi poleg prvega moškega, je 2/5. Recimo zdaj, da prvi par sedi skupaj. Ne glede na to, kako posedemo drugega moškega, imamo za drugo žensko eno samo možnost od treh, pri kateri vsi trije pari sedijo skupaj. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

b) Mislimo si, da najprej posedemo vse moške. Ne glede na to, kam jih posedemo, je pogojna verjetnost, da prva ženska sedi poleg svojega moža, enaka 2/3, in ne glede na to, na katero stran jo posedemo, je za drugo žensko ena sama možnost od dveh, pri kateri vsi pari sedijo skupaj. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Drugi način. Ta način deluje v splošnem primeru, ko posedemo n parov.

a) Recimo, da najprej posedemo prvega moškega. Preostale osebe lahko posedemo na $(2n-1)!$ enako verjetnih načinov. Ugodne načine opišemo tako, da najprej povemo, na kateri strani svojega moža sedi prva ženska. Tu sta seveda dve možnosti. Ko to določimo, je jasno, na katerih parih sedežev morajo sedeti (preostali) zakonski pari. Za razporeditev teh parov imamo $(n-1)!$ možnosti. Končno moramo še povedati, na kateri strani bo pri posameznem paru sedel moški in na kateri ženska. Za to imamo 2^{n-1} možnosti. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2^n\,(n-1)!}{(2n-1)!}$.

b) Mislimo si, da najprej posedemo vse moške. Potem lahko ženske posedemo na $n!$ načinov. Ugodna načina pa sta samo dva, in sicer sta natančno določena s tem, na kateri strani svojega moža sedi prva ženska. Verjetnost iskanega dogodka je torej $\frac{2}{n!}$.

2. a) $\dfrac{5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2}{25} = \dfrac{19}{25} = 0\text{˙}76$,

b) $\dfrac{2 \cdot 1 + 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2}{5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2} = \dfrac{9}{19} \doteq 0\text{˙}474$.

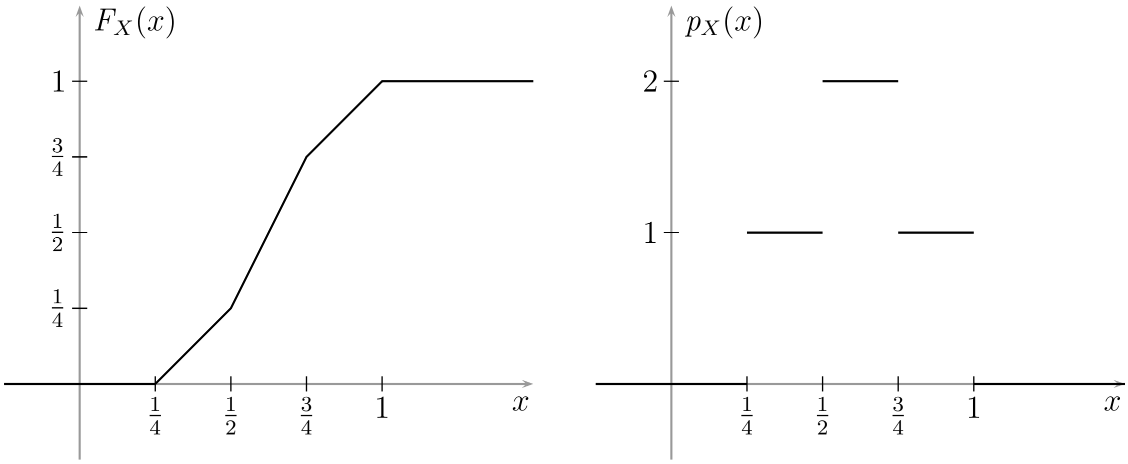
3. Naj bo n število srečk, p pa verjetnost, da je posamezna srečka dobitna. Tedaj mora veljati $(1-p)^n \geq 8\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}$, od koder izračunamo:

$$p \leq \frac{1}{1 + 2\sqrt{n(n-1)}}$$

Pri $n = 10^6$ je torej zgornja meja za p približno $5\text{˙}0000000000006 \cdot 10^{-7}$.

Lahko pa računamo tudi po Poissonovem obrazcu. Tedaj dobimo, da mora približno veljati $e^{-np} \geq 8(np)^2 e^{-np}/2!$ oziroma $np \leq 1/2$. Pri $n = 10^6$ mora biti torej približno $p \leq 5 \cdot 10^{-7}$.

4.


$F_X(x)$
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
x
$p_X(x)$
2
1
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
x

Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 17. 1. 2007

IŠRM

1. Velja $p_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, p_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
Meje dobimo iz pogojev $1 \le x \le 2, \quad 1 \le \dfrac{z}{x} \le 2$.
Za $1 \le z \le 2$ dobimo $p_Z(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln z$.
Za $2 \le z \le 4$ dobimo $p_Z(z) = \displaystyle\int_{z/2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\ln 2 - \ln z$.
Torej je:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \ln z & ;\ 1 \le z \le 2 \\ 2\ln 2 - \ln 2 & ;\ 2 \le z \le 4 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

2. Najprej za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ izračunamo:

$$E\big(e^{\lambda X}\big) = E\big(e^{\lambda Y}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-\lambda)^2/2}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda^2/2}$$

Nato izračunamo:

$$\begin{aligned} K\big(e^X, e^{X+Y}\big) &= E\big(e^X\, e^{X+Y}\big) - E\big(e^X\big)\, E\big(e^{X+Y}\big) = \\ &= E\big(e^{2X}\big)\, E\big(e^Y\big) - E\big(e^X\big)\, E\big(e^X\big)\, E\big(e^Y\big) = \\ &= e^{5/2} - e^{3/2} \doteq 7\text{˙}70\,. \end{aligned}$$

3. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:
$E(X_i) = E(\bar{X}) = 1, \quad D(X_i) = 0\text{˙}6, \quad D(\bar{X}) = 0\text{˙}006$.
Torej m izberemo tako, da velja $\Phi\left(\dfrac{m-1}{\sqrt{0\text{˙}006}}\right) \approx 0\text{˙}95$, kar nam da $m \doteq 1\text{˙}13$.

Dejansko je $P(\bar{X} < 1\text{˙}13) \doteq 0\text{˙}943$ in $P(\bar{X} \le 1\text{˙}13) \doteq 0\text{˙}956$.

4. $\bar{X} = 5\text{˙}1, \quad s \doteq 0\text{˙}2138, \quad df = 7, \quad c \doteq 3\text{˙}50, \quad \Delta \doteq 0\text{˙}26$.
Interval zaupanja: $4\text{˙}84 \le \mu \le 5\text{˙}36$.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 24. 1. 2007

IŠRM

1. Označimo maksimalno verjetnost s p. Iz Laplaceove integralske formule dobimo, da mora približno veljati:

$$\frac{40\dot{}5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} = 1\dot{}645$$

kar je ekvivalentno kvadratni enačbi:

$$10270\dot{}6025\, p^2 - 8370\dot{}6025\, p + 1640\dot{}25 = 0$$

skupaj s pogojem $40\dot{}5 - 100p \geq 0$ oziroma $p \leq 0\dot{}405$. Zgornja kvadratna enačba ima korena $p_1 \doteq 0\dot{}3278$ in $p_2 \doteq 0\dot{}4872$, a zaradi pogoja bo prvotno enačbo rešil le p_1. Torej je $p \approx 0\dot{}3278$.

Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $p \doteq 0\dot{}3270$.

2. Za $k = 2, 3, 4, 5, 6$ velja:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{k-2}}{\binom{8}{k-1}} \cdot \frac{3}{8-k+1} = \frac{(k-1)(8-k)(7-k)}{140}$$

sicer je $P(X = k) = 0$. Torej je:

$$X \dot{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0\dot{}2143 & 0\dot{}2857 & 0\dot{}2571 & 0\dot{}1714 & 0\dot{}0714 \end{pmatrix}$$

Velja $E(X) = 3\dot{}6$ in $D(X) = 1\dot{}44$.

3. 1/2.

4. $\bar{X} = 83, \quad \bar{Y} = 71, \quad s \doteq 10\dot{}29, \quad df = 15, \quad T \doteq 2\dot{}37,$
$K_\alpha \doteq (-\infty, -2\dot{}13) \cup (2\dot{}13, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 9. 2. 2007

IŠRM

1. *Prvi način*: ločimo štiri možnosti glede zastopanosti barv: $1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+1+2+2$ in $1+1+1+3$. Glede na to izračunamo:

$$P = \frac{1}{\binom{54}{6}} \left[8^4 \cdot \binom{22}{2} + 4 \cdot 8^3 \cdot \binom{8}{2} \cdot 22 + \binom{4}{2} \cdot 8^2 \cdot \binom{8}{2}^2 + 4 \cdot 8^3 \cdot \binom{8}{3} \right] \doteq$$
$$\doteq 0\text{'}1016\,.$$

Drugi način: Označimo z A dogodek, da v talonu ni pika, z B, da ni križa, s C, da ni srca, in z D, da ni kare. Tedaj lahko naš dogodek zapišemo kot $(A \cup B \cup C \cup D)^{\mathrm{c}}$, kar lahko izračunamo s pomočjo načela vključitev in izključitev. Dobimo:

$$P = 1 - \binom{4}{1} \frac{\binom{46}{6}}{\binom{54}{6}} + \binom{4}{2} \frac{\binom{38}{6}}{\binom{54}{6}} - \binom{4}{3} \frac{\binom{30}{6}}{\binom{54}{6}} + \binom{4}{4} \frac{\binom{22}{6}}{\binom{54}{6}}$$

2. Naj bo X čas, ki mine od Jožetovega prihoda na postajo do prihoda prvega avtobusa prve proge, Y pa čas do prihoda prvega avtobusa druge proge. Očitno sta X in Y neodvisni, X je porazdeljena enakomerno na $[0, 7]$, Y pa enakomerno na $[0, 10]$. Velja še $T = f(X, Y)$, kjer je:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 30 & ; x \le y \\ y + 35 & ; x > y \end{cases}$$

Torej je:

$$E(T) = \frac{1}{70} \left[\int_0^7 (10 - x)(x + 30)\,\mathrm{d}x + \int_0^7 (7 - y)(y + 35)\,\mathrm{d}y \right] = \frac{1033}{30} \doteq 34\text{'}43$$

oziroma 34 minut in 26 sekund.

3. Ker lahko slučajno spremenljivko N zapišemo kot vsoto veliko dovolj lepih neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk (npr. 2500 slučajnih spremenljivk, porazdeljenih po Poissonu $\mathrm{Pois}(1)$), je N porazdeljena približno normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer je $\mu = E(N)$ in $\sigma^2 = D(N)$. Za našo Poissonovo porazdelitev je znano, da je $E(N) = D(N) = 2500$, torej postavimo $\mu = 2500$ in $\sigma = 50$. Tako velja:

$$P(N < 2400) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{2399\text{'}5 - 2500}{50}\right) \doteq 0\text{'}02222$$

Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: 0'02167.

4. Od podatkov v resnici potrebujemo le njihovo število. Rezultat:

$$\beta = 2\Phi\left(\frac{5\sqrt{10}}{10}\right) \doteq 0\text{'}8862$$

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 12. 9. 2007

IŠRM

1. $\dfrac{0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}5 + 0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}8 \cdot 0{\cdot}6 + 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}1}{0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}6 + 0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}8 + 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}3} \doteq 0{\cdot}410\,.$

2. Označimo z X čas v minutah, ki mine od trenutka, ko Marta pripelje pred cestno zaporo, do trenutka, ko se bo na semaforju naslednjič prižgala zelena luč (če torej Marta naleti na rdečo luč, se X giblje med 0 in 5, če naleti na zeleno luč, pa med 5 in 7). Tedaj velja:

$$T = \begin{cases} 27 + X & ;\ 0 < X \le 3 \\ 90 & ;\ 3 < X \le 5 \\ 27 & ;\ 5 < X \le 7 \end{cases}$$

(enakosti v neenačajih lahko postavimo precej poljubno). Ker je slučajna spremenljivka X porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do 7, velja:

$$E(T) = \frac{1}{7}\int_0^3 (27 + x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{7}\cdot 90 + \frac{2}{7}\cdot 27 = \frac{639}{14} \doteq 45{\cdot}64\,.$$

3. Velja $p_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,p(z-x)\,\mathrm{d}x\,.$
Meje dobimo iz pogojev $0 < x < 1$, $0 \le z - x \le 1$.
Za $0 \le z \le 1$ dobimo $p_Z(z) = 4\displaystyle\int_0^z x(z-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2z^3}{3}$.
Za $1 \le z \le 2$ dobimo $p_Z(z) = 4\displaystyle\int_{z-1}^1 x(z-x)\,\mathrm{d}x = \frac{-8 + 12z - 2z^3}{3}$.
Torej je:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 2z^3/3 & ;\ 0 \le z \le 1 \\ (-8 + 12z - 2z^3)/3 & ;\ 1 \le z \le 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

4. $\bar{X} = 51, \quad s \doteq 2{\cdot}138, \quad df = 7, \quad c_1 \doteq 0{\cdot}989, \quad c_2 \doteq 20{\cdot}3.$
Interval zaupanja: $1{\cdot}26 \le \sigma \le 5{\cdot}69$.

2005/06

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 9. 6. 2006

FRI – univerzitetni študij

1. a) $\dfrac{\binom{5}{5}\binom{19}{1}}{\binom{24}{6}} = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{18}{0}}{\binom{24}{5}} \doteq 1{,}4 \cdot 10^{-4}$.

b) $1/6$.

2. $S \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{7}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$.

3. a) $\displaystyle\int_1^3 (a + x^{-3})\,\mathrm{d}x = 2a + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow a = \frac{5}{18}$.

b) $\displaystyle P(X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{5}{18} + x^{-3}\right)\mathrm{d}x = \frac{47}{72}$,

$\displaystyle E(X) = \int_1^3 \left(\frac{5}{18}x + x^{-2}\right)\mathrm{d}x = \frac{16}{9}$.

4. $\chi^2 = 19{,}556$, $K_\alpha = (9{,}49,\ \infty)$, hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz verjetnosti in statistike z dne 12. 9. 2006 (oba letnika)

FRI – univerzitetni študij

1. a) $0{\cdot}7 \cdot (1 - 0{\cdot}25 \cdot 0{\cdot}2) = 0{\cdot}665$.

b) $\dfrac{0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}25 + 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}25 \cdot 0{\cdot}2}{1 - 0{\cdot}665} \doteq 0{\cdot}328$.

c) Označimo s p potrebno verjetnost, da pride potnik do Reykjavika. Tedaj velja $p \cdot (1 - 0{\cdot}25 \cdot 0{\cdot}2) = 0{\cdot}9$, torej $p \doteq 0{\cdot}9474$. Po drugi strani pa mora veljati $0{\cdot}3^{n+1} \leq 1 - p$, kar velja za $n \geq 2$.

2. *Drugi letnik*:

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{7100 - 8000 \cdot 0{\cdot}9}{\sqrt{8000 \cdot 0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}9}}\right) \doteq 0{\cdot}9999.$$

Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $0{\cdot}999885$.

Tretji letnik: Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev:

$$1 - 0{\cdot}97^{100} - \binom{100}{1} 0{\cdot}03 \cdot 0{\cdot}97^{99} - \binom{100}{2} 0{\cdot}03^2 \cdot 0{\cdot}97^{98} -$$
$$- \binom{100}{3} 0{\cdot}03^3 \cdot 0{\cdot}97^{97} \doteq 0{\cdot}352751.$$

Lahko uporabimo tudi Poissonovo aproksimacijo:

$$1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right) \doteq 0{\cdot}352768.$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{p(\ln x)}{y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \quad \text{oziroma} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi y\bigl(1 + (\ln y)^2\bigr)} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

4. $\chi^2 = 0{\cdot}355$, $K_\alpha = (9{\cdot}21, \infty)$.

Hipoteze ne moremo zavrniti.