REŠITVE KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ TEORIJE IGER

Matematika – univerzitetni študij

Zbral: Martin Raič

2020/21

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 25. 11. 2020

1. Smiselno je privzeti, da bodo kurili tako, da bodo v čistem Nashevem ravnovesju igre s funkcijami koristi:

$$\begin{aligned} u_1(z_1, z_2, z_2) &= 5\ln(1 + 4z_1 + z_2) - z_1 \,, \\ u_2(z_1, z_2, z_2) &= 5\ln(1 + z_1 + 4z_2 + z_3) - z_2 \,, \\ u_3(z_1, z_2, z_2) &= 5\ln(1 + z_2 + 4z_3) - z_3 \,. \end{aligned}$$

Odvajamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} &= \frac{20}{1 + 4z_1 + z_2} - 1 \,, & \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} &= -\frac{80}{(1 + 4z_1 + z_2)^2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_2} &= \frac{20}{1 + z_1 + 4z_2 + z_3} - 1 \,, & \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} &= -\frac{80}{(1 + z_1 + 4z_2 + z_3)^2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z_3} &= \frac{20}{1 + z_2 + 4z_3} - 1 \,, & \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} &= -\frac{80}{(1 + z_2 + 4z_3)^2} \,. \end{aligned}$$

Stacionarne točke so rešitev sistema:

$$4z_1 + z_2 = z_1 + 4z_2 + z_3 = z_2 + 4z_3 = 19$$

in ta sistem ima edino rešitev $z_1 = 57/14$, $z_2 = 19/7$, $z_3 = 57/14$. Ker so drugi odvodi negativni, imajo tam vse funkcije koristi maksimum. Tako bodo torej kurili.

2. Tabelirajmo dobitke igralcev v primeru, ko igrajo čiste strategije. Vrstica naj pove, koliko igralcev obrne rdečo in koliko dobi zeleno, stolpec pa akcijo, za katero je prikazan dobitek:

	Z	R
$4Z$	0	—
$3Z, 1R$	-6	18
$2Z, 2R$	14	-14
$1Z, 3R$	-12	4
$4R$	—	0

Iz tabele je razvidno, da čisto Nashevo ravnovesje nastopi, če bodisi vsi pokažejo rdečo karto bodisi eden pokaže rdečo, trije pa zeleno.

Oglejmo si še primer, ko vsak od igralcev pokaže rdečo karto z verjetnostjo $r \in (0, 1)$. Če se premisli tako, da z gotovostjo pokaže zeleno karto, je njegov pričakovani dobitek enak:

$$-18(1 - r)^2 r + 42(1 - r)r^2 - 12r^3 \,,$$

če pa se premisli tako, da z gotovostjo pokaže rdečo karto, je njegov pričakovani dobitek enak:

$$18(1-r)^3 - 42(1-r)^2 r + 12(1-r)r^2\,.$$

Po principu indiferentnosti se morata ta dva dobitka ujemati. Po ureditvi dobimo enačbo:

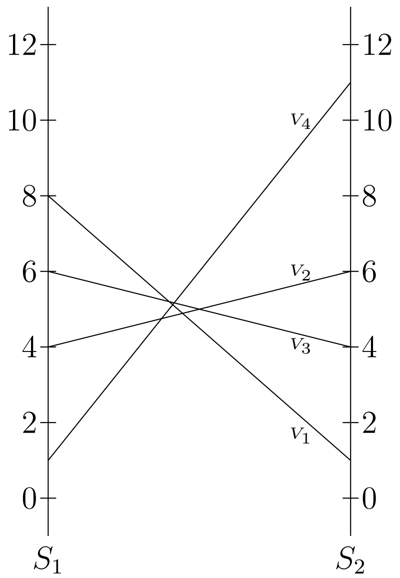
$$72r^2 - 78r + 18 = 0\,,$$

ki ima rešitvi $r_1 = 1/3$ in $r_2 = 3/4$. To sta še dve iskani mešani Nashevi ravnovesji.

3. Označimo z V_i akcijo, ki ustreza i-ti vrstici, in z S_j akcijo, ki ustreza j-temu stolpcu. Najprej opazimo, da za $1/7 < p < 3/10$ kombinacija $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ strogo dominira akcijo S_3. Ko slednjo izločimo, poiščemo minimum zgornje ovojnice akcij prvega igralca. Naj drugi igra $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 1-q & q \end{pmatrix}$. Tedaj velja (v matričnem zapisu):

$$U_1\left(\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8-7q \\ 4+2q \\ 6-2q \\ 1+10q \end{bmatrix}.$$

S pomočjo slike:



opazimo in izračunamo:

$$U_1\left(V_1, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix}\right) = \frac{61}{12}\,, \qquad U_1\left(V_2, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix}\right) = \frac{29}{6}\,,$$
$$U_1\left(V_3, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix}\right) = U_1\left(V_4, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix}\right) = \frac{31}{6}\,.$$

Ker ima akcija V_3 negativno, akcija V_4 pa pozitivno strmino, $31/6$ pa je največje izmed zgoraj izračunanih števil, je to vrednost igre, drugi igralec pa v mešanem Nashevem ravnovesju igra $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix}$, prvi pa mora igrati $\begin{pmatrix} V_3 & V_4 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Iz principa indiferentnosti dobimo $6 - 5p = 4 + 7p$, torej $p = 1/6$. Edino mešano Nashevo ravnovesje igre je torej:

$$\left(\begin{pmatrix} V_3 & V_4 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix} \right).$$

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 18. 1. 2021

1. a) Korist posameznika znaša:

$$u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_i + \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = $$
$$= -x_i + \frac{x_i}{\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}}\,.$$

Posebej je še $u_i(0, 0, \dots, 0) = 0$. Opazimo, da gre $u_i(x_1, \dots, x_n)$ pri fiksnih x_j, $j \neq i$, proti minus neskončno, ko gre x_i proti neskončno. Poleg tega je funkcija u_i, brž ko zneski x_i niso vsi enaki nič, parcialno zvezno odvedljiva. Pri fiksnih x_j, $j \neq i$, torej $u_i(x_1, \dots, x_n)$ doseže maksimum bodisi pri $x_i = 0$ bodisi v stacionarni točki.

V Nashevem ravnovesju so torej morda določeni x_i enaki 0, določeni pa so stacionarne točke, strogo večje od nič. Za vsaj en i dobimo takšno stacionarno točko. Če bi bili namreč vsi x_i enaki nič, bi se lahko i-ti igralec premislil, investiral x in dobil $-x + \sqrt{x}$, kar je pri $x \in (0, 1)$ strogo pozitivno.

Naj ima u_i v $x_i > 0$ stacionarno točko. Odvajanje nam da:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -1 + \frac{2s - x_i}{2s^{3/2}}\,,$$

kjer je $s := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pri tistih i, kjer je stacionarna točka, je torej $2s - x_i = 2s^{3/2}$. Naj bo m število tistih indeksov i, kjer u_i doseže stacionarno točko; za ostalih $n - m$ indeksov j je torej $x_j = 0$. Seštejemo po vseh indeksih i s stacionarno točko in dobimo $2(m-1)s = 2ms^{3/2}$, od koder dobimo:

$$s = \frac{(2m-1)^2}{4m^2}\,.$$

Sledi:

$$x_i = 2s - 2s^{3/2} = \frac{(2m-1)^2}{4m^3}\,.$$

Oglejmo si še tiste indekse j, za katere je $x_j = 0$. Za te j pa je:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -1 + \frac{2s - x_j}{2s^{3/2}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{s}} = -1 + \frac{2m}{2m-1} = \frac{1}{2m-1} > 0\,,$$

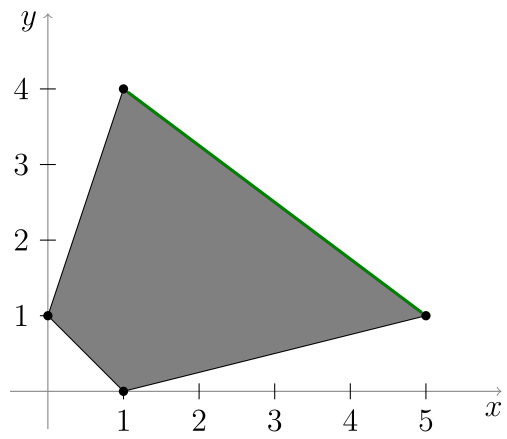
torej tam ni dosežen maksimum. Torej takih indeksov ni: profil $(x_1, \dots, x_n)$ je Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko je $x_i = \frac{(2n-1)^2}{4n^3}$ za vse i (po dejstvu, ki ga privzamemo kot znanega, je tam res Nashevo ravnovesje, torej funkcije u_i res dosežejo globalni maksimum).

b) V edinem Nashevem ravnovesju korist posameznika znaša:

$$-\frac{(2n-1)^2}{4n^3} + \frac{2n-1}{2n^2} = \frac{2n-1}{4n^3}\,.$$

Če pa se dogovorijo, da vsi investirajo isto znesek x, korist posameznika znaša $u(x) := -x + \sqrt{\frac{x}{n}}$. Odvajamo in dobimo $u'(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{xn}}$, torej je stacionarna točka $x = \frac{1}{4n}$. Tam korist posameznika znaša $\frac{1}{4n}$, kar je več kot v Nashevem ravnovesju (pri $n > 1$ strogo več).

2. a) Najprej skicirajmo množico dopustnih sporazumnih parov dobitkov:



Optimalne po Paretu so le točke na daljici s krajiščema $(1, 4)$ in $(5, 1)$, ki izhajata iz profilov (T, L) in (B, R): samo za te točke se lahko igralca sporazumeta ali pa ostane status quo. Daljico opisujejo zveze:

$$y = \frac{19 - 3x}{4}\,; \quad 1 \le x \le 5\,.$$

Pri točkah grožnje (T, L) in (B, R) sta izhodiščna para dobitkov že na daljici, torej ostane status quo. Pri točki grožnje (T, R) je izhodiščni par dobitkov $(0, 1)$. Nashev produkt je torej enak:

$$x(y - 1) = \frac{15x - 3x^2}{4}\,,$$

kar je maksimalno pri $x = \frac{5}{2}$ in $y = \frac{23}{8}$; opazimo, da je $1 \le x \le 5$. Pri točki grožnje (B, L) pa je izhodiščni par dobitkov $(1, 0)$. Nashev produkt je zdaj enak:

$$(x - 1)y = \frac{-19 + 22x - 3x^2}{4}\,,$$

kar je maksimalno pri $x = \frac{11}{3}$ in $y = 2$; opazimo, da je $1 \le x \le 5$.

Ker vsi sporazumi ležijo na isti daljici, iz mešanih groženj nastanejo na enak način mešani sporazumi. Prirejena strateška igra je torej:

	L	R
T	$5, 1$	$\frac{5}{2}, \frac{23}{8}$
B	$\frac{11}{3}, 2$	$1, 4$

ta pa ima edino čisto Nashevo ravnovesje (T, R).

Ustrezni sporazum igralca implementirata z mešanico $\begin{pmatrix} (T,L) & (B,R) \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Če izenačimo koordinato x, dobimo:

$$5(1-p)+p = 5-4p = \frac{5}{2},$$

kar je izpolnjeno pri $p = 5/8$. Iskana sporazumna mešanica je torej $\begin{pmatrix} (T,L) & (B,R) \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$.

Opomba. (T,R) ni Nashevo ravnovesje v izvirni strateški igri.

3. Najprej opazimo, da pri drugem igralcu s signalom iz stanja ω_2 akcija L strogo dominira akcijo D, zato lahko slednjo eliminiramo iz vseh nadaljnjih postopkov. Signal iz stanj ω_2 in ω_3 da prvemu igralcu aposteriorno porazdelitev $\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, signal iz stanj ω_1 in ω_3 pa da drugemu igralcu aposteriorno porazdelitev $\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dobimo strateško igro z naslednjimi funkcijami koristi:

	L_{13}	D_{13}
A_1A_{23}	$3,2;4$	$4,4;1$
A_1B_{23}	$3,1;5$	$4,3;3$
B_1A_{23}	$1,2;0$	$5,4;2$
B_1B_{23}	$1,1;1$	$5,3;4$

Iz tabele je razvidno, da akcija A_{23} strogo dominira akcijo B_{23} (čeprav je v izvirni Bayesovi igri v stanju ω_2 ravno obratno – akcija B strogo dominira akcijo A). Tako dobimo igro za dva igralca, od katerih ima vsak po dve akciji. Mešana Bayesova ravnovesja: (A_1B_{23}, L_2L_{13}), (B_1B_{23}, L_2D_{13}), $\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} B_{23},\ L_2 \begin{pmatrix} L_{13} & D_{13} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right)$.

4. Prirejena strateška igra:

	CE	CF	DE	DF
A	$5,2$	$5,2$	$3,0$	$6,2$
B	$1,3$	$7,0$	$4,5$	$7,0$

Poiščimo zgornjo ovojnico strategij drugega igralca, ko prvi meša $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

- Strategiji CF in DF drugemu igralcu prinašata isto korist.
- Ker ima pri $p = 0$ drugi igralec isto korist, če igra CE, CF ali DF, pri $p = 1$ pa ima strogo večjo korist pri CE kot pri CF oziroma DF, sta CF in DF v zgornji ovojnici le pri $p = 0$.
- Če je $p = 1/2$, ima drugi igralec pri CE in DE isto korist. Ker ima strategija DE večjo strmino, je le-ta izločena za $p < 1/2$, CE pa je izločena za $p > 1/2$.

Zgornjo ovojnico torej tvorijo:

- CE, CF in DF za $p = 0$;
- CE za $0 < p < 1/2$;
- CE in DE za $p = 1/2$;
- DE za $1/2 < p \leq 1$.

Oglejmo si še korist prvega igralca.

- Naj bo $p = 0$. Iz:

$$U_1\left(A, \begin{pmatrix} CE & CF & DF \\ 1-x-y & x & y \end{pmatrix}\right) = 5 + y$$
$$U_1\left(B, \begin{pmatrix} CE & CF & DF \\ 1-x-y & x & y \end{pmatrix}\right) = 1 + 6x + 6y$$

  dobimo, da mora v mešanem Nashevem ravnovesju veljati $6x + 5y \leq 4$, seveda poleg splošnih pogojev $x, y \geq 0$, $x + y \leq 1$. A slednji pogoj je odveč, saj ob ostalih pogojih velja $x + y = \frac{5x+5y}{5} \leq \frac{6x+5y}{5} \leq \frac{4}{5} < 1$.
- Naj bo $0 < p < 1/2$. Če drugi igralec igra CE, prvi ni indiferenten, torej tam ni mešanega Nashevega ravnovesja.
- Naj bo $p = 1/2$. Iz:

$$U_1\left(A, \begin{pmatrix} CE & DE \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = 5 - 2q$$
$$U_1\left(B, \begin{pmatrix} CE & DE \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = 1 + 3q$$

  dobimo, da je mešano Nashevo ravnovesje doseženo, če je $q = 4/5$.
- Naj bo $1/2 < p < 1$. Če drugi igralec igra DE, prvi ni indiferenten, torej tam ni mešanega Nashevega ravnovesja.
- Naj bo $p = 1$. Ker je $U_1(B, DE) > U_1(A, DE)$, je v (B, DE) doseženo čisto Nashevo ravnovesje.

Vsako čisto Nashevo ravnovesje je behavioristično. Behavioristično je tudi mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CE & DE \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & D \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} E\right).$$

Strategija $\begin{pmatrix} CE & CF & DF \\ 1-x-y & x & y \end{pmatrix}$ pa je behavioristična, če je oblike:

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ 1-r & r \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \leq q, r \leq 1 \, ,$$

kar pomeni, da mora veljati:

$$\begin{aligned}(1-q)(1-r) &= 1-x-y\,,\\ (1-q)r &= x\,,\\ q(1-r) &= 0\,,\\ qr &= y\,.\end{aligned}$$

Spomnimo se še, da smo v Nashevem ravnovesju natanko tedaj, ko je $6x+5y \leq 4$, torej $(6-q)r \leq 4$. Iz tretje enačbe dobimo, da mora biti bodisi $q=0$ bodisi $r=1$. V prvem primeru smo v Nashevem ravnovesju natanko tedaj, ko je $r \leq 2/3$, v drugem primeru pa nismo nikoli v Nashevem ravnovesju. Dobimo torej še behavioristično mešana Nasheva ravnovesja:

$$\left(A,\ C\begin{pmatrix} E & F \\ 1-r & r\end{pmatrix}\right)\ ; \quad 0 \leq r \leq \frac{2}{3}\,.$$

2019/20

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 21. 11. 2019

1. Najboljši odgovor prvega igralca je:

- 1, če drugi igra A;
- $1/2$, če drugi igra B;
- 0, če drugi igra C.

Nadalje:

- Če drugi igra A in prvi glede na to igra optimalno, je to optimalno tudi za drugega. Torej je $(1, A)$ Nashevo ravnovesje.
- Če drugi igra B in prvi glede na to igra optimalno, je to optimalno tudi za drugega. Torej je $\left(\frac{1}{2}, B\right)$ Nashevo ravnovesje.
- Če drugi igra C in prvi glede na to igra optimalno, se drugemu bolj splača igrati B. V tem primeru torej ne dobimo Nashevega ravnovesja.

2. Čistih Nashevih ravnovesij ni, prav tako tudi ni Nashevih ravnovesij, pri katerem bi dva igralca igrala čisti strategiji, eden pa bi vključil obe svoji akciji. Pregledati moramo torej še primere, ko vsaj dva igralca vključita obe svoji akciji. Označimo splošni profil:

$$\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1-r & r \end{pmatrix}\right).$$

Če prvi igralec igra T, druga dva pa vključita obe svoji akciji, dobimo:

$$U_2\left(T, \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1-r & r \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-2r \\ 2+r \end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $r = 1/3$. Nadalje je:

$$U_3\left(T, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ R \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+3q \\ 3-q \end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $q = 1/2$. Nadalje je še:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} T \\ B \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 20/6 \\ 15/6 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je $\left(T, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right)$ mešano Nashevo ravnovesje.

Če prvi igralec igra B, druga dva pa vključita obe svoji akciji, dobimo:

$$U_2\left(B, \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1-r & r \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+2r \\ 3-r \end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $r = 1/3$. Nadalje je:

$$U_3\left(T, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ R \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2q \end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $q = 1/2$. Podobno kot prej je:

$$U_1\left(\begin{bmatrix}T\\B\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}X & Y\\2/3 & 1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}L & R\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix}20/6\\15/6\end{bmatrix},$$

kar pomeni, da tam ni mešanega Nashevega ravnovesja.

Če drugi igralec igra X, prvi in tretji pa vključita obe svoji akciji, dobimo:

$$U_1\left(\begin{bmatrix}T\\B\end{bmatrix}, X, \begin{pmatrix}L & R\\1-r & r\end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1+r\\4\end{bmatrix},$$

od koder sledi, da takega mešanega Nashevega ravnovesja ni.

Če drugi igralec igra Y ter prvi in tretji vključita obe svoji akciji, dobimo:

$$U_1\left(\begin{bmatrix}T\\B\end{bmatrix}, Y, \begin{pmatrix}L & R\\1-r & r\end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5+r\\1\end{bmatrix},$$

od koder spet sledi, da takega mešanega Nashevega ravnovesja ni.

Če tretji igralec igra L, prva dva pa vključita obe svoji akciji, dobimo:

$$U_1\left(\begin{bmatrix}T\\B\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}X & Y\\1-q & q\end{pmatrix}, L\right) = \begin{bmatrix}1+4q\\4-3q\end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $q = 3/7$. Nadalje je:

$$U_2\left(\begin{pmatrix}T & B\\1-p & p\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}, L\right) = \begin{bmatrix}3-p\\2+p\end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $p = 1/2$. Nadalje je še:

$$U_3\left(\begin{pmatrix}T & B\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X & Y\\4/7 & 3/7\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}L\\R\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}30/14\\31/14\end{bmatrix},$$

od koder sledi, da tam ni mešanega Nashevega ravnovesja.

Če tretji igralec igra R, prva dva pa vključita obe svoji akciji, dobimo:

$$U_1\left(\begin{bmatrix}T\\B\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}X & Y\\1-q & q\end{pmatrix}, R\right) = \begin{bmatrix}2+4q\\4-3q\end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $q = 2/7$. Nadalje je:

$$U_2\left(\begin{pmatrix}T & B\\1-p & p\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}, R\right) = \begin{bmatrix}1+3p\\3-p\end{bmatrix}.$$

Indiferentnost je dosežena pri $p = 1/2$. Nadalje je še:

$$U_3\left(\begin{pmatrix}T & B\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X & Y\\5/7 & 2/7\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}L\\R\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}27/14\\30/14\end{bmatrix},$$

od koder dobimo še zadnje mešano Nashevo ravnovesje
$\left(\begin{pmatrix}T & B\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X & Y\\5/7 & 2/7\end{pmatrix}, R\right)$.

3. Najprej opazimo, da je akcija C strogo dominirana z mešanico $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, brž ko je $3/8 < p < 1/2$. Zgornjo ovojnico koristnostne funkcije U_2 na mešanicah $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ tvorijo:

- X za $0 \le p < 1/3$;
- X, Z in W za $p = 1/3$;
- W za $1/3 < p < 3/4$;
- W in Y za $p = 3/4$;
- Y za $3/4 < \varepsilon \le 1$.

Mešana Nasheva ravnovesja:

$$(A, X)\,, \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z & W \\ 2-6w & 5w-1 & w \end{pmatrix} \right) \text{ za } 1/5 \le w \le 1/3\,, \qquad (B, Y)\,.$$

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 22. 1. 2020

1. Če je na trgu d dobrih in $100-d$ slabih izdelkov, Nashevo ravnovesje nastopi natanko tedaj, ko velja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{103+d} &\geq \frac{2}{103+3(100-d+1)} && ; d \geq 1\,, \\ \frac{2}{103+3(100-d)} &\geq \frac{1}{103+d+1} && ; d \leq 99\,. \end{aligned}$$

Po ureditvi dobimo $39 \leq d \leq 40$, torej $d = 40$. Čisto Nashevo ravnovesje torej nastopi v dveh primerih: ko je na trgu 40 dobrih in 60 slabih izdelkov ali ko je na trgu 39 dobrih in 61 slabih izdelkov.

2. Postavimo se najprej v vlogo drugega jedca takrat, ko odreže kos. V vgnezdenem Nashevem ravnovesju pripadajoče podigre drugi jedec dobi najmanjšega izmed nastalih kosov, torej $\min\{p_1, p_2, 1-p_1-p_2\}$. Velja:

$$\min\{p_2, 1-p_1-p_2\} = \begin{cases} p_2 & ; 0 \leq p_2 \leq \frac{1-p_1}{2} \\ 1-p_1-p_2 & ; \frac{1-p_1}{2} \leq p_1 \leq 1-p_1 \end{cases}$$

in $\max_{0 \leq p_2 \leq 1-p_1} = \frac{1-p_1}{2}$. Če je torej $p_1 \geq \frac{1-p_1}{2}$ ali ekvivalentno $p_1 \geq 1/3$, je tudi:

$$\min\{p_1, p_2, 1-p_1-p_2\} = \begin{cases} p_2 & ; 0 \leq p_2 \leq \frac{1-p_1}{2} \\ 1-p_1-p_2 & ; \frac{1-p_1}{2} \leq p_1 \leq 1-p_1 \end{cases}$$

V vgnezdenem Nashevem ravnovesju torej drugi jedec odreže kos velikosti $\frac{1-p_1}{2}$. Tako velik kos dobita prvi in drugi jedec, medtem ko tretji jedec dobi kos velikosti p_1.

Če pa je $p_1 \leq 1/3$, velja:

$$\min\{p_1, p_2, 1-p_1-p_2\} = \begin{cases} p_2 & ; 0 \leq p_2 \leq p_1 \\ p_1 & ; p_1 \leq p_2 \leq 1-p_1 \\ 1-p_1-p_2 & ; 1-p_1 \leq p_2 \leq 1\,. \end{cases}$$

Tedaj lahko drugi jedec v vgnezdenem Nashevem ravnovesju odreže kos katere koli velikosti iz intervala $[p_1, 1-p_1]$ in dobi p_1, prvi jedec pa dobi $\min\{p_2, 1-p_1-p_2\}$. Slednje mora pripadati intervalu $\left[p_1, \frac{1-p_1}{2}\right]$.

Postavimo se sedaj v vlogo prvega jedca, ko odreže kos velikosti p_1. Videli smo, da, če je $p_1 \leq 1/3$, dobi kos velikosti iz intervala $\left[p_1, \frac{1-p_1}{2}\right]$, odvisno od volje drugega jedca, če pa je $p_1 \geq 1/3$, dobi kos velikosti p_1. Sledi, da prvi jedec v vgnezdenem Nashevem ravnovesju dobi največ $1/2$. Dobi pa tudi najmanj $1/3$, saj to doseže, če odreže $p_1 = 1/3$. Natančneje, če bi odrezal kako drugače in bi bil drugi jedec take volje, da bi prvi pri tem p_1 dobil manj kot $1/3$, bi se prvi premislil in bi raje odrezal $1/3$.

Postavili smo zgornjo in spodnjo mejo za dobitek prvega jedca v vgnezdenem Nashevem ravnovesju. Dokazati moramo še, da sta obe meji doseženi, torej za obe poiskati ustrezno vgnezdeno Nashevo ravnovesje. Dovolj je povedati za prvi dve potezi, saj v neslednjih jedec, ki je na vrsti, vselej vzame največji preostali kos (natančneje, enega od največjih).

- Vgnezdeno Nashevo ravnovesje, pri katerem prvi jedec dobi $1/3$, je tisto, pri katerem prvi jedec odreže $p_1 = 1/3$, drugi pa odreže $p_2 = p_1$ pri $p_1 \le 1/3$ in $p_2 = \frac{1-p_1}{2}$ pri $p_1 \ge 1/3$.
- Vgnezdeno Nashevo ravnovesje, pri katerem prvi jedec dobi $1/2$, je tisto, pri katerem prvi jedec odreže $p_1 = 0$, drugi pa vedno odreže $p_2 = \frac{1-p_1}{2}$.

3. Pri prvem igralcu, ki ne ve, ali je v ω_2 ali ω_3, akcija C strogo dominira obe ostali akciji. Tako se igra zreducira na naslednjo igro med prvim igralcem, ki ve, da je v stanju ω_1, in drugim igralcem:

	L_{123}	D_{123}
A_1	$0, 1$	$6, 3$
B_1	$2, 3$	$4, 2$
C_1	$6, 3$	$-6, 1$

Oglejmo si zgornjo ovojnico koristnostne funkcije prvega igralca, če drugi igralec meša $\begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 1-q & q \end{pmatrix}$. Dobimo:

- C_1 za $0 \le q < 2/7$;
- C_1 in B_1 za $q = 2/7$;
- B_1 za $2/7 < q < 1/2$;
- B_1 in A_1 za $q = 1/2$;
- A_1 za $1/2 < q \le 1$.

Zdaj pa pogledamo, kako se na zgornji ovojnici obnaša koristnostna funkcija drugega igralca.

- Za $0 \le q < 2/7$ upoštevamo, da je $U_{2;123}(C_1 C_{12}, L_{123}) > U_{2;123}(C_1 C_{12}; D_{123})$, kar pomeni, da mora biti $q = 0$. Dobimo čisto Bayes–Nashevo ravnovesje:

$$(C_1 C_{12}, L_{123})\,.$$

- Če je $q = 2/7$, prvi meša B in C, toda če se omejimo na ti dve akciji, akcija L pri prvem strogo dominira akcijo D, kar je v protislovju s pogojem, da je $q = 2/7$. Torej tam ni mešanega Bayes–Nashevega ravnovesja.
- Za $1/3 < q < 1/2$ ne dobimo ničesar, saj ni indiferentnosti.
- Za $q = 1/2$ iz principa indiferentnosti dobimo mešano Bayes–Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} C_{12}\,, \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right)\,.$$

Končno za $1/2 < q \leq 1$ upoštevamo $U_{2;123}(A_1C_{12}, L_{123}) < U_{2;123}(A_1C_{12}; D_{123})$, kar pomeni, da mora biti $q = 1$, od koder dobimo še Bayes–Nashevo ravnovesje:

$$(A_1C_{12}, D_{123})\,.$$

4. Naj Jaka pristopi h koaliciji kot k-ti. Strošek njegovih predhodnikov je vedno enak $10(k-1)$. Z Jakom vred pa je strošek enak:

- $10k$, če je $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$;
- 75, če je $k \in \{8, 9, 10\}$;
- $75 + 10(k-10)$, če $k \in \{11, 12, \ldots, 17\}$;
- 150, če je $k \in \{18, 19, 20\}$.

Če je torej vrednost koalicije negativna vrednost njenega stroška, je Jakov prispevek enak:

- -10, če je $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$;
- $10k - 85$, če je $k \in \{8, 9, 10\}$;
- 15, če $k \in \{11, 12, \ldots, 17\}$;
- $10k - 160$, če je $k \in \{18, 19, 20\}$.

Povprečni Jakov prispevek je 7 evrov. V tolikšnem znesku si torej on zasluži nagrado, preostalih 19 pa si strošek v višini 157 evrov razdeli na enake dele.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 30. 6. 2020

1. Igralci v igri so prodajalci in vsak ima dve možni akciji: ali prodaja originalen ali pa ponarejen med. Za korist je smiselno postaviti dobiček minus pričakovano kazen. Kdor prodaja originalen med, ima torej vedno korist 1000. Kdor pa prodaja ponarejen med, ima korist $3000 - 20000\bigl(1 - 0{\cdot}99^k\bigr)$, kjer je k število prodajalcev, ki prodajajo ponarejen med. Čisto Nashevo ravnovesje torej nastopi natanko tedaj, ko velja:

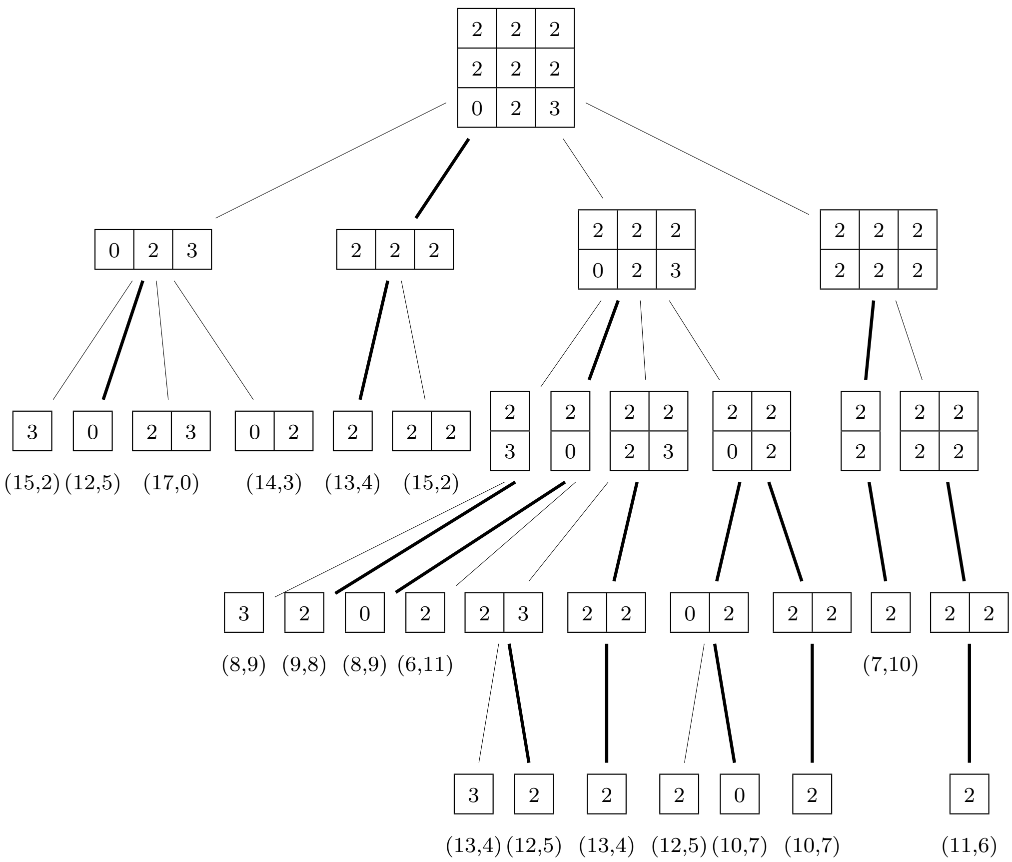
$$3000 - 20000\bigl(1 - 0{\cdot}99^k\bigr) \ge 1000 \ge 3000 - 20000\bigl(1 - 0{\cdot}99^{k+1}\bigr)$$

oziroma

$$0.99^k \ge 0.9 \ge 0.99^{k+1}\,.$$

Ker je $\log_{0.99} 0{\cdot}9 = \frac{\log 0.9}{\log 0.99} \doteq 10{\cdot}48$, v Nashevem ravnovesju natanko 10 prodajalcev prodaja ponarejen med.

2. Drevo igre:



Edino vgnezdeno Nashevo ravnovesje je označeno z odebeljenimi povezavami. Opazimo, da se prvemu igralcu v prvi potezi bolj splača odlomiti kos z vrednostjo 11 kot pa kos z najvišjo vrednostjo 12.

3. Izhodišče dvofaznega modela pogajanja dobimo iz Nashevega ravnovesja matrične igre iz razlik:

	X	Y
A	4	-3
B	-4	3
C	2	1

.

Če drugi igralec igra mešano strategijo $\begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, je najboljši odgovor prvega igralca naslednji:

- A za $0 \le q < 1/3$;
- A in C za $q = 1/3$;
- C za $1/3 < q < 3/4$;
- C in B za $q = 3/4$;
- B za $3/4 < q \le 1$.

Minimum, torej Nashevo ravnovesje, nastopi pri $q = 3/4$. Iz principa indiferentnosti za drugega igralca dobimo, da je to:

$$\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1/8 & 7/8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \right) .$$

Izhodiščna dobitka igralcev sta torej:

$$u = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{39}{8} ,$$
$$v = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{29}{8} .$$

Nato se igralca sporazumeta, da prvi igra C, drugi pa Y: pri tem paru akcij imata največji možni skupni dobitek 9. Nato prvi igralec dobi:

$$\frac{1}{2}\left(9 + \frac{39}{8} - \frac{29}{8}\right) = \frac{41}{8} ,$$

drugi igralec pa dobi:

$$\frac{1}{2}\left(9 - \frac{39}{8} + \frac{29}{8}\right) = \frac{31}{8} .$$

4. a) Koristnostna funkcija prvega igralca pri signalu, ki ga dobi iz stanj ω_2 in ω_3, je glede na akcijo drugega igralca enaka:

	L	C	R
T	$\frac{1+2a}{1-a}$	$\frac{2+2a}{1-a}$	3
B	$\frac{6a}{1-a}$	$\frac{10a}{1-a}$	$\frac{9a}{1-a}$

(in je seveda neodvisna od akcije prvega igralca, ki dobi signal iz stanja ω_1). Akcija T šibko dominira akcijo B natanko tedaj, ko veljajo neenakosti:

$$1 + 2a \geq 6a\,, \qquad 2 + 2a \geq 10a\,, \qquad 3 - 3a \geq 9a\,,$$

vse pa so ekvivalentne neenakosti $a \leq \frac{1}{4}$. Tedaj torej akcija T šibko dominira akcijo B, pri $a < \frac{1}{4}$ pa je dominacija stroga.

b) Gledamo $a = \frac{1}{4}$. Iskana mešana Bayes–Nasheva ravnovesja ustrezajo mešanim Nashevim ravnovesjem naslednje igre med prvim igralcem, ki dobi signal iz stanja ω_1, in drugim igralcem:

	L_{123}	C_{123}	R_{123}
T_1	$6,\ 6$	$7,\ 8$	$1,\ 5$
B_1	$2,\ \frac{21}{4}$	$4,\ 7$	$6,\ \frac{9}{2}$

Akcija C_{123} strogo dominira obe preostali akciji. Ko slednji izločimo, akcija T_1 strogo dominira akcijo B_1. Edino Bayes–Nashevo ravnovesje prvotne igre iskane oblike je torej $(T_1 T_{23}, C_{123})$.

2018/19

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 8. 5. 2019

1. Najboljši odgovor prvega igralca pri akciji y drugega igralca je:

$$B_1(y) = \begin{cases} 0 & ;\ 0 \le y \le \frac{1}{4} \\ 4y - 1 & ;\ \frac{1}{4} \le y \le \frac{1}{2} \\ 1 & ;\ \frac{1}{2} \le y \le 1\,, \end{cases}$$

najboljši odgovor drugega igralca pri akciji x drugega igralca pa je:

$$B_2(x) = \begin{cases} 0 & ;\ 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & ;\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ 1 & ;\ \frac{2}{3} \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Od tod dobimo Nasheva ravnovesja $(0, 0)$, $\left(\frac{5}{11}, \frac{4}{11}\right)$ in $(1, 1)$.

2. Če se s razbojnikov loti plena, imajo tisti, ki se ga lotijo, korist $\frac{16}{s} - s$, ostali pa imajo korist 0. Če se nihče ne loti plena, se vsakemu strogo splača premisliti, saj ima tedaj korist 15. Tudi če se vsi lotijo plena, se vsakemu splača premisliti, saj ima tedaj vsak, ki se loti plena, korist -15. Torej nobeden od teh dveh profilov ni čisto Nashevo ravnovesje.

Naj bo zdaj $0 < s < 16$. Razbojnik, ki se loti plena, ima korist $\frac{16}{s} - s$, če se premisli, pa ima korist 0. Razbojnik, ki se ne loti plena, pa ima korist 0, če se loti plena, pa ima korist $\frac{16}{s+1} - s - 1$. Nashevo ravnovesje nastopi natanko tedaj, ko je:

$$\frac{16}{s} - s \ge 0 \ge \frac{16}{s+1} - s - 1\,.$$

Ker je funkcija $s \mapsto \frac{16}{s} - s$ za $0 < s < 16$ strogo padajoča in ima ničlo pri $s = 4$, Nashevo ravnovesje nastopi, če je $s = 3$ ali $s = 4$, torej če se plena lotijo trije ali štirje razbojniki.

3. Opazimo, da je akcija T strogo dominirana z mešanico $\begin{pmatrix} M & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, brž ko je $\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$. Ko jo izločimo, poiščemo zgornjo ovojnico koristnostne funkcije drugega igralca na mešanicah $\begin{pmatrix} M & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$:

- L za $0 \le p < \frac{1}{2}$.
- L in C za $p = \frac{1}{2}$;
- C za $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$;
- C in R za $p = \frac{2}{3}$;
- R za $\frac{2}{3} < p \le 1$.

Mešana Nasheva ravnovesja:

$$(M, L)\,, \qquad \left(\begin{pmatrix} M & B \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & R \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}\right)\,, \qquad (B, R)\,.$$

4. Če oba igralca izbereta število 1, dobimo sedlo, ki je je čisto Nashevo ravnovesje, vrednost igre pa je enaka 0.

Glede na to, da gre za kvadratno matrično igro, pa lahko iščemo tudi mešana Nasheva ravnovesja, v katerih so zastopane vse akcije. Če prvi igralec igra $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$, drugi pa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{pmatrix}$, iz principa indiferentnosti dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} -p_2 = 2p_1 - p_3 = 2p_2 - p_4 = 2p_3 - p_5 = 2p_4\,, \\ 2q_2 = -q_1 + 2q_3 = -q_2 + 2q_4 = -q_3 + 2q_5 = -q_4\,, \end{aligned}$$

ki ima ob splošnih pogojih $\sum_{i=1}^5 p_1 = \sum_{j=1}^5 q_j = 1$ enolično rešitev $p_1 = q_5 = \frac{1}{7}$, $p_2 = q_2 = p_4 = q_4 = 0$, $p_3 = q_3 = \frac{2}{7}$ in $p_5 = q_1 = \frac{4}{7}$. Ker so to res verjetnosti, je to res mešano Nashevo ravnovesje in spet dobimo, da je vrednost igre enaka 0.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 5. 6. 2019

1. Najprej opazimo, da pri prvem igralcu, ki dobi signal stanja ω_1, akcija B strogo dominira akcijo A. Ko slednjo izločimo, si ogledamo funkcijo koristi drugega igralca, ki prejme signal iz stanj ω_1 in ω_3. Pogojno na signal je v stanju ω_1 z verjetnostjo 2/3 in v stanju ω_3 z verjetnostjo 1/3. Dobimo:

	L_{13}	D_{13}
$B_1 A_{23}$	4	$\frac{11}{3}$
$B_2 B_{23}$	$\frac{13}{3}$	4

in vidimo, da strategija L_{13} strogo dominira strategijo D_{13}. Nadalje izračunamo funkcijo koristi prvega igralca, ki prejme signal iz stanj ω_2 in ω_3; pogojno na ta signal je igra v vsakem od teh stanj z verjetnostjo 1/2:

	$L_{13}L_2$	$L_{13}D_2$
A_{23}	5	6
B_{23}	7	5

Razrešiti moramo igro tega igralca v prirejeni strateški igri z drugim igralcem, ki dobi signal iz stanja ω_2:

	L_2	D_2
A_{23}	$5, 1$	$6, 4$
B_{23}	$7, 6$	$5, 2$

Ta igra ima tri mešana Nasheva ravnovesja, ki dajo naslednja tri Bayes–Nasheva ravnovesja izvirne igre:

$$(B_1 A_{23}, L_{13} D_2)\,, \quad (B_1 B_{23}, L_{13} L_2)\,, \quad \left(B_1 \begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}, \, L_{13} \begin{pmatrix} L_2 & D_2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \right).$$

2. V vozlišču, kjer se P_3 odloča med E in F, le-ta igra E, če je $x > 4$, in F, če je $x < 4$; pri $x = 4$ je indiferenten. V vozlišču, kjer je P_3 odloča med C in D, le-ta igra C, če je $x < 2$, in D, če je $x > 2$; pri $x = 2$ je indiferenten.

Postavimo se zdaj v vozlišče, kjer se P_2 odloča med A in B. Ne glede na to, kako se P_3 odloči, kjer je indiferenten, dobitek igralca P_2 znaša:

$$\begin{cases} 4 & ; x \le 2 \\ 6 - x & ; x \ge 2\,, \end{cases}$$

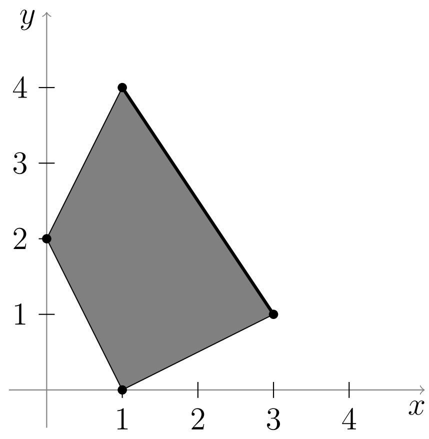
če igra A, in $x + 1$, če igra B. Torej P_2 igra A, če je $x < 5/2$, in B, če je $x > 5/2$; pri $x = 5/2$ je indiferenten.

Končno se postavimo na začetek igre, kjer P_1 izbere x. Ne glede na to, kako igra P_2, dobitek igralca P_1 znaša:

$$\begin{cases} x & ; x \le 2 \\ 4 - x & ; 2 \le x \le 5/2 \\ x - 1 & ; 5/2 \le x \le 4 \\ 15 - 3x & ; x \ge 4\,, \end{cases}$$

kar je maksimalno pri $x = 4$. To je edina vrednost, ki pripada vgnezdenemu Nashevemu ravnovesju te igre.

3. Rešitev leži na daljici med točkama $(1, 4)$ in $(3, 1)$ – glej sliko:



Nosilka te daljice je premica $y = \frac{11-3x}{2}$, torej maksimiziramo izraz:

$$\frac{(x-1)(11-3x)}{2} = -3x^2 + 14x - 11$$

in maksimum je dosežen pri $x = \frac{7}{3}$ in $y = 2$: to sta dobitka igralcev v doseženem sporazumu. Le-tega implementirata s sporazumno mešanico $\begin{pmatrix} (T, L) & (B, R) \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

4. Če Evgen pristopi h koaliciji kot i-ti, je njegov prispevek enak i, če pred njim ni Darje, in $i + 1$, če je pred njim Darja; Darja pa je pred njim s pogojno verjetnostjo $(i-1)/4$. Evgenova Shapleyjeva vrednost je torej enaka:

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \left(i + \frac{i-1}{4} \right) = \frac{7}{2}\,.$$

Nadalje je Darjin prispevek h koaliciji enak 2, če Evgen pristopi pred njo, sicer pa je enak 0. Ker je verjetnost, da Evgen pristopi pred Darjo, enaka 1/2, je Darjina Shapleyjeva vrednost enaka 1. Za Ambroža, Betko ali Ceneta pa velja, da je prispevek enak 1, če Evgen pristopi prej, sicer pa je enak 0. Ti igralci imajo torej Shapleyjevo vrednost 1/2.

Opomba: dovolj je izračunati Shapleyjevo vrednost za dva od teh treh primerov, saj je vsota vseh Shapleyjevih vrednosti enaka dobitku polne koalicije, ta pa je enak 6.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 27. 6. 2019

1. a) Če so vse kuharice stiskaške, ima vsaka korist $1/3$. Kuharica, ki se premisli, da bo radodarna, ima po novem korist $1/4 + z$. Nashevo ravnovesje dobimo, če je $z \leq 1/12$.

Če pa so vse kuharice radodarne, ima vsaka korist $1/6+z$. Kuharica, ki se premisli, da bo stiskaška, ima po novem korist $1/5$. Nashevo ravnovesje dobimo, če je $z \geq 1/30$.

b) Mešano Nashevo ravnovesje dobimo, če velja princip indiferentnosti, t. j. če je za vsako kuharico vseeno, če se premisli, da bo stiskaška, ali pa če se premisli, da bo radodarna. Če se kuharica premisli, da bo stiskaška, bo imela korist:

$$\frac{(1-\rho)^2}{3} + \frac{2\rho(1-\rho)}{4} + \frac{\rho^2}{5},$$

če se premisli, da bo radodarna, pa bo imela korist:

$$\frac{(1-\rho)^2}{4} + \frac{2\rho(1-\rho)}{5} + \frac{\rho^2}{6} + z\,.$$

Odštejemo in po krajšem računu dobimo enačbo:

$$\rho^2 - 4\rho + 5 - 60z = 0\,,$$

ki ima rešitvi:

$$\rho_{1,2} = 2 \pm \sqrt{60z - 1}\,,$$

če je $z \geq 1/60$. Med 0 in 1 je lahko kvečjemu rešitev $\rho = 2 - \sqrt{60z - 1}$, to pa se zgodi za $1/30 < z < 1/12$.

2. V spodnji tabeli so izračunani pričakovani dobitki prvega igralca, če se pri posamezni karti odloči za določeno akcijo, pri čemer se drugi igralec drži strategije, opisane v nalogi:

	igra	ne igra
as	$a + \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 4 = a - \frac{7}{3}$	0
fant	$a + \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 4 = a - \frac{7}{3}$	0
dama	$a + \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 4 = a - \frac{4}{3}$	0
kralj	$a + \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 4 = a + \frac{4}{3}$	0

Strategija se prvemu igralcu splača, če je $0 \geq a - \frac{7}{3}$, $a - \frac{4}{3} \geq 0$ in $a + \frac{4}{3} \geq 0$, kar je res za $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{7}{3}$. Ker je igra simetrična, smo takrat res v Bayes–Nashevem ravnovesju.

3. Če se Bogdan prijavi, se Cirilu splača prijaviti, če je $z < 1/3$, in ne splača, če je $z > 1/3$; pri $z = 1/3$ je Ciril indifereten. Če pa se Bogdan ne prijavi, se Cirilu splača prijaviti, če je $z < 1/2$, in ne splača, če je $z > 1/2$; pri $z = 1/2$ je indifereten.

Ciril je torej lahko ob Bogdanovi prijavi *dinamičen*, kar pomeni, da se pri $z = 1/3$ prijavi, ali pa *konservativen*, kar pomeni, da se pri $z = 1/3$ ne prijavi. Podobno je lahko Ciril ali dinamičen ob Bogdanovi neprijavi – glede na to, kako se odloči pri $z = 1/2$. Cirilove strategije so torej v vgnezdenem Nashevem ravnovesju kvečjemu 4 – glede na to, ali je ob Bogdanovi prijavi oz. neprijavi dinamičen ali konservativen.

Postavimo se v točko, ko je na potezi Bogdan.

- Če je $z < 1/3$, se bo Ciril v vgnezdenem Nashevem ravnovesju prijavil ne glede na Bogdanovo odločitev, prijavil pa se bo tudi Bogdan.
- Naj bo $1/3 < z < 1/2$. Če se Bogdan prijavi, se Ciril ne bo prijavil in Bogdan bo dobil $1 - 2z$. Če pa se Bogdan ne prijavi, se bo Ciril prijavil in Bogdan bo dobil 0. Torej se bo Bogdan prijavil.
- Če je $z > 1/2$, se Ciril v vgnezdenem Nashevem ravnovesju ne bo prijavil in tega tudi Bogdan ne bo storil.
- Če je $z = 1/3$ in je Ciril ob Bogdanovi prijavi dinamičen, Bogdan tako ob prijavi kot neprijavi dobi 0, torej je indiferenten. Če pa je Ciril ob Bogdanovi prijavi konservativen, Bogdan ob prijavi dobi $1/3$, ob neprijavi pa 0, torej se bo prijavil.
- Če je $z = 1/2$ in se Bogdan prijavi, se v vgnezdenem Nashevem ravnovesju Ciril ne prijavi in Bogdan dobi 0, enako, kot če se ne bi prijavil. Torej je indiferenten.

Bogdan je torej lahko tako pri $z = 1/3$ kot pri $z = 1/2$ dinamičen ali konservativen.

V primerih, ko ni dvoma, kako bosta kandidata za delo ravnala, Adrijanova korist znaša:

- $8z - 2$, če je $z < 1/3$;
- $4z - 1$, če je $1/3 < z < 1/2$;
- 0, če je $z > 1/2$.

Supremum koristi dobimo, ko gre z proti $1/2$. Ta supremum je pri $z = 1/2$ tudi dosežen, če je Bogdan pri $z = 1/2$ dinamičen (v ostalih situacijah indiferentnosti pa lahko Bogdan in Ciril ravnata kakor koli). To je torej vgnezdeno Nashevo ravnovesje igre.

4. Igra je superaditivna za $a \geq 6$. Če je delitev (x_1, x_2, x_3) z $x_1 + x_2 + x_3$ v jedru, je $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_1 + x_3 \leq 3$ in $x_2 + x_3 \leq 4$, kar je ekvivalentno zahtevam $x_1 \geq a - 4$, $x_2 \geq a - 3$ in $x_3 \geq a - 5$. Če to seštejemo, dobimo $a = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3a - 12$ oziroma $a \leq 6$. Jedro je torej neprazno kvečjemu za $a = 6$. V tem primeru jedro dejansko ni prazno, saj vsebuje delitev $(2, 3, 1)$: zanjo so izpolnjeni vsi pogoji za jedro.

2017/18

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 15. 12. 2017

1. Označimo s q_1 in q_2 količini blaga, ki ju ustvarita proizvajalca. Koristnostni funkciji znašata:

$$u_1(q_1, q_2) = \frac{aq_1}{\sqrt{q_1 + q_2}} - cq_1\,, \qquad u_2(q_1, q_2) = \frac{aq_2}{\sqrt{q_1 + q_2}} - cq_2\,.$$

Za vsak $q_2 > 0$ je funkcija $q_1 \mapsto u_1(q_1, q_2)$ odvedljiva in velja $\lim_{q_1 \downarrow 0} u_1(q_1, q_2) = 0$ in $\lim_{q_1 \to \infty} u_1(q_1, q_2) = -\infty$. Odvajajmo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = \frac{a(q_1 + 2q_2)}{2(q_1 + q_2)^{3/2}} - c\,, \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial q_1^2} = -\frac{a(q_1 + 4q_2)}{4(q_1 + q_2)^{5/2}}\,.$$

Iz drugega odvoda dobimo, da je funkcija strogo konkavna, torej globalni maksimum na $(0, \infty)$ ustreza točki, kjer je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ (in $q_1 > 0$); taka točka je kvečjemu ena. Podobno dobimo tudi za u_2. Nashevo ravnovesje je torej kvečjemu eno in to je točka, kjer je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = \frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0$ oziroma:

$$\frac{a(q_1 + 2q_2)}{2(q_1 + q_2)^{3/2}} = c\,, \qquad \frac{a(2q_1 + q_2)}{2(q_1 + q_2)^{3/2}} = c\,,$$

kar je ekvivalentno:

$$\frac{2(q_1 + q_2)^{3/2}}{a} = \frac{q_1 + 2q_2}{c} = \frac{2q_1 + q_2}{c}\,.$$

Iz zadnje enačbe po krajšem računu sledi $q_1 = q_2$. Vstavimo v enačbo in spet po krajšem računu dobimo edino Nashevo ravnovesje:

$$q_1 = q_2 = \frac{9a^2}{32c^2}\,.$$

2. Označimo zgornjo pot z G, spodnjo pot z D, pot z "navpično" cesto, ki vzame 10 časovnih enot, pa z N: to so možne akcije v ustrezni strateški igri. Naj g voznikov ubere pot G, d voznikov pot D, preostalih $4000 - g - d$ pa pot N. Naj bo p_i akcija, t_i pa potovalni čas i-tega voznika (to je preferenčna funkcija, le da velja urejenost v nasprotno smer). Naj bo še $\mathbf{p}$ profil vseh akcij. Tedaj velja:

$p_i = G$:

$$t_i(\mathbf{p}) = \frac{4000-d}{200} + 40\,, \qquad t_i(\mathbf{p} \mid D) = 40 + \frac{4000-g+1}{100}\,,$$
$$t_i(\mathbf{p} \mid N) = \frac{4000-d}{200} + 10 + \frac{4000-g+1}{100}\,,$$

$p_i = D$:

$$t_i(\mathbf{p}) = 40 + \frac{4000-g}{100}\,, \qquad t_i(\mathbf{p} \mid G) = \frac{4000-d+1}{200} + 40\,,$$
$$t_i(\mathbf{p} \mid N) = \frac{4000-d+1}{200} + 10 + \frac{4000-g}{100}\,.$$

$p_i = N$:

$$t_i(\mathbf{p}) = \frac{4000-d}{200} + 10 + \frac{4000-g}{100}\,, \quad t_i(\mathbf{p} \mid G) = \frac{4000-d}{200} + 40\,,$$
$$t_i(\mathbf{p} \mid D) = 40 + \frac{4000-g}{100}\,.$$

Profil je Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko so izpolnjeni naslednji pogoji:

- Brž ko je $g > 0$, je $2g - d \le 4002$ in $g \le 1001$.
- Brž ko je $d > 0$, je $2g - d \ge 3999$ in $d \le -1999$.
- Brž ko je $g + d < 4000$, je $g \ge 1000$ in $d \ge -2000$.

Iz drugega pogoja dobimo, da je $d = 0$. Pogoja se tako zreducirata na:

- Brž ko je $g > 0$, je $g \le 1001$.
- Brž ko je $g < 4000$, je $g \ge 1000$.

Edini možnosti sta $g = 1000$ in $g = 1001$. Dobimo torej dve skupini čistih Nashevih ravnovesij:

- Pot G ubere 1000, pot N pa 3000 voznikov.
- Pot G ubere 1001, pot N pa 2999 voznikov.

3. Opazimo naslednje:

- Mešanica $\begin{pmatrix} E & H \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ strogo dominira akcijo G, brž ko je $2/5 < q < 1/2$.
- Ko odstranimo akcijo G, mešanica $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ strogo dominira akcijo C, brž ko je $1/3 < p < 2/3$.

Pri prvem igralcu torej ostaneta samo akciji A in B. Zgornja ovojnica akcij drugega igralca glede na njegovo koristnostno funkcijo je pri mešani strategiji $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ naslednja:

- E za $0 \le p < 2/7$;

- E in H za $p = 2/7$;
- H za $2/7 < p < 7/9$;
- H in F za $p = 7/9$;
- F za $7/9 < p \leq 1$.

Ko pogledamo še koristnostno funkcijo prvega igralca, dobimo naslednja mešana Nasheva ravnovesja:

$$(A, E)\,, \quad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 2/9 & 7/9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F & H \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{in} \quad (B, F)\,.$$

4. Če je strategija, ki jo uporabljajo investitorji, čista, sta dve možnosti:

- Nihče ne investira. Tedaj so vsi na ničli. Kdor bi se premislil, da bi investiral, bi imel izgubo. Torej je to čisto Nashevo ravnovesje.
- Investirajo vsi trije. Tedaj imajo dobiček, ki ga ne bi imeli, če ne bi investirali. Torej je to čisto Nashevo ravnovesje.

Oglejmo si še primer, ko je ta strategija mešana, torej ko vsak investira z verjetnostjo $p \in (0, 1)$. Če bi se premislil in zagotovo ne bi investiral, bi bil na ničli. Če pa bi se premislil in bi zagotovo investiral, bi njegov pričakovani dobiček znašal:

$$(1 - p)^2 \cdot (-1) + 2p(1 - p) \cdot 1 + p^2 \cdot 2 = -p^2 + 4p - 1\,.$$

Po principu indiferentnosti mora biti oboje enako. Enačba $-p^2 + 4p - 1$ ima rešitvi $p_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, ustrezna pa je le rešitev z negativnim korenom. Torej vsak investira z verjetnostjo $2 - \sqrt{3} \doteq 0{\cdot}268$.

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 12. 2. 2018

1. Igra ima štiri stanja, ki jih lahko označimo s GG, GC, CG in CC. Vsa so enako verjetna. Prvi igralec dobi en signal iz stanj GG in GC in drugega iz stanj CG in CC, drugi igralec pa dobi en signal iz stanj GG in CG in drugega iz stanj GC in CC. Ustrezna signala označimo kar z G in C ter skladno s tem tudi označimo akcije igralcev s signali.

V skladu z namigom si oglejmo koristnostno funkcijo prvega igralca, ki vidi cifro:

	$L_G L_G$	$L_G R_C$	$R_C L_G$	$R_C R_C$
A_C	4	4	1	1
B_C	$4{\cdot}5$	5	$6{\cdot}5$	7

in opazimo, da akcija B_C strogo dominira akcijo A_C, torej lahko slednjo odstranimo. Nato si ogledamo koristnostno funkcijo drugega igralca, ki vidi grb, pri čemer akcije A_C ni treba gledati:

	L_G	R_G
$A_G B_C$	$3{\cdot}5$	$4{\cdot}5$
$B_G B_C$	$4{\cdot}5$	$5{\cdot}5$

Sledi, da akcija R_G strogo dominira akcijo L_G (tega ne moremo sklepati, preden odstranimo akcijo A_C, saj se pri kombinacijah $A_G A_C$ in $B_G A_C$ akcija L_G strogo bolj splača kot R_G). Preostane le še igra med prvim igralcem, ki vidi grb, in drugim igralcem, ki vidi cifro:

	L_C	R_C
A_G	$6\ ,4$	$3\ ,3$
B_G	$3{\cdot}5, 3$	$5{\cdot}5, 5$

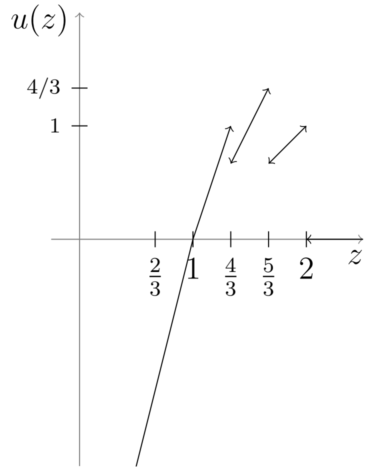
Iz Nashevih ravnovesij te igre dobimo naslednja Bayes–Nasheva ravnovesja prvotne igre:

$$(A_G B_C, R_G L_C)\,, \quad (B_G B_C, R_G R_C) \quad \text{in}$$
$$\left(\begin{pmatrix} A_G & B_G \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} B_C\,,\; R_G \begin{pmatrix} L_C & R_C \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right)\,.$$

2. V dobljeni ekstenzivni igri delodajalec na koncu dobi $m(z-1)$, kjer je m število delavcev, ki so sprejeli službo, za delavce pa je jasno, koliko dobijo. Če posamezen delavec igra racionalno, zagotovo sprejme službo, če je njegova korist od tega strogo pozitivna, in zagotovo zavrne, če je strogo negativna. V primeru, ko je enaka nič, pa je indiferenten med obema možnostma. Tako ima glede na to, ali v primeru indiferentnosti sprejme službo ali ne, dve možni racionalni strategiji. Če v primeru ničelne koristi sprejme službo, bomo rekli, da je *dinamičen*, sicer pa, da je *konservativen.*

Za večino vrednosti z je korist delodajalca, če delavci ravnajo racionalno, natančno določena, tako kot je opisano s spodnjo formulo in prikazano na sliki:

$$u(z) = \begin{cases} 4(z-1) & ; \frac{2}{3} < z \leq 1 \\ 3(z-1) & ; 1 < z < \frac{4}{3} \\ 2(z-1) & ; \frac{4}{3} < z < \frac{5}{3} \\ z-1 & ; \frac{5}{3} < z < 2 \\ 0 & ; z > 2\,. \end{cases}$$



Korist v ostalih točkah pa je odvisna od strategij delavcev. Če grafu funkcije priključimo točko $(5/3, 4/3)$, je tam dosežen maksimum. To se zgodi, če je tretji delavec dinamičen. Vgnezdeno Nashevo ravnovesje torej nastopi natanko tedaj, ko delodajalec postavi zahtevo $5/3$, tretji delavec pa je dinamičen. Za preostale delavce je vseeno, kakšno strategijo postavijo, torej imamo formalno gledano $2^3 = 8$ vgnezdenih Nashevih ravnovesij. V njih sta zaposlena dva delavca – eden ima korist nič, drugi pa $1/6$, delodajalec pa ima korist $4/3$.

3. Izhodišče dvofaznega modela pogajanja dobimo iz Nashevega ravnovesja matrične igre iz razlik:

	X	Y
A	-4	3
B	4	-3
C	-2	-1

.

V tej igri mešanica $\begin{pmatrix} A & B \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ strogo dominira akcijo C, igra pa ima edino mešano Nashevo ravnovesje $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \right)$. Izhodiščna dobitka obeh igralcev sta $23/7$. Nato se igralca sporazumeta, da prvi igra C, drugi pa Y: pri tem paru akcij imata največji možni skupni dobitek 9. Le-tega si razdelita na pol, ker sta njuna izhodiščna izkupička enaka: potem ko dobita vsak svoje, drugi plača prvemu $1/2$ enote.

4. Zaradi simetrije je dovolj izračunati Shapleyjevi vrednosti števil 1 in 2: velja $x_1 = x_4$ in $x_2 = x_3$. Izračunajmo najprej x_1.

- Če število 1 pristopi h koaliciji kot prvo, ne spremeni dobitka koalicije.
- Če pristopi kot drugo, poveča dobitek za $y - 1$, kjer je y število, ki je pristopilo kot prvo.
- Če pristopi kot tretje, se dobitek poveča za 1, če je prej že pristopilo število 2, sicer pa se dobitek poveča za 2.
- Če pristopi kot zadnje, se dobitek poveča za 1.

Sledi:

$$x_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(1+2+3) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{13}{12}\,.$$

Podobno izračunamo še x_2:

- Če število 2 pristopi h koaliciji kot prvo, ne spremeni dobitka koalicije.
- Če pristopi kot drugo, poveča dobitek za 1, če je pred njim število 1 ali 3; če je pred njim 4, poveča dobitek za 2.
- Če pristopi kot tretje, se dobitek poveča za 1, če sta pred njim pristopili števili 3 in 4; sicer se dobitek ne spremeni.
- Če pristopi kot zadnje, se dobitek ne spremeni.

Sledi:

$$x_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{5}{12}\,.$$

V resnici bi bilo dovolj izračunati le eno Shapleyjevo vrednost, saj dobitek polne koalicije znaša $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(x_1 + x_2) = 3$.

2016/17

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 18. 4. 2017

1. a) Naj i-ta družina redi k_i koz. Njen dobitek bo enak:

$$k_i\, e^{-0.4(k_1+k_2+\cdots+k_n)}\,.$$

Ne glede na to, koliko koz redijo preostale družine, bo dobitek i-te družine maksimalen, ko bo vrednost $k_1\, e^{-0.4k_i}$ maksimalna. Po krajšem računu dobimo, da se to zgodi pri $k_i = 3$. V edinem čistem Nashevem ravnovesju torej vsaka družina redi tri koze.

b) Naj vse družine skupaj redijo k koz in si razdelijo mleko. Tedaj je korist posamezne družine enaka $\frac{k}{n}\, e^{-0.4k}$, kar je maksimalno pri $k = 3$. Z drugimi besedami, za skupno dobro bi bilo optimalno, če bi vse družine *skupaj* redile tri koze. Tedaj bi imela vsaka družina korist $\frac{3}{n}\, e^{-1.2}$. V Nashevem ravnovesju pa ima posamezna družina korist $3\, e^{-1.2\, n}$. Pri $n = 1$ je to enako, pri $n > 1$ pa ne, saj velja neenakost $\frac{3}{n}\, e^{-1.2} > 3\, e^{-1.2\, n}$, ki je ekvivalentna neenakosti $e^{1.2(n-1)} > n$, slednjo pa lahko pokažemo z indukcijo po n: za $n = 2$ dobimo $e^{1.2} > 2$, kar je res, indukcijski korak pa je veriga neenakosti $e^{1.2\, n} = e^{1.2}\, e^{1.2(n-1)} > n\, e^{1.2} > 2n > n + 1$.

Sklep: Nashevo ravnovesje je za skupno dobro optimalno le pri $n = 1$.

2. Najprej opazimo, da za $1/2 < p < 2/3$ mešanica $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ strogo dominira akcijo C. Ko slednjo izločimo, vidimo, da za $1/3 < q < 2/3$ mešanica $\begin{pmatrix} X & W \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ strogo dominira akcijo Z. Če prvi igralec meša $\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, je najboljši odgovor drugega igralca:

- Y za $0 \le p < 2/5$;
- Y in X za $p = 2/5$;
- X za $2/5 < p < 1/2$;
- X in W za $p = 1/2$;
- W za $1/2 < p \le 1$.

Zdaj pa pogledamo, kako se na tej zgornji ovojnici obnaša koristnostna funkcija prvega igralca. Za $0 \le p < 2/5$ upoštevamo $U_1(A, Y) > U_2(B, Y)$, kar pomeni, da mora biti $p = 0$. Dobimo čisto Nashevo ravnovesje:

$$(A, Y)\,.$$

Za $p = 2/5$ iz principa indiferentnosti dobimo mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right).$$

Za $2/5 < p < 1/2$ ne dobimo ničesar, saj ni indiferentnosti. Prav tako tudi ničesar ne dobimo pri $p = 1/2$. Končno za $1/2 < p \le 1$ upoštevamo $U_1(A, W) < U_2(B, W)$, kar pomeni, da mora biti $p = 1$, in dobimo čisto Nashevo ravnovesje:

$$(B, W)\,.$$

3. Najprej opazimo, da tretji stolpec dominira drugega, torej lahko drugi stolpec izločimo. V zoženi igri druga vrstica dominira tretjo. Tako se problem prevede na vrednost matrične igre:

$$\begin{bmatrix} a & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Če je $a \geq 3$, prva vrstica dominira drugo in vrednost igre je $\min\{a, 5\}$. Za $a < 3$ pa ni dominacij in vrednost igre je enaka $\frac{a-15}{a-7}$. Sklep: vrednost igre je enaka:

$$v = \begin{cases} \frac{a-15}{a-7} & ; a \leq 3 \\ a & ; 3 \leq a \leq 5 \\ 5 & ; a \geq 5 . \end{cases}$$

4. Gre za matrično igro z matriko:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oglejmo si najprej ravnovesja, kjer oba strogo mešata vse akcije. Označimo s p_i verjetnost, da prvi igralec pove število i, s q_j pa verjetnost, da drugi igralec pove število j. Iz principa indiferentnosti za drugega igralca dobimo:

$$p_2 = p_1 - p_3 = -p_2 + p_4 = p_3 - p_5 = -p_4 + p_6 = p_5 ,$$

od koder po krajšem računu (ob upoštevanju, da je vsota verjetnosti enaka ena) dobimo:

$$p_1 = \frac{1}{4} , \quad p_2 = \frac{1}{12} , \quad p_3 = \frac{1}{6} , \quad p_4 = \frac{1}{6} , \quad p_5 = \frac{1}{12} , \quad p_6 = \frac{1}{4} .$$

Na enak način dobimo tudi:

$$q_1 = \frac{1}{4} , \quad q_2 = \frac{1}{12} , \quad q_3 = \frac{1}{6} , \quad q_4 = \frac{1}{6} , \quad q_5 = \frac{1}{12} , \quad q_6 = \frac{1}{4} .$$

Igra ima torej eno samo Nashevo ravnovesje, kjer oba igralca strogo mešata vse akcije. Pri takih igrah pa to pomeni, da je to tudi edino mešano Nashevo ravnovesje.

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 6. 6. 2017

1. Opazimo, da pri prvem igralcu v stanju ω_1 akcija B strogo dominira obe preostali akciji. Preostaneta prvi igralec v stanju ω_2 in drugi igralec. Za ta dva dobimo naslednjo strateško igro:

	L_{12}	D_{12}
A_2	$8,4$	$0,3$
B_2	$1,3$	$7,4$
C_2	$6,2$	$5,4$

.

Naj drugi igralec meša L_{12} z verjetnostjo $1-p$ in D_{12} z verjetnostjo p. S primerjavo koristnostnih funkcij prvega igralca dobimo naslednje možnosti na zgornji ovojnici:

- Če je $0 \leq p < 2/7$, prvi igralec nujno igra A, takrat pa mora drugi nujno igrati L, kar ustreza predpostavki o p. Dobimo čisto Bayesovo ravnovesje $(B_1 A_2, L_{12})$.
- Če je $p = 2/7$, je prvi igralec indiferenten med A in C. A tudi drugi igralec mora biti indiferenten med L in D, od koder dobimo mešano Bayesovo ravnovesje $\left(B_1 \begin{pmatrix} A_2 & C_2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{12} & D_{12} \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}\right)$.
- Če je $2/7 < p < 5/7$, mora prvi igralec nujno igrati C, tedaj pa mora drugi nujno igrati D. To pa je v nasprotju s predpostavko o p.
- Če je $p = 5/7$, je prvi igralec indiferenten med B in C. Pri kakršni koli mešanici teh dveh akcij mora drugi igralec nujno igrati D, kar je spet v nasprotju s predpostavko o p.
- Če je $5/7 < p \leq 1$, mora prvi igralec nujno igrati B, takrat pa mora drugi igralec nujno igrati D, kar ustreza predpostavki o p. Dobimo čisto Bayesovo ravnovesje $(B_1 B_2, D_{12})$.

2. Poiščimo najprej vgnezdena Nasheva ravnovesja.

- Za $x < 3$ je edino vgnezdeno Nashevo ravnovesje (AEH, C) in vektor koristnosti je $(2, 1)$.
- Za $x > 3$ je edino vgnezdeno Nashevo ravnovesje (BEH, D) in vektor koristnosti je $(3, x)$.
- Za $x = 3$ imamo dve vgnezdeni Nashevi ravnovesji, in sicer (AEH, C) z vektorjem koristnosti je $(2, 1)$ in (BEH, D) z vektorjem koristnosti $(3, 3)$.

Pripadajoča strateška igra ima tabelo:

	C	D
AEG	$2,1$	$2,1$
AEH	$2,1$	$2,1$
AFG	$2,1$	$2,1$
AFH	$2,1$	$2,1$
BEG	$1,3$	$0,1$
BEH	$1,3$	$3,x$
BFG	$0,1$	$0,1$
BFH	$0,1$	$3,x$

Ta igra ima pri vseh x čista Nasheva ravnovesja (AEG, C), (AEH, C), (AFG, C) in (AFH, C) in tam je vektor koristnosti $(2, 1)$. Pri $x \geq 1$ igra pridobi še čisto Nashevo ravnovesje (BFH, D), pri $x \geq 3$ pa še čisto Nashevo ravnovesje (BEH, D). V obeh slednjih je vektor koristnosti $(3, x)$.

Od tod vidimo, da pri $1 \leq x < 3$ v čistem Nashevem ravnovesju (BFH, D) oba igralca dobita strogo več kot v edinem vgnezdenem Nashevem ravnovesju (AFH, C). Pri ostalih x pa za vsako čisto Nashevo ravnovesje obstaja vgnezdeno Nashevo ravnovesje, kjer oba igralca dobita več ali enako kot v prvem ravnovesju.

3. Pri neprenosljivi dobrini moramo izračunati maksimum Nashevega produkta $(x + 9)(y + 4)$ v S. Ta bo dosežen na robu množice, torej tam, kjer je $y = 1/x$. Funkcija:

$$f(x) = (x + 9)\left(\frac{1}{x} + 4\right) = 37 + 4x + \frac{9}{x}$$

doseže maksimum pri $x = -3/2$; tam je $y = -2/3$ in to je sporazum.

Pri prenosljivi dobrini pa moramo izračunati maksimum vsote $x + y$ na množici S. Le-ta bo spet dosežen na njenem robu, torej maksimiziramo $x + 1/x$. Maksimum je dosežen pri $x = -1$ in je enak -2. V sporazumu je potem:

$$x = \frac{-2 - 9 + 4}{2} = -\frac{7}{2}, \qquad y = \frac{-2 + 9 - 4}{2} = \frac{3}{2}$$

Igralca to izvedeta tako, da izhajata iz $(-1, -1)$, nakar prvi igralec drugemu plača $5/2$.

4. Lastnike, ki so dobili račun za 400€, imenujmo *mali*, lastnika, ki sta dobila račun za 740€, pa naj bosta *velika*.

- Posameznemu lastniku se ne splača najeti odvetnika, torej karakteristična funkcija zanj znaša -400€, če je mali lastnik, in -740€, če je veliki lastnik.
- Prav tako se odvetnika ne splača najeti dvema malima lastnikoma: zanju karakteristična funkcija znaša -800€.
- Vsem ostalim koalicijam pa se splača najeti odvetnika in karakteristična funkcija za tako koalicijo znaša -1000€.

Izračunajmo zdaj Shapleyjevo vrednost za velikega lastnika.

- Če vstopi v koalicijo kot prvi, njegov prispevek znaša -740€. To se zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{5}$.
- Če vstopi v koalicijo kot drugi, prvi, ki vstopi, pa je veliki lastnik, njegov prispevek znaša -260€. To se zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
- Če vstopi v koalicijo kot drugi, prvi, ki vstopi, pa je mali lastnik, njegov prispevek znaša -600€. To se zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$.
- Če vstopi v koalicijo kot tretji, prva dva, ki vstopita, pa sta mala, njegov prispevek znaša -200€. To se zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.
- V vseh ostalih primerih prispevek velikega lastnika znaša 0€.

Veliki lastnik mora torej za odvetnika prispevati:

$$\frac{1}{5} \cdot 740€ + \frac{1}{20} \cdot 260€ + \frac{3}{20} \cdot 600€ + \frac{1}{10} \cdot 200€ = 271€\,,$$

mali lastnik pa mora prispevati:

$$\frac{1000€ - 2 \cdot 271€}{3} \doteq 152{,}67€\,.$$

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 26. 6. 2017

Finančna matematika

1. a) Oglejmo si nekega študenta. Če med preostalimi študenti dva pišeta hitro, dva pa počasi, se mu bo bolj splačalo pisati počasi, pri vseh ostalih čistih strategijah ostalih študentov pa se mu bolj splača pisati hitro. Od tod dobimo dve vrsti čistih Nashevih ravnovesij:

- vsi pišejo hitro (1 ravnovesje);
- dva pišeta hitro, trije pa počasi (10 ravnovesij).

b) Denimo, da vsak študent z verjetnostjo $1-p$ piše hitro, z verjetnostjo p pa počasi ($0 < p < 1$). Če se posamezen študent premisli in piše hitro, je njegov pričakovani izkupiček enak:

$$\left[(1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2\right] \cdot 70\% + \left[4p^3(1-p) + p^4\right] \cdot 100\%\,,$$

če se premisli in piše počasi, pa je njegov pričakovani izkupiček enak:

$$\left[(1-p)^4 + 4p(1-p)^3\right] \cdot 65\% + \left[6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4\right] \cdot 95\%\,.$$

Po principu indiferentnosti mora biti oboje enako. Izenačimo in po ureditvi dobimo:

$$p^2(1-p)^2 = \frac{1}{36}\,.$$

Ta enačba ima štiri rešitve, od katerih sta naslednji dve med 0 in 1:

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \qquad \text{oziroma} \quad p_1 \doteq 0{\cdot}211\,, \quad p_2 \doteq 0{\cdot}789\,.$$

2. Pri prvem igralcu, ki ne ve, ali je v ω_2 ali ω_3, akcija C strogo dominira obe ostali akciji. Tako se igra zreducira na naslednjo igro med prvim igralcem, ki ve, da je v stanju ω_1, in drugim igralcem:

	L_{123}	D_{123}
A_1	$5,1$	$4,2$
B_1	$7,5$	$0,3$
C_1	$3,4$	$6,2$

Oglejmo si zgornjo ovojnico koristnostne funkcije prvega igralca, če drugi igralec meša $\begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 1-q & q \end{pmatrix}$. Dobimo:

- B_1 za $0 \le q < 1/3$;
- B_1 in A_1 za $q = 1/3$;
- A_1 za $1/3 < q < 1/2$;

- A_1 in C_1 za $q = 1/2$;
- C_1 za $1/2 < q \leq 1$.

Zdaj pa pogledamo, kako se na zgornji ovojnici obnaša koristnostna funkcija drugega igralca. Za $0 \leq q < 1/3$ upoštevamo, da je $U_{2;123}(B_1 C_{12}, L_{123}) > U_{2;123}(B_1 C_{12}; D_{123})$, kar pomeni, da mora biti $q = 0$. Dobimo čisto Bayesovo ravnovesje:

$$(B_1 C_{12}, L_{123})\,.$$

Za $q = 1/3$ iz principa indiferentnosti dobimo mešano Bayesovo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} C_{12}\,,\ \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right)\,.$$

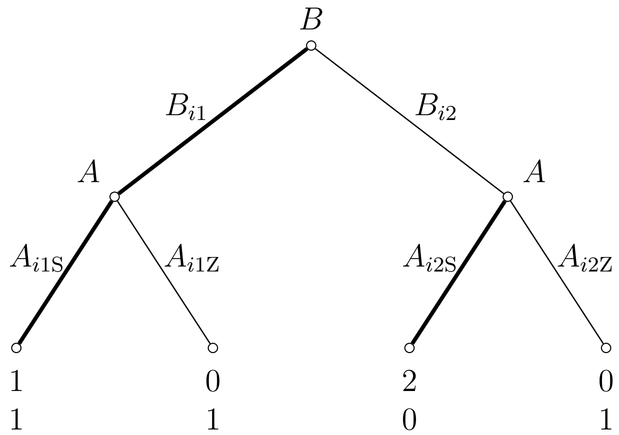
Za $1/3 < q < 1/2$ ne dobimo ničesar, saj ni indiferentnosti. Za $q = 1/2$ pa spet iz principa indiferentnosti dobimo mešano Bayesovo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} C_{12}\,,\ \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right)\,.$$

Končno za $1/2 < q \leq 1$ upoštevamo $U_{2;123}(B_1 C_{12}, L_{123}) > U_{2;123}(B_1 C_{12}; D_{123})$, kar pomeni, da mora biti $q = 0$, to pa je protislovje – ne dobimo Bayesovega ravnovesja.

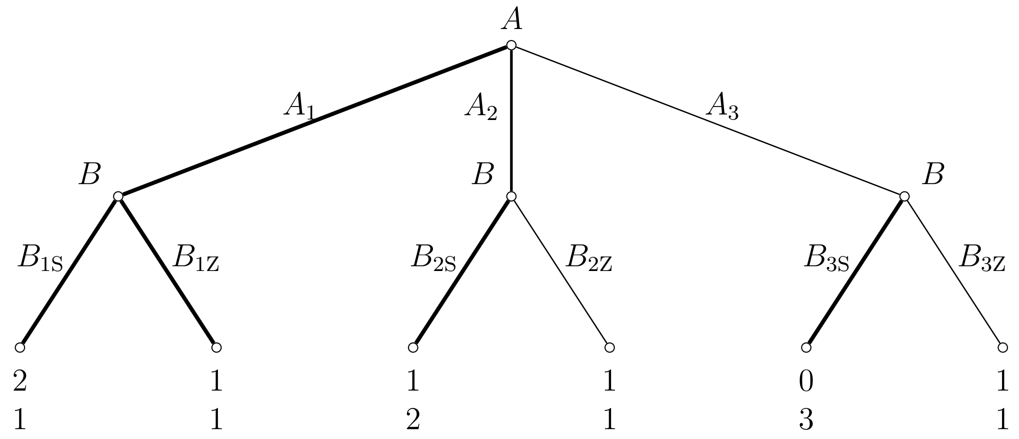
3. Ko so v igri še vsi trije kovanci, ima Alfred možne akcije A_1, A_2 in A_3. Nato lahko Bernard ponudbo sprejme ali pa zavrne: označimo to z $B_{i\mathrm{S}}$ oziroma $B_{i\mathrm{Z}}$, kjer je i prvotna Alfredova ponudba. Če Bernard ponudbo zavrne, lahko pripravi protiponudbi B_{i1} in B_{i2}. Nato lahko Alfred ponudbo sprejme ali zavrne, označimo to z $A_{ij\mathrm{S}}$ oziroma $A_{ij\mathrm{Z}}$, kjer je i spet prvotna Alfredova, j pa Bernardova akcija.

Igro začnemo reševati tako kot vse ekstenzivne igre: od spodaj navzgor. Ko ostaneta le še dva kovanca, ne glede na prvotno Alfredovo ponudbo, ki jo Bernard zavrne, dobimo naslednje drevo igre:



Ta igra ima edino vgnezdeno Nashevo ravnovesje $(A_{i1\mathrm{S}}, B_{i1})$, kjer vsak od igralcev dobi po en kovanec.

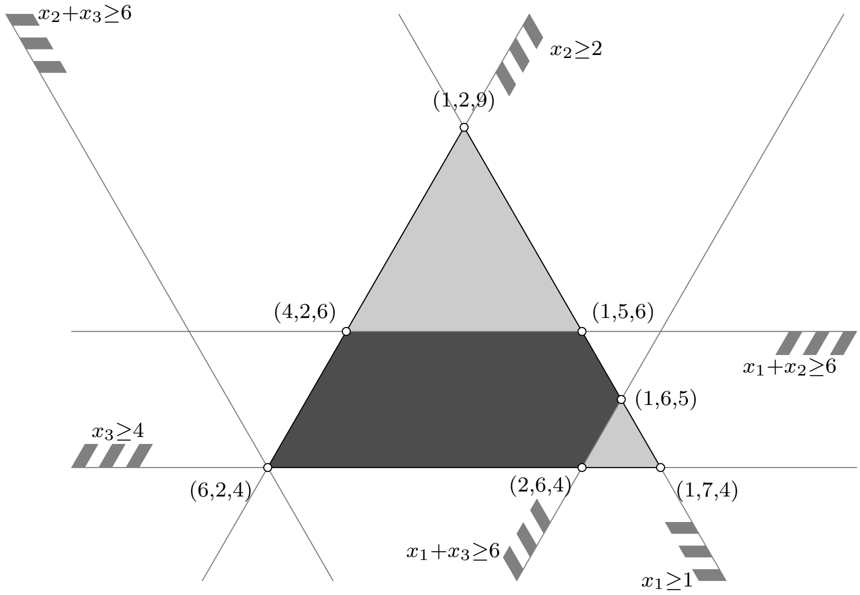
Postavimo se sedaj na začetek igre in v primeru, ko Bernard ponudbo zavrne, za dobitka postavimo kar tista iz vgnezdenega Nashevega ravnovesja nadaljnje igre. Dobimo drevo:



(črte so treh debelin: najdebelejše so poteze, ki se jih igralcu splača povleči pri vseh vgnezdenih Nashevih ravnovesjih nadaljnje podigre, najtanjše so tiste, ki se jih igralcu ne splača povleči pri nobenem vgnezdenem Nashevem ravnovesju nadaljnje podigre, srednje debele pa tiste, ki se jih igralcu pri določenih vgnezdenih ravnovesjih nadaljnje podigre splača, pri določenih pa ne splača povleči). Vgnezdena Nasheva ravnovesja so:

$$
\begin{aligned}
&(A_1 A_{11\mathrm{S}} A_{21\mathrm{S}} A_{31\mathrm{S}},\ B_{1\mathrm{S}} B_{2\mathrm{S}} B_{3\mathrm{S}} B_{11} B_{21} B_{31})\,,\\
&(A_1 A_{11\mathrm{S}} A_{21\mathrm{S}} A_{31\mathrm{S}},\ B_{1\mathrm{Z}} B_{2\mathrm{S}} B_{3\mathrm{S}} B_{11} B_{21} B_{31}) \quad \text{in}\\
&(A_2 A_{11\mathrm{S}} A_{21\mathrm{S}} A_{31\mathrm{S}},\ B_{1\mathrm{Z}} B_{2\mathrm{S}} B_{3\mathrm{S}} B_{11} B_{21} B_{31})\,.
\end{aligned}
$$

4. Funkcija v je superaditivna za $6 \le a \le 8$. Za $a = 6$ so imputacije in jedro prikazani na naslednji skici:



$x_2+x_3 \geq 6$
$x_2 \geq 2$
(1,2,9)
(4,2,6)
(1,5,6)
$x_1+x_2 \geq 6$
(1,6,5)
$x_3 \geq 4$
(6,2,4)
(2,6,4)
(1,7,4)
$x_1+x_3 \geq 6$
$x_1 \geq 1$

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 22. 8. 2017

Finančna matematika

1. Označimo s $p(k, l)$ pričakovani dobitek igralca, ki izbere l številk, pri čemer njegova protiigralca izbereta k številk. Nashevo ravnovesje nastopi, ko je $p(k, k) \geq p(k, l)$ za vse l. Iz:

$$
\begin{aligned}
p(1,1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot 1 &< p(1,2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2\,, \\
p(2,1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot 1 &< p(2,2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot 2 > \\
&> p(2,3) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3 > \\
&> p(2,4) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 4 > \\
&> p(2,5) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot 5 > \\
&> p(2,6) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 6\,, \\
p(2,l) = 0 \ &\text{ za vse } l > 6\,, \\
p(3,2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot 2 &> p(3,3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot 3\,, \\
p(4,1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{4} \cdot 1 &> p(4,4) = 0\,, \\
p(k,l) = 0 \ &\text{ za vse } k > 4 \text{ in vse } l > 0
\end{aligned}
$$

dobimo, da Nashevo ravnovesje nastopi, če bodisi vsak igralec izbere dve številki bodisi vsak igralec izbere več kot štiri številke.

2. Najprej za vsakega igralca z vrednostjo komponente, ki jo pozna (to je njegov signal) izračunajmo pogojno porazdelitev druge komponente in nato pripadajočo koristnostno funkcijo:

$P_{1,\alpha}\colon \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

	$L_\gamma L_\delta$	$L_\gamma R_\delta$	$R_\gamma L_\delta$	$R_\gamma R_\delta$
T_α	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$
B_α	$2\frac{2}{3}$	3	$4\frac{2}{3}$	5

$P_{1,\beta}\colon \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

	$L_\gamma L_\delta$	$L_\gamma R_\delta$	$R_\gamma L_\delta$	$R_\gamma R_\delta$
T_β	4	4	1	1
B_β	2	4	4	6

$P_{2,\gamma}\colon \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

	L_γ	R_γ
$T_\alpha T_\beta$	7	$\frac{2}{3}$
$T_\alpha B_\beta$	5	$2\frac{2}{3}$
$B_\alpha T_\beta$	5	2
$B_\alpha B_\beta$	3	4

$P_{2,\delta}\colon \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

	L_δ	R_δ
$T_\alpha T_\beta$	1	3
$T_\alpha B_\beta$	$1\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{3}$
$B_\alpha T_\beta$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
$B_\alpha B_\beta$	$3\frac{1}{3}$	3

Sledimo namigu in opazimo, da pri igralcu $P_{1,\alpha}$ akcija B_α strogo dominira akcijo T_α. Ko slednjo izločimo, dobimo, da pri igralcu $P_{2,\delta}$ akcija L_δ strogo dominira akcijo R_δ (če ne izločimo T_α, pa te dominacije ni). Preostane le še naslednja igra med $P_{1,\beta}$ in $P_{2,\gamma}$:

$P_{1,\beta} \backslash P_{2,\gamma}$	L_γ	R_γ
T_β	$4, 5$	$1, 2$
B_β	$2, 3$	$4, 4$

Ta igra ima čisti Nashevi ravnovesji (T_β, L_γ) in (B_β, R_γ). Ker nikjer ni ustreznega ujemanja vrednosti, kombinacij čisto–mešano ni. Preostane le še, da oba mešata. Iz principa indiferentnosti dobimo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} T_\beta & B_\beta \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_\gamma & R_\gamma \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$ mešano Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $4-3q = 2+2q$ in $5-2p = 2+2p$, torej $p = 3/4$ in $q = 2/5$. Izvirna igra ima torej naslednja tri mešana Bayes–Nasheva ravnovesja:

$$(B_\alpha T_\beta, L_\gamma L_\delta)\,, \qquad (B_\alpha B_\beta, R_\gamma L_\delta) \quad \text{in} \quad \left(B_\alpha \begin{pmatrix} T_\beta & B_\beta \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_\gamma & R_\gamma \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} L_\delta\right).$$

3. Če država B proizvede količino q, ima od tega korist:

$$u_B(\rho, q) = \frac{(1+q)^{3/4}}{1+\rho} - \frac{q}{2}\,,$$

če je $q > 0$, in 0, če je $q = 0$. Opazimo, da je $\lim_{q\downarrow 0} u_B(\rho, q) = 1/(1+\rho)$ in $\lim_{q\to\infty} u_B(\rho, q) = -\infty$. Iz parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial u_B}{\partial q}(\rho, q) = \frac{3}{4(1+\rho)(1+q)^{1/4}} - \frac{1}{2}$$

in pogoja, da je $\rho < 1/2$, dobimo, da je funkcija $q \mapsto u_B(\rho, q)$ najprej naraščajoča. Ker gre proti minus neskončno, ko gre q proti neskončno, doseže maksimum v stacionarni točki. Ko odvod izenačimo z nič, po krajšem računu dobimo:

$$q = \left[\frac{3}{2(1+\rho)}\right]^4 - 1\,.$$

Zdaj pa si oglejmo še korist države A:

$$u_A(\rho, q) = \frac{\rho}{1+\rho}\,(1+q)^{3/4}\,,$$

$$u_A\left(\rho,\ \left[\frac{3}{2(1+\rho)}\right]^4 - 1\right) = \frac{27}{8}\,\frac{\rho}{(1+\rho)^4}\,.$$

Iz totalnega odvoda:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} u_A\left(\rho,\ \left[\frac{3}{2(1+\rho)}\right]^4 - 1\right) = \frac{27}{8}\,\frac{1-3\rho}{(1+\rho)^5}$$

dobimo, da je maksimum dosežen pri $\rho = 1/3$. Vgnezdeno Nashevo ravnovesje je torej:

$$q = \left[\frac{3}{2(1+\rho)}\right]^4 - 1\,, \qquad \rho = \frac{1}{3}\,.$$

4. a) Iz $v(\{1,3\}) \geq v(\{1\}) + v(\{3\})$ sledi $a \geq 5$, iz $v(\{1,2,3\}) \geq v(\{1,3\}) + v(\{2\})$ pa $a \leq 7$. Hitro preverimo, da so ostali pogoji za superaditivnost izpolnjeni, torej je funkcija superaditivna za $5 \leq a \leq 7$.

b) Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	1	2	3
$\xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{5} 3$	1	3	5
$\xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{6} 3 \xrightarrow{2} 2$	1	2	6
$\xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{5} 3$	2	2	5
$\xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{3} 1$	3	2	4
$\xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{2} 2$	3	2	4
$\xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{3} 1$	3	2	4
Povprečje	13/6	13/6	14/3

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_1 = \phi_2 = 13/6$, in $\phi_3 = 14/3$.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 6. 9. 2017

Finančna matematika

1. a) Gre za kvadratno matrično igro. Če Amalijine akcije predstavimo z vrsticami, Bogdanove pa s stolpci, dobimo matriko:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{7}\cdot 2 & \frac{6}{7}\cdot 1 & \frac{6}{7}\cdot 1 \\ \frac{5}{7}\cdot 1 & \frac{5}{7}\cdot 2 & \frac{5}{7}\cdot 1 \\ \frac{4}{7}\cdot 1 & \frac{4}{7}\cdot 1 & \frac{4}{7}\cdot 2 \end{bmatrix}$$

Splača se najprej pogledati ravnovesja, kjer oba igralca strogo mešata vse akcije. Označimo z a_i verjetnost, da Amalija izbere število i, z b_i pa verjetnost, da Bojan izbere število j. Iz principa indiferentnosti dobimo enačbe:

$$\begin{gathered} \tfrac{6}{7}\cdot 2a_1 + \tfrac{5}{7}\,a_2 + \tfrac{4}{7}\,a_3 = \tfrac{6}{7}\,a_1 + \tfrac{5}{7}\cdot 2a_2 + \tfrac{4}{7}\,a_3 = \tfrac{6}{7}\,a_1 + \tfrac{5}{7}\,a_2 + \tfrac{4}{7}\cdot 2a_3\,, \\ \tfrac{6}{7}\,(2b_1 + b_2 + b_3) = \tfrac{5}{7}\,(b_1 + 2b_2 + b_3) = \tfrac{4}{7}\,(b_1 + b_2 + 2b_3)\,. \end{gathered}$$

Ob upoštevanju, da je vsota verjetnosti enaka ena, po krajšem računu dobimo:

$$a_1 = \tfrac{10}{37}\,, \quad a_2 = \tfrac{12}{37}\,, \quad a_3 = \tfrac{15}{37}\,; \qquad b_1 = \tfrac{3}{37}\,, \quad b_2 = \tfrac{11}{37}\,, \quad b_3 = \tfrac{23}{37}\,.$$

Ker je to edino Nashevo ravnovesje, kjer vsi strogo mešajo, in ker gre za kvadratno matrično igro, je to tudi edino mešano Nashevo ravnovesje nasploh.

b) Poštena cena igre bi bila:

$$\begin{aligned} &\tfrac{6}{7}\cdot 2\cdot\tfrac{10}{37} + \tfrac{5}{7}\,\tfrac{12}{37} + \tfrac{4}{7}\,\tfrac{15}{37} = \tfrac{6}{7}\,\tfrac{10}{37} + \tfrac{5}{7}\cdot 2\cdot\tfrac{12}{37} + \tfrac{4}{7}\,\tfrac{15}{37} = \tfrac{6}{7}\,\tfrac{10}{37} + \tfrac{5}{7}\,\tfrac{12}{37} + \tfrac{4}{7}\cdot 2\cdot\tfrac{15}{37} = \\ &\quad = \tfrac{6}{7}\left(2\cdot\tfrac{3}{37} + \tfrac{11}{37} + \tfrac{23}{37}\right) = \tfrac{5}{7}\left(\tfrac{3}{37} + 2\cdot\tfrac{11}{37} + \tfrac{23}{37}\right) = \tfrac{4}{7}\left(\tfrac{3}{37} + \tfrac{11}{37} + 2\cdot\tfrac{23}{37}\right) = \\ &\quad = \tfrac{240}{259} \doteq 0{\cdot}927\,. \end{aligned}$$

2. Akcija B pri prvem igralcu v stanju α strogo dominira obe preostali akciji. Ko jo odstranimo, dobimo naslednjo igro med prvim igralcem v drugem stanju in drugim igralcem:

	$L_{\alpha\beta}$	$C_{\alpha\beta}$	$R_{\alpha\beta}$
T_β	$1,5$	$4,6$	$8,7$
M_β	$5,5$	$3,3\frac{1}{3}$	$4,3$
B_β	$4,3$	$5,4$	$7,5$

V tej igri mešanice $\begin{pmatrix} L_{\alpha\beta} & R_{\alpha\beta} \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, kjer je $1/2 < q < 5/6$, strogo dominirajo akcijo $C_{\alpha\beta}$. Ko jo izločimo, lahko poiščemo zgornjo ovojnico koristnostne funkcije prvega igralca, če meša $\begin{pmatrix} L_{\alpha\beta} & R_{\alpha\beta} \\ 1-q & q \end{pmatrix}$:

- M_β za $0 \le q < 1/4$;
- M_β in B_β za $q = 1/4$;

- B_β za $1/4 < q < 3/4$;
- B_β in T_β za $q = 3/4$;
- T_β za $3/4 < q \leq 1$.

Zdaj pa pogledamo, kako se na zgornji ovojnici obnaša koristnostna funkcija drugega igralca. Za $0 \leq q < 1/4$ upoštevamo $U_{2,\alpha\beta}(B_\alpha M_\beta, L_{\alpha\beta}) > U_{2,\alpha\beta}(B_\alpha M_\beta, R_{\alpha\beta})$, kar pomeni, da mora biti $q = 0$. Dobimo čisto Bayes–Nashevo ravnovesje:

$$(B_\alpha M_\beta, L_{\alpha\beta})\,.$$

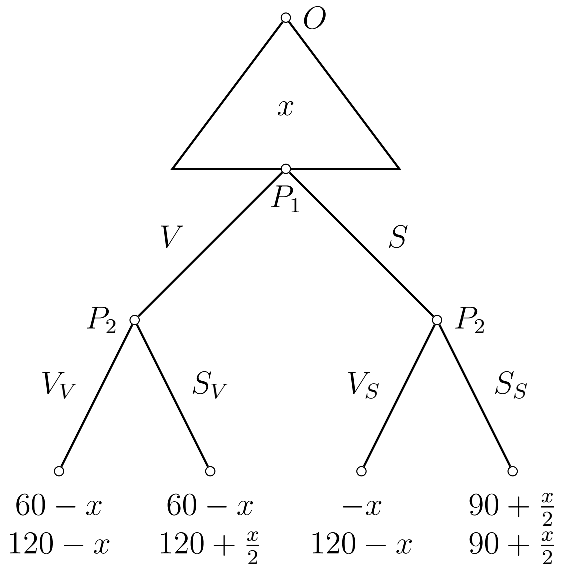
Za $q = 1/4$ iz principa indiferentnosti dobimo mešano Bayes–Nashevo ravnovesje:

$$\left(B_\alpha \begin{pmatrix} M_\beta & B_\beta \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{\alpha\beta} & R_{\alpha\beta} \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right).$$

Za $1/4 < q < 3/4$ ne dobimo ničesar, saj ni indiferentnosti. Prav tako ne moremo dobiti indiferentnosti za $q = 3/4$. Končno za $3/4 < q \leq 1$ upoštevamo $U_{2,\alpha\beta}(B_\alpha T_\beta, L_{\alpha\beta}) < U_{2,\alpha\beta}(B_\alpha T_\beta, R_{\alpha\beta})$, kar pomeni, da mora biti $q = 1$, in dobimo čisto Bayes–Nashevo ravnovesje:

$$(B_\alpha T_\beta, R_{\alpha\beta})\,.$$

3. Drevo igre:



Tu smo z V označili vnovčitev, z S pa vložitev v sklad. Jasno je, da, če prvi igralec igra V, drugi igra S_V. Če prvi igralec igra S, pa moramo ločiti tri možnosti: pri $x < 20$ drugi igra V_S, pri $x > 20$ igra V_V, pri $x = 20$ pa je indiferenten. Te tri možnosti moramo ločiti tudi, ko iščemo vgnezdena Nasheva ravnovesja v podigri, ki jo začne prvi igralec: pri $x < 20$ je to $(V, S_V V_S)$, pri $x > 20$ je to $(S, S_V S_S)$, pri $x = 20$ pa sta oba profila vgnezdeni Nashevi ravnovesji.

Oglejmo si zdaj še igro od začetka. Če je $x < 20$, organizator plača $180 - \frac{x}{2}$. Če je $x > 20$, organizator plača $180 + x$. Če pa je $x = 20$, je strošek organizatorja odvisen od vgnezdenega ravnovesja podigre: pri $(V, S_V V_S)$ plača $180 - \frac{x}{2}$, pri $(S, S_V S_S)$ pa plača $180 + x$. Le v prvem primeru je dosežen globalni minimum. Igra ima torej eno samo vgnezdeno Nashevo ravnovesje, ki ga lahko zapišemo kot:

$$\left(20, \begin{cases} (V, S_V V_S) & ; x \leq 20 \\ (S, S_V S_S) & ; x > 20 \end{cases}\right).$$

4. a) Rešitev igre izhaja iz maksimalne vsote dobitkov, ki je enaka 7, in vrednosti pripadajoče matrične igre razlik:

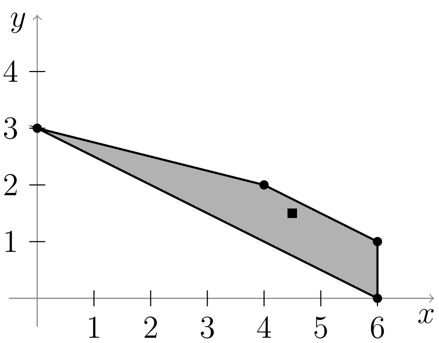
$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ki je enaka 3 in je dosežena v mešanem Nashevem ravnovesju:

$$\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\right).$$

To pomeni, da prvi igralec dobi $\frac{7+3}{2} = 5$, drugi pa $\frac{7-3}{2} = 2$. To lahko realizirata tako, da se dogovorita za profil (B, L), nakar prvi igralec drugemu plača 1.

b) Množica dopustnih sporazumov je naslednji lik:



Iz mešanega Nashevega ravnovesja pri prejšnji točki dobimo pogajalsko izhodišče $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$, ki je na zgornji sliki označeno s kvadratkom. Ker se to izhodišče nahaja v množici dopustnih sporazumov, je Nasheva rešitev tega pogajanja tista točka (x, y) v tej množici, kjer je Nashev produkt $\left(x - \frac{9}{2}, y - \frac{3}{2}\right)$ maksimalen. Znano je, da je to na robu te množice, očitno pa tudi tam, kjer je $x \geq \frac{9}{2}$ in $y \geq \frac{3}{2}$. Vse takšne točke pa so na premici $y = 4 - x/2$. Ko vstavimo v Nashev produkt, dobimo izraz:

$$-\frac{2x^2 - 19x - 45}{4},$$

ta pa je maksimalen pri $x = \frac{19}{4}$. Iskana rešitev je torej $\left(\frac{19}{4}, \frac{13}{8}\right)$, igralca pa jo lahko realizirata tako, da sporazumno mešata:

$$\begin{pmatrix} (B, L) & (B, R) \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

2015/16

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 20. 11. 2015

Finančna matematika

1. Poiščimo najboljši odgovor posameznega plemena pri danih akcijah ostalih plemen. Zgolj od njih je odvisna količina $Q_i = Q - q_i$. Pri fiksnem Q_i moramo maksimizirati:

$$u_i = q_i \, e^{-Q_i^2 - 2Q_i q_i - q_i^2} \, .$$

Pri $q_i = 0$ je $u_i = 0$. Pri $q_i > 0$ je $u_i > 0$, a gre proti nič, ko gre q_i proti neskončno. Zato je maksimum dosežen v stacionarni točki. Odvajamo:

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = (1 - 2Q_i q_i - 2q_i^2) \, e^{-Q_i^2 - 2Q_i q_i - q_i^2} = (1 - 2Q q_i) \, e^{-Q^2} \, .$$

Nashevo ravnovesje je torej doseženo, če je $1 - 2Qq_i = 0$ za vse i. Seštejemo in dobimo $n - 2Q^2 = 0$, torej $Q = \sqrt{n/2}$. Spet upoštevamo, da je $1 - 2Qq_i = 0$, in dobimo:

$$q_i = \frac{1}{2Q} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \, .$$

To je torej edino Nashevo ravnovesje in je simetrično – vsako pleme terja enako količino. Zdaj pa opazimo, da, če vsako pleme zahteva q, vsako dobi:

$$u := q \, e^{-n^2 q^2} \, .$$

Ta količina je spet pri $q = 0$ enaka nič, pri $q > 0$ strogo večja od nič, a gre proti nič, ko gre q proti neskončno. Zato je maksimum dosežen v stacionarni točki. Odvajamo:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q} = (1 - 2n^2 q^2) \, q^{-n^2 q^2}$$

in dobimo, da je maksimum dosežen pri $q = q^* = \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$. Pri vsaki drugi vrednosti q-ja je u strogo manjši. Ker je terjana količina vira v edinem Nashevem ravnovesju različna od q^*, pri profilu, ko vsako pleme terja q^*, res vsa dobijo strogo več kot v edinem Nashevem ravnovesju.

2. Naj $5 - k$ igralcev izbere belo, k igralcev pa črno barvo. V spodnji tabeli je za vsak k prikazan pogoj, ki morajo veljati za igralca, ki izbere belo oz. črno, da se mu ne splača premisliti:

k	belo	črno
0	$0 \ge 4$	—
1	$-1 \ge -3$	$4 \ge 0$
2	$2 \ge 2$	$-3 \ge -1$
3	$-3 \ge -1$	$2 \ge 2$
4	$4 \ge 0$	$-1 \ge -3$
5	—	$0 \ge 4$

Vidimo, da je vse izpolnjeno le pri $k = 1$ in $k = 4$. Čisto Nashevo ravnovesje torej nastopi, če eden od igralcev izbere eno, štirje pa drugo barvo. Formalno gledano je takih ravnovesij deset.

Poiščimo še simetrična mešana ravnovesja, pri katerih posamezen igralec izbere belo z verjetnostjo $\frac{1}{2} - t$ in črno z verjetnostjo $\frac{1}{2} + t$. Če se premisli tako, da vedno izbere belo, je njegov pričakovani dobitek enak:

$$4\left(\tfrac{1}{2} - t\right)^3\left(\tfrac{1}{2} + t\right) \cdot (-1) + 6\left(\tfrac{1}{2} - t\right)^2\left(\tfrac{1}{2} + t\right)^2 \cdot 2 + 4\left(\tfrac{1}{2} - t\right)\left(\tfrac{1}{2} + t\right)^3 \cdot (-3) + \left(\tfrac{1}{2} + t\right)^4 \cdot 4\,,$$

če se premisli tako, da vedno izbere črno, pa je enak:

$$\left(\tfrac{1}{2} - t\right)^4 \cdot 4 + 4\left(\tfrac{1}{2} - t\right)^3\left(\tfrac{1}{2} + t\right) \cdot (-3) + 6\left(\tfrac{1}{2} - t\right)^2\left(\tfrac{1}{2} + t\right)^2 \cdot 2 + 4\left(\tfrac{1}{2} - t\right)\left(\tfrac{1}{2} + t\right)^3 \cdot (-1)\,.$$

Po principu indiferentnosti mora biti to dvoje enako. Po krajšem računu dobimo $32t^3 = 0$, kar pomeni, da je edino mešano Nashevo ravnovesje tisto, pri katerem vsak igralec z verjetnostjo $1/2$ izbere belo in z verjetnostjo $1/2$ črno.

3. Čisto Nashevo ravnovesje je kvečjemu (T, L), in sicer le pri $a \geq 3$. Kvečjemu pri $a = 3$ lahko nastopi Nashevo ravnovesje, pri katerem eden od igralcev igra čisto strategijo, drugi pa strogo meša. Natančneje, pri $a = 3$ bi lahko prvi igralec igral mešano strategijo $\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, drugi pa igral čisto L. Za drugega igralca dobimo $3 - 3p \geq 1 + 6p$, torej $p \leq 2/9$. Takrat je ta profil res mešano Nashevo ravnovesje.

Oglejmo si še, kdaj lahko oba igralca strogo mešata – natančneje, prvi igra $\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, drugi pa $\begin{pmatrix} L & R \\ 1-q & q \end{pmatrix}$. Iz principa indiferentnosti za drugega igralca dobimo $3 - 3p = 1 + 6p$, torej $p = 2/9$, iz principa indiferentnosti za prvega igralca pa dobimo $a(1 - q) + 3q = 3 - q$, torej $q = \frac{a-3}{a-4}$ (za $a = 2$ enačba nima rešitve). To število je strogo med 0 in 1 pri $a < 3$.

Če povzamemo, so mešana Nasheva ravnovesja:

- pri $a < 3$: $\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 7/9 & 2/9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ \frac{1}{4-a} & \frac{a-3}{a-4} \end{pmatrix}\right)$;
- pri $a = 3$: $\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, L\right)$, $0 \leq p \leq \frac{2}{9}$;
- pri $a > 3$: (T, L).

4. Najprej opazimo, da je akcija Z strogo dominirana z mešano strategijo $\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$, brž ko je $1/5 < q < 1/3$. Ko jo odstranimo, gledamo zgornjo ovojnico koristnostne funkcije prvega igralca pri prej omenjeni mešani strategiji drugega igralca. Dobimo:

- B za $0 \leq q < 1/4$;
- B in C za $q = 1/4$;
- C za $1/4 < q < 2/3$;

- A in C za $q = 2/3$;
- A za $2/3 < q \leq 1$.

Zdaj pa pogledamo, kako se na zgornji ovojnici obnaša koristnostna funkcija drugega igralca. Za $0 \leq q < 1/4$ upoštevamo $U_2(E, X) > U_2(E, Y)$, kar pomeni, da mora biti $q = 0$. Dobimo čisto Nashevo ravnovesje:

$$(B, X)\,.$$

Za $q = 1/4$ iz principa indiferentnosti dobimo mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right).$$

Za $1/4 < q < 2/3$ ne dobimo ničesar, saj ni indiferentnosti. Za $q = 2/3$ pa spet iz principa indiferentnosti dobimo mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\right).$$

Končno za $2/3 < q \leq 1$ upoštevamo $U_2(A, X) > U_2(A, Y)$, kar pomeni, da tam ni mešanih Nashevih ravnovesij.

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 29. 1. 2016

Finančna matematika

1. Če matriki igre odštejemo matriko, ki ima vse elemente enake 5, dobimo diagonalno matriko z diagonalci -4, -5 in -1. Ker so vsi istega predznaka, je vrednost pripadajoče matrične igre enaka:

$$-\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+1}=-\frac{20}{29}\,.$$

Vrednost izvirne matrične igre pa je enaka $-\dfrac{20}{29}+5=\dfrac{125}{29}\doteq 4{\cdot}31$.

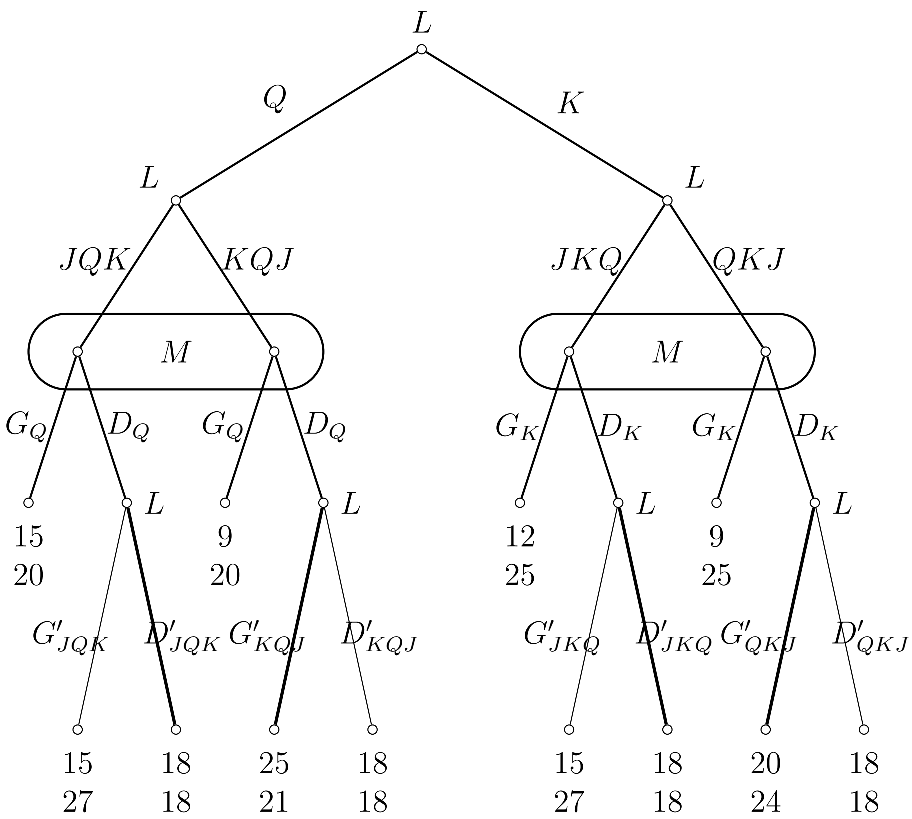
2. V stanju ω_1 akcija A strogo dominira akcijo B, v stanju ω_2 pa je za prvega igralca čisto vseeno, kaj igra – ne glede na to, kako igra prvi igralec. Nadalje je tudi korist drugega igralca neodvisna od tega, kako v stanju ω_2 igra prvi igralec. Tako se igra prevede na naslednjo strateško igro za dva igralca:

	L_{123}	D_{123}
A_3	$9,1$	$1,2$
B_3	$3,3$	$5,0$

Ta igra ima edino mešano Nashevo ravnovesje $\left(\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\right)$.
Iskana mešana Bayesova ravnovesja so torej:

$$\left(A_1\,, \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\right) \;;\quad 0\le p\le 1\,.$$

3. a) Narišimo drevo igre. Tanke črte predstavljajo poteze, ki se ne splačajo, debele pa poteze, ki se splačajo.



b) Z upoštevanjem potez, ki se splačajo oz. ne splačajo, podigri, ki pride iz poteze Q, ustreza naslednja strateška igra:

	G_Q	D_Q
JQK	$15, 20$	$18, 18$
KQJ	$9, 20$	$25, 21$

Ta igra ima mešana Nasheva ravnovesja:

$$(JQK, G_Q)\,, \quad (KQJ, D_Q) \quad \text{in} \quad \left(\begin{pmatrix} JQK & KQJ \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_Q & D_Q \\ 7/13 & 6/13 \end{pmatrix} \right)$$

in v njih Leon dobi 15, 25 oziroma $\frac{213}{13} = 16\frac{5}{13}$. Podigri, ki pride iz poteze K, pa ustreza naslednja strateška igra:

	G_K	D_K
JKQ	$12, 25$	$18, 18$
QKJ	$9, 25$	$20, 24$

ki ima le čisto Nashevo ravnovesje (JKQ, G_K), v katerem Leon dobi 12.

Zdaj pa primerjamo, koliko Leon dobi, če v prvi potezi Mirku da damo oziroma kralja, in dobimo naslednja mešana vgnezdena behavioristično mešana Nasheva ravnovesja:

$$\begin{gathered}
\left(Q, JQK, JKQ, D'_{JQK}, G'_{KQJ}, D'_{JKQ}, G'_{QKJ};\ G_Q, G_K\right), \\
\left(Q, KQJ, JKQ, D'_{JQK}, G'_{KQJ}, D'_{JKQ}, G'_{QKJ};\ D_Q, G_K\right), \\
\left(Q, \begin{pmatrix} JQK & KQJ \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, JKQ, D'_{JQK}, G'_{KQJ}, D'_{JKQ}, G'_{QKJ};\ \begin{pmatrix} G_Q & D_Q \\ 7/13 & 6/13 \end{pmatrix}, G_K\right).
\end{gathered}$$

c) Če Leon v drugi potezi igra strogo mešano strategijo, mu karta, ki jo je obdržal zase, seveda ni zagotovljena: to bi se zgodilo le, če bi Mirko igral glede na njegovo drugo potezo, a o le-tej on nima informacije. Omejimo se torej na čiste strategije. Če Leon v prvi potezi da Mirku damo, mu je karta, ki jo obdrži zase, zagotovljena – ne glede na to, ali je fant ali kralj. To se zgodi tudi v vgnezdenem behavioristično mešanem Nashevem ravnovesju. Če pa bi Leon v prvi potezi dal Mirku kralja, mu karta, ki bi jo obdržal zase, ne bi bila zagotovljena – niti fant niti dama.

4. a) Upoštevajoč, da posameznik sam ne more dobiti ničesar, dobimo, da so smiselne tiste vrednosti, pri katerih vsi trije skupaj dobijo najmanj toliko kot katera koli dva, ki sta skupaj, torej, če je $a \geq 3$.

b) Naj bo (x, y, z) imputacija, pri čemer naj x označuje dobitek ženske, y in z pa dobitka moških. Imputacija pomeni, da velja $x, y, z \geq 0$ in $x + y + z = a$.

Igra je brez jedra natanko tedaj, ko za vsako imputacijo obstajata dva, ki skupaj dobita strogo manj, kot bi dobila, če bi izstopila iz polne koalicije, torej če je bodisi $x + y < 3$ bodisi $x + z < 3$ bodisi $y + z < 2$. Še drugače, igra je brez jedra natanko tedaj, ko za vsako imputacijo (x, y, z) velja bodisi $z > a - 3$ bodisi $y > a - 3$ bodisi $x > a - 2$. Še drugače, igra ima jedro natanko tedaj, ko obstaja imputacija, za katero velja $x \leq a - 2$, $y \leq a - 3$ in $z \leq a - 3$. Od tod sledi $a \leq 3a - 8$ oziroma $a \geq 4$. Dokažimo še obratno: pri $a \geq 4$ konstruirajmo delitev dobitka polne koalicije, ki je v jedru. Glede na prej dognano jo nastavimo v obliki:

$$x = a - 2 - \delta, \quad y = a - 3 - \delta, \quad z = a - 3 - \delta,$$

kjer δ nastavimo tako, da je $x + y + z = a$. To se zgodi pri $\delta = 2(a - 4)/3$. Delitev bo v jedru natanko tedaj, ko bo $0 \leq \delta \leq a - 3$, to pa je res za vse $a \geq 4$. Brž ko je slednje res, je torej delitev:

$$x = \frac{a+2}{3}, \quad y = \frac{a-1}{3}, \quad z = \frac{a-1}{3}$$

v jedru. Torej ima igra neprazno jedro natanko tedaj, ko je $a \geq 4$. Z drugimi besedami, igra je brez jedra natanko tedaj, ko je $a < 4$.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 5. 2. 2016

Finančna matematika

1. Če je na trgu d dobrih in $100-d$ slabih izdelkov, Nashevo ravnovesje nastopi natanko tedaj, ko velja:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{100+d} &\ge \frac{2}{100+3(100-d+1)} && ;\ d \ge 1\,, \\
\frac{2}{100+3(100-d)} &\ge \frac{1}{100+d+1} && ;\ d \le 99\,.
\end{aligned}
$$

Po ureditvi dobimo $39{\cdot}6 \le d \le 40{\cdot}6$, torej $d = 40$. Edino čisto Nashevo ravnovesje nastopi, če je na trgu 40 dobrih in 60 slabih izdelkov.

2. Igra ima dve stanji, recimo jima n in v: v prvem ima drugi proizvajalec proizvodne stroške 5 evrov, v drugem pa 8 evrov na izdelek. Vsak proizvajalec ima dve možni akciji: T kot iti na trg in U kot umakniti se. Koristnosti predstavimo s tabelama:

Stanje n:

	T_2	U_2
T_1	$-1, 1$	$3, 0$
U_1	$0, 5$	$0, 0$

Stanje v:

	T_2	U_2
T_1	$-1, -2$	$3, 0$
U_1	$0,\ \ 2$	$0, 0$

Prvi proizvajalec prejme iz obeh stanj enak signal, drugi pa iz vsakega stanja svojega. Tako dobimo klasično strateško igro:

	$T_{2n}T_{2v}$	$T_{2u}U_{2v}$	$U_{2n}T_{2v}$	$U_{2u}U_{2v}$
T_1	$-1;\ 1, -2$	$2;\ 1,\ 0$	$0;\ 0, -2$	$3;\ 0,\ 0$
U_1	$0;\ 5,\ \ 2$	$0;\ 5, 0$	$0;\ 0,\ \ 2$	$0;\ 0,\ 0$

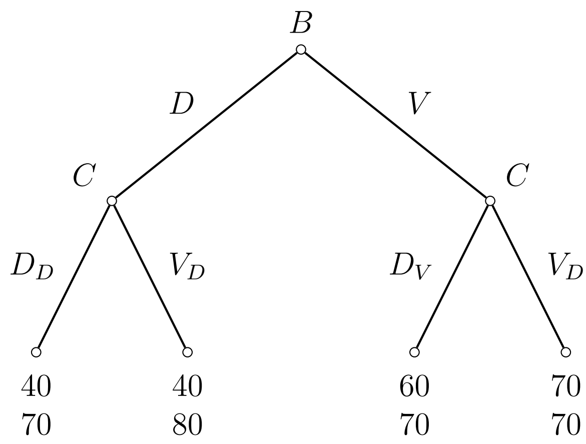
Vidimo, da akcija T_{2n} dominira akcijo U_{2n}. Tako se igra zreducira na strateško igro za dva igralca:

	T_{2v}	U_{2n}
T_1	$-1, -2$	$2, 0$
U_1	$0,\ \ 2$	$0, 0$

Ta igra ima mešana Bayesova ravnovesja (U_1, T_{2v}), (T_1, U_{2v}) in $\left(\begin{pmatrix} T_1 & U_1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_{2v} & U_{2v} \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right)$. Mešana Bayesova ravnovesja dane igre so torej:

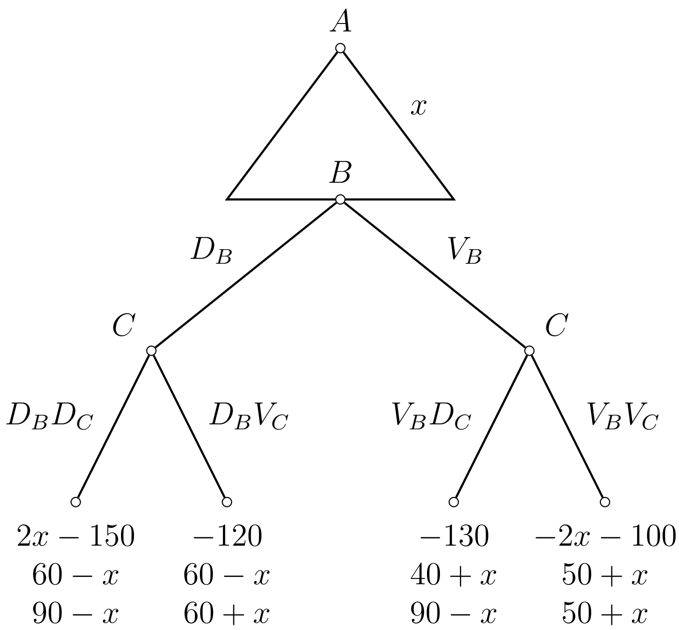
$$
(U_1, T_{2n}T_{2v})\,, \quad (T_1, T_{2n}U_{2v}) \quad \text{in} \quad \left(\begin{pmatrix} T_1 & U_1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, T_{2n}\begin{pmatrix} T_{2v} & U_{2v} \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right).
$$

3. a) Drevo igre:



Igra ima vgnezdeni Nashevi ravnovesji $(V, V_D D_V)$ in $(V, V_D V_V)$.

b) Igra ima zdaj naslednje drevo:



Obravnavajmo igro od Bojanove poteze naprej v odvisnosti od Andrejine poteze x:

	Vgnezdeno NR	Andrejin izdatek
$x < 10$	$(D, D_D D_V)$	$150 - 2x$
$x = 10$	$(D, D_D D_V)$	130
	$(V, D_D D_V)$	130
$10 < x < 15$	$(V, D_D D_V)$	130
$x = 15$	$(V, D_D D_V)$	130
	$(V, V_D D_V)$	130
$15 < x < 20$	$(V, V_D D_V)$	130
$x = 20$	$(V, V_D D_V)$	130
	$(V, V_D V_V)$	140
$x > 20$	$(V, V_D V_V)$	$100 + 2x$

Od tod vidimo, da se Andreji najbolj splača izbrati $10 \leq x < 20$.

4. Pripadajoča matrična igra je igra razlik:

	X	Y	Z	U
G	0	3	5	6
D	5	3	1	0

Mešano Nashevo ravnovesje je doseženo na minimumu zgornje ovojnice koristnostne funkcije drugega igralca, ta pa ustreza maksimumu spodnje ovojnice koristnostne funkcije prvega igralca. Naj torej prvi igralec igra G z verjetnostjo $1 - p$ in D z verjetnostjo p. Dobimo:

	U_1	akcije
$0 \leq p < 6/11$	$5p$	X
$p = 6/11$	$30/11$	X, U
$6/11 < p \leq 1$	$6 - 6p$	U

Vidimo, da je maksimum dosežen pri $p = 6/11$, drugi igralec pa meša X in U. Iz principa indiferentnosti za prvega igralca dobimo, da mora drugi mešati X z verjetnostjo $6/11$ in U z verjetnostjo $5/11$. Iskano Nashevo ravnovesje je torej:

$$\left(\begin{pmatrix} G & D \\ 5/11 & 6/11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & U \\ 6/11 & 5/11 \end{pmatrix} \right).$$

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 17. 6. 2016

Finančna matematika

1. Najprej poiščimo čista Nasheva ravnovesja. Če vsi izberejo isto barvo, to očitno ni Nashevo ravnovesje. Preostanejo še primeri, ko eden izbere eno barvo, dva pa drugo. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da eden izbere belo, druga dva pa črno. Tistemu, ki izbere belo barvo, se to vsekakor splača. Kaj se splača preostalima dvema, je prikazano v naslednji tabeli (z B označimo izbiro bele, s C pa črne barve):

$$\begin{array}{rll}
P_1 \text{ edini izbere belo:} & u_2(B,C,C) = -1\,, & u_2(B,B,C) = -3\,, \\
& u_3(B,C,C) = -1\,, & u_3(B,C,B) = -2\,. \\
P_2 \text{ edini izbere belo:} & u_1(C,B,C) = -2\,, & u_1(B,B,C) = -3\,, \\
& u_3(C,B,C) = -2\,, & u_3(C,B,B) = -1\,. \\
P_3 \text{ edini izbere belo:} & u_1(C,C,B) = -3\,, & u_1(B,C,B) = -2\,, \\
& u_2(C,C,B) = -3\,, & u_2(C,B,B) = -1\,.
\end{array}$$

Od tod dobimo, da sta čisti Nashevi ravnovesji le (B,C,C) in (C,B,B).

Oglejmo si zdaj še primer, ko vsi trije strogo mešajo, torej profil:

$$\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-c_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & C \\ 1-c_2 & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & C \\ 1-c_3 & c_3 \end{pmatrix} \right).$$

Za vse tri igralce mora veljati princip indiferentnosti, od koder dobimo sistem:

$$\begin{aligned}
6c_2 + 4c_3 &= 5\,, \\
6c_1 + 2c_3 &= 4\,, \\
4c_1 + 2c_2 &= 3\,,
\end{aligned}$$

ki ima edino rešitev $c_1 = c_2 = c_3 = 1/2$ (to rešitev mora imeti zaradi simetrije igre).

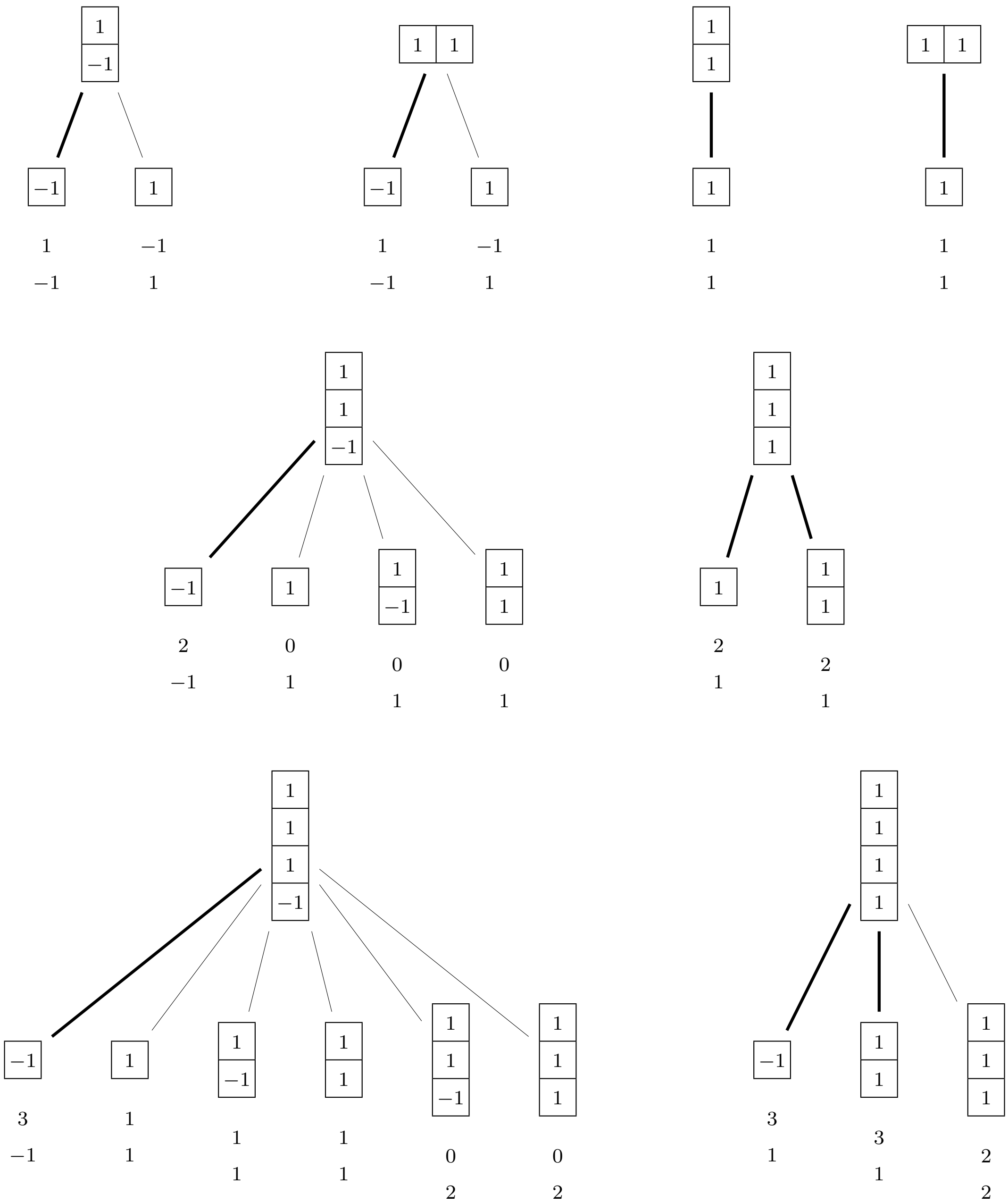
2. Prirejena igra s popolno informacijo ima pet igralcev: prvega s signalom iz stanja ω_1, prvega s signalom iz stanj ω_2 in ω_3, drugega s signalom iz stanja ω_1, drugega s signalom iz stanja ω_2 in drugega s signalom iz stanja ω_3. Opazimo, da pri drugem igralcu s signalom iz stanja ω_1 akcija D dominira akcijo L. Od tod sledi tudi, da mora prvi igralec v stanju ω_1 igrati A. Pri drugem igralcu s signalom iz stanja ω_3 pa akcija L dominira akcijo D. Tako ostaneta le še prvi igralec s signalom iz stanj ω_2 in ω_3 ter drugi igralec s signalom iz stanja ω_2. Za njiju dobimo naslednjo igro s popolno informacijo:

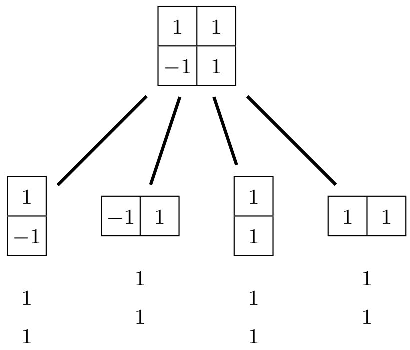
	L_2	D_2
A_{23}	$3,7$	$7,2$
B_{23}	$5,7$	$4,9$

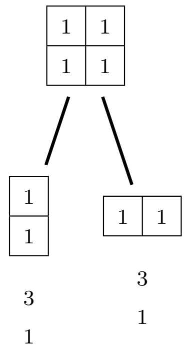
Ta igra ima le eno mešano Nashevo ravnovesje, ki da mešano Bayesovo ravnovesje prvotne igre:

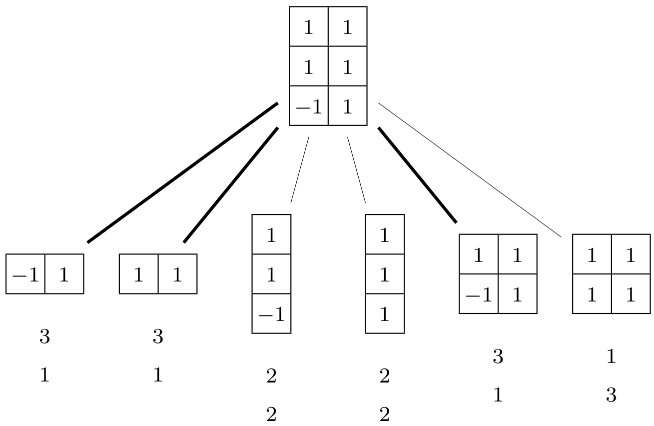
$$\left(A_1 \begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix}, D_1 \begin{pmatrix} L_2 & D_2 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} L_3 \right).$$

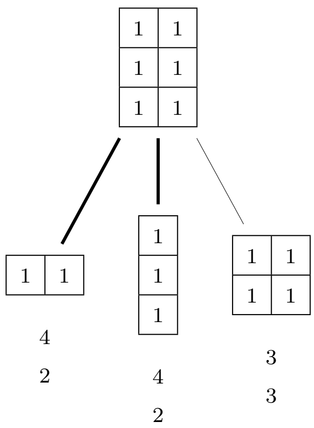
3. Vgnezdeno Nashevo ravnovesje opišemo tako, da za vsako vozlišče, v katerem se posamezen igralec lahko znajde, povemo, kaj tam stori. Pri tej igri je nadaljnji potek igre skupaj z nadaljnjimi izplačili odvisen samo od ostanka tablice, ki je še na voljo. Torej je dovolj za vsak ostanek tablice preučiti, koliko od tedaj naprej dobi igralec, ki je na potezi, če odlomi določen del tablice, in kaj se mu splača. To je prikazano spodaj.

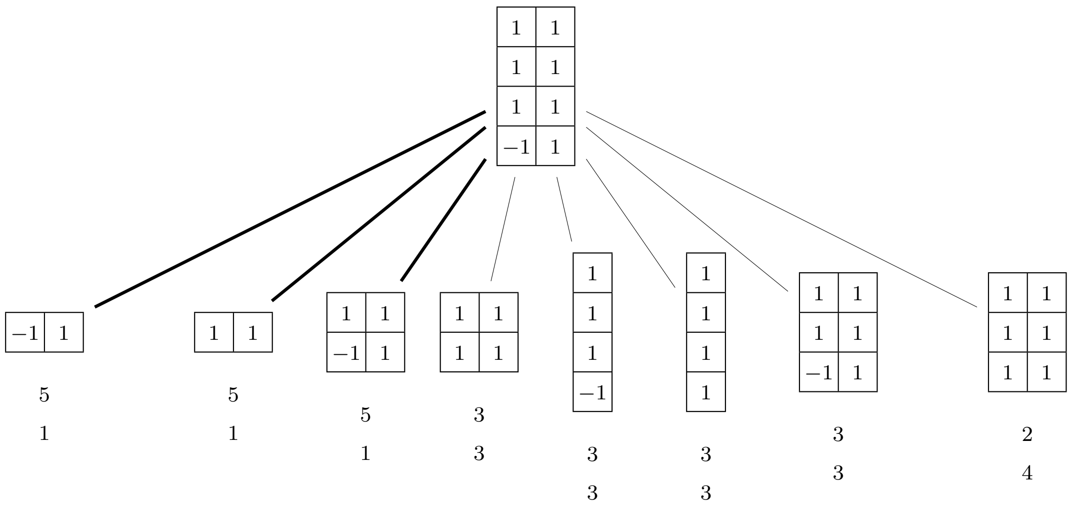












4. Igralci so seveda mesta, dobitek koalicije pa so negativno predznačeni maksimali stroški letališča, ki ga potrebuje posamezno mesto v koaliciji. Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	A	B	C
$\xrightarrow{-240} A \xrightarrow{-60} B \xrightarrow{-120} C$	-240	-60	-120
$\xrightarrow{-240} A \xrightarrow{-180} C \xrightarrow{0} B$	-240	0	-180
$\xrightarrow{-300} B \xrightarrow{0} A \xrightarrow{-120} C$	0	-300	-120
$\xrightarrow{-300} B \xrightarrow{-120} C \xrightarrow{0} A$	0	-300	-120
$\xrightarrow{-420} C \xrightarrow{0} A \xrightarrow{0} B$	0	0	-420
$\xrightarrow{-420} C \xrightarrow{0} B \xrightarrow{0} A$	0	0	-420
Povprečje	-80	-110	-230

Mesto A mora torej plačati 80, mesto B 110, mesto C pa 230 milijonov dolarjev.

2014/15

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 20. 11. 2014

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Preferenčni funkciji trgovca in države sta:

$$u_{\mathrm{T}}(b,p) = \begin{cases} (1-p)^3\bigl(2\sqrt{b}-b\bigr) + (2p-p^2)\bigl(\sqrt{b}-2b\bigr) & ; b < 4 \\ (1-p)^2\bigl(2\sqrt{b}-b\bigr) + (2p-p^2)\bigl(\sqrt{b}-2b\bigr) & ; b \ge 4 \end{cases},$$

$$u_{\mathrm{D}}(b,p) = p(1-p)^2\bigl(2\sqrt{b}-b\bigr)_+ .$$

Lotimo se najprej najboljšega odgovora trgovca. Ne glede na p velja, da je $u_{\mathrm{T}}(b,p)$ strogo naraščajoča v b za b dovolj blizu ničle in strogo padajoča v b za $b \ge 4$ (taka sta namreč oba izraza $2\sqrt{b}-b$ in $\sqrt{b}-2b$). Zato je maksimum nujno v stacionarni točki $0 < b < 4$. Oglejmo si sedaj najboljšega odgovora države. Ker je $2\sqrt{b}-b > 0$, je le-ta dosežen pri tistem p, kjer izraz $p(1-p)^2$ doseže maksimum. Krajši račun pokaže, da je to pri $p = 1/3$. Za ta p in $0 < b < 4$ velja:

$$u_{\mathrm{T}}(b,p) = \frac{31\sqrt{b} - 38b}{27},$$

kar je maksimalno pri $b = (31/76)^2 = 961/5776 \doteq 0{\cdot}166$.

2. Iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a+15)/4 \\ (10+3b)/4 \\ (d+21)/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sledi, da mora veljati $b = -2$ ter $a \le -11$ in $d \le -17$. Nadalje iz:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} B & D \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2y/3+1 & 4+z/3 \end{bmatrix}$$

sledi, da mora veljati $y = 3/2$ in $z \le -6$. Parametra c in x pa sta lahko poljubna.

3. Če vsi vržejo enako, se vsakemu splača zamenjati akcijo, saj pred zamenjavo ne dobi nič, po zamenjavi pa vsaj dva evra (seveda ob predpostavki, da druga dva igralca akcije ne zamenjata). Zato to ni Nashevo ravnovesje. Če dva igralca vržeta grb, eden pa cifro, se tistemu, ki vrže grb, prav tako splača zamenjati akcijo: pred zamenjavo plača dva evra, po zamenjavi pa le en evro. Zato tudi to ni Nashevo ravnovesje. Končno si oglejmo še primer, ko dva vržeta cifro, eden pa grb. Igralec, ki vrže grb, dobi dva evra, če bi zamenjal akcijo, pa ne bi dobil ničesar. Igralec, ki vrže cifro, pa plača en evro; če bi zamenjal akcijo, bi plačal dva evra. Zato ta možnost je Nashevo ravnovesje. Formalno gledano ima torej igra tri čista Nasheva ravnovesja, pri katerih dva vržeta cifro, eden pa grb.

Poiščimo mešano Nashevo ravnovesje, kjer vsak od igralcev vrže grb z verjetnostjo p, cifro pa z verjetnostjo $1-p$. Recimo, da je to prvi igralec. Iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} C \\ G \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} C & G \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & G \\ 1-p & p \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6p^2 - 2p \\ 6p^2 - 8p + 2 \end{bmatrix}$$

dobimo, da Nashevo ravnovesje nastopi, če je $6p^2-2p = 6p^2-8p+2$, torej $p = 1/3$. Nashevo ravnovesje torej nastopi, brž ko vsak od igralcev vrže grb z verjetnostjo $1/3$ in cifro z verjetnostjo $2/3$.

Obstajajo pa tudi mešana Nasheva ravnovesja, ker eden od igralcev igra čisto strategijo, druga dva pa mešata. Recimo, da eden vedno vrže cifro, od drugih dveh pa vsak vrže grb z verjetnostjo p in cifro z verjetnostjo $1-p$. Igralec, ki meša, ima pričakovani dobiček $2-4p$, če namesto tega vedno vrže grb, in $-p$, če namesto tega vedno vrže cifro. Pri $p = 2/3$ je indiferenten. Takrat ima igralec, ki vedno vrže cifro, pričakovani dobiček $4/3$, če zamenja strategijo, tako da vedno vrže grb, pa ima pričakovani dobiček $-2/3$. Dobimo torej še tri mešana Nasheva ravnovesja, kjer eden od igralcev vedno vrže cifro, od ostalih dveh pa vsak vrže grb z verjetnostjo $2/3$ in cifro z verjetnostjo $1/3$.

Ne obstaja pa mešano Nashevo ravnovesje, kjer bi eden od igralcev vedno vrgel grb, preostala dva pa bi mešala z enakima verjetnostma za grb. Če je namreč ta enaka p, ima igralec, ki meša, pričakovani dobiček $2p-2$, če namesto tega vedno vrže grb, in $5p-1$, če namesto tega vedno vrže cifro. Indiferentnost dobimo pri $p = -1/3$, kar ni ustrezno.

4. Najprej opazimo, da je zadnji stolpec (kot akcija drugega igralca) dominiran s opvprečjem prvih treh. Ko ga odstranimo, je druga vrstica dominirana s povprečjem ostalih treh. Dobimo matriko:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

v kateri ni več dominacij. Preverimo, ali obstaja Nashevo ravnovesje, kjer vsi trije igralci strogo mešajo, kar predstavimo s parom vektorjev:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1-b-c \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Iz principa indiferentnosti za prvega igralca dobimo:

$$-2 + y + 3z = 2y - z = 2 - 5y - z\,,$$

kar ima za rešitev $y = 2/7, z = 4/7$. Iz principa indiferentnosti za drugega igralca pa dobimo:

$$-2 + 2b + 4c = -1 + 3b - 2c = 1 - 2b\,,$$

kar ima za rešitev $b = 1/2, c = 1/4$. Torej je:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix},$$

od koder sledi, da ima igra res Nashevo ravnovesje, kjer vsi trije igralci strogo mešajo. Ko vstavimo v koristnostne funkcije, dobimo, da je vrednost igre enaka 0.

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 30. 1. 2015

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Za profil grozilnih strategij, ki nam da pogajalsko izhodišče, je dovolj gledati matrično igro iz razlik, t. j.:

$$\begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline T & 0 & 2 \\ \hline B & -2 & 4 \\ \hline \end{array}\,.$$

Opazimo, da je v (T, L) sedlo, torej je to ustrezni profil grozilnih strategij. Izhodišče Nashevega modela pogajanja je torej $(3, 3)$. Maksimalni dobitek igre pa je 10 in je dosežen v (T, R). Rešitev igre je torej, da se igralca sporazumeta za (T, R), nakar prvi plača drugemu eno enoto, tako da imata vsak po 5.

2. Izkupiček za koalicijo, v kateri so vsaj trije ali pa Maks in vsaj še eden, je enak 1, sicer pa je izkupiček enak -1. Izračunajmo najprej Shapleyjevo vrednost za Maksa. Če Maks pristopi h koaliciji kot prvi, je njegov prispevek enak -1. Če pristopi kot drugi ali tretji, je njegov prispevek enak 2. Če pa pristopi kot zadnji, je njegov prispevek enak 0. Shapleyjeva vrednost za Maksa je torej:

$$\frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{2}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}\,.$$

Za izračun Shapleyjeve vrednosti ostalih članov upoštevamo, da morajo biti zaradi simetrije enake, poleg tega pa mora biti vsota vseh Shapleyjevih vrednosti enaka izkupičku polne koalicije, torej 1. Tako imajo ostali člani Shapleyjevo vrednost $1/12$.

Shapleyjev sporazum ni v jedru, ker se mu lahko upre že koalicija, ki vsebuje Maksa in še enega člana. Izkupiček take koalicije je namreč 1, kar je več kot $3/4 + 1/12 = 5/6$, kolikor bi dobila po Shapleyju.

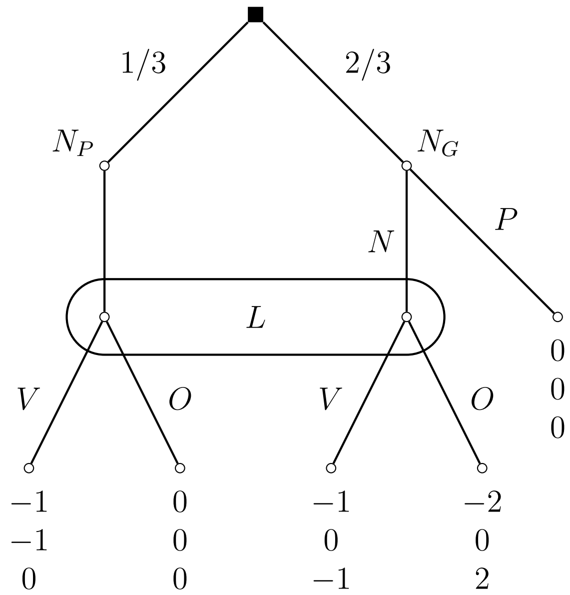
3. Gre za Bayesovo igro s 6 stanji – toliko je možnih delitev kart. Vsak igralec dobi tri možne signale – glede na to, katero karto je dobil. Vsak signal pride iz dveh stanj – glede na to, katero karto je dobil njegov nasprotnik.

Profil čistih strategij, kjer oba igralca ubereta isto strategijo, pomeni, da za vsako karto, ki jo igralec dobi, povemo, ali bo rekel ‘raste’ (R) ali pa ‘pada’ (P). Takih profilov je 8. V spodnji tabeli so za vse profile prikazane trojice dobitkov oblike $a \to b$: a pomeni, koliko pri tem profilu dobi igralec s posameznim signalom, b pa pomeni, koliko dobi, če se premisli, nasprotnik pa v vseh primerih obdrži svojo akcijo.

$R_1R_2R_3$	$0 \to 1$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$1 \to 0$
$R_1R_2P_3$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$1 \to 0$	$0 \to 1$
$R_1P_2R_3$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$
$R_1P_2P_3$	$1 \to 0$	$0 \to 1$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$
$P_1R_2R_3$	$1 \to 0$	$0 \to 1$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$
$P_1R_2P_3$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$
$P_1P_2R_3$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$1 \to 0$	$0 \to 1$
$P_1P_2P_3$	$0 \to 1$	$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$	$1 \to 0$

(šteli smo 1 točko za zmago in 0 za poraz). Edini čisti Bayesovi ravnovesji želene oblike sta torej $(R_{1*}P_{2*}R_{3*}, R_{*1}P_{*2}R_{*3})$ in $(P_{1*}R_{2*}P_{3*}, P_{*1}R_{*2}P_{*3})$.

4. Igralci v tej randomizirani ekstenzivni igri s popolno informacijo so lastnik (L), pošteni najemnik (N_P) in goljufivi najemnik (N_G). V tem vrstnem redu so prikazani tudi njihovi dobitki v drevesu igre:



Lastnik ima možnost izbire, da najemnika, ki mu je rekel, da nima denarja, vrže iz stanovanja (V) ali pa ga obdrži še en mesec (O). Pošteni najemnik nima možnosti izbire. Goljufivi najemnik pa ima možnost izbire, da najemnino plača (P) ali pa je ne plača (N).

Ker pošteni najemnik nima nobene možnosti izbire, ga v prirejeni strateški igri ni potrebno obravnavati. Prirejena strateška igra med lastnikom in goljufivim najemnikom pa je:

	P	N
V	$-1/3, 0$	$-1, -2/3$
O	$0, 0$	$-4/3, 4/3$

in ima mešano Nashevo ravnovesje $\left(\begin{pmatrix} V & O \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & N \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$.

Možne so tudi še druge, manj smiselne interpretacije.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 10. 2. 2015

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. To je igra, kjer so igralci države in vsaka ima dve možni akciji: nižja ali pa višja davčna stopnja. Preferenčna funkcija za posamezno državo je pobrani davek (od domače in preusmerjene dodane vrednosti).

Premišljujmo najprej za splošnejši primer, ko je n držav, možni davčni stopnji $p_1 < p_2$ in ko se delež q dodane vrednosti preusmeri iz držav z višjim davkom v države z nižjim davkom. Denimo, da k držav določi nižjo, $n - k$ držav pa višjo davčno stopnjo. Če je enota za pobrani davek dodana vrednost, ki jo naredi ena država, država z nižjo davčno stopnjo pobere $p_1\bigl(1 + \frac{n-k}{k}\, q\bigr)$ davka (če je $k = 0$, take države ni). Država z višjo davčno stopnjo pa pobere $p_2(1 - q)$ davka, če je $k > 0$, in p_2 davka, če je $k = 0$.

Vzemimo zdaj $n = 6$, $p_1 = 0\text{'}05$, $p_2 = 0\text{'}18$ in $q = 0\text{'}5$ ter tabelirajmo preferenčni funkciji v obliki $a \to b$, kjer je a pobrani davek posamezne države, b pa je pobrani davek v primeru, če država davčno stopnjo spremeni, ostale pa jo obdržijo:

k	nižja stopnja	višja stopnja
0	—	$0\text{'}18 \to 0\text{'}175$
1	$0\text{'}175 \to 0\text{'}18$	$0\text{'}09 \to 0\text{'}1$
2	$0\text{'}1 \to 0\text{'}09$	$0\text{'}09 \to 0\text{'}075$
3	$0\text{'}075 \to 0\text{'}09$	$0\text{'}09 \to 0\text{'}0625$
4	$0\text{'}0625 \to 0\text{'}09$	$0\text{'}09 \to 0\text{'}055$
5	$0\text{'}055 \to 0\text{'}09$	$0\text{'}09 \to 0\text{'}05$
6	$0\text{'}05 \to 0\text{'}09$	—

Od tod vidimo, da smo v Nashevem ravnovesju natanko tedaj, ko bodisi vse države predpišejo višjo davčno stopnjo bodisi imamo dve davčni oazi z nižjo davčno stopnjo.

2. Opazimo, da je zadnja vrstica dominirana z vsoto polovice prve in polovice druge, zato jo lahko odstranimo. Neodvisno od tega je tudi tretji stolpec dominiran z vsoto polovice prvega in polovice četrtega, zato lahko odstranimo tudi tega. Iskana vrednost je tako enaka:

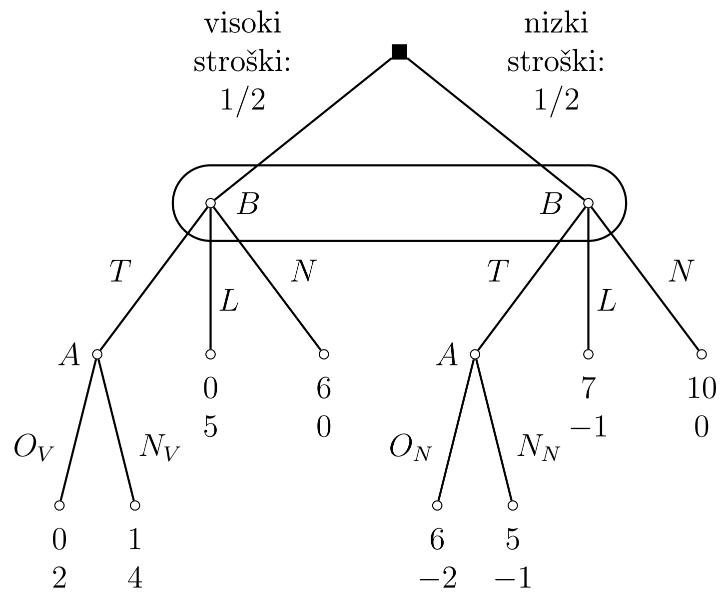
$$
\begin{aligned}
v &= \max_{0 \le p \le 1} \min\{7p, 7 - 7p, 4 - 3p\} = \\
&= \max_{0 \le p \le 1} \begin{cases} 7p & ;\ 0 \le p \le 2/5 \\ 4 - 3p & ;\ 2/5 \le p \le 3/4 \\ 7 - 7p & ;\ 3/4 \le p \le 1 \end{cases} = \\
&= \frac{14}{5}\,.
\end{aligned}
$$

3. Prirejena igra s popolno informacijo ima štiri igralce: prvega s signalom iz stanja ω_1, prvega s signalom iz stanj ω_2, ω_3, drugega s signalom iz stanj ω_1, ω_3 in drugega s signalom iz stanja ω_2. Opazimo, da pri slednjem akcija L dominira akcijo D, zato lahko slednjo eliminiramo iz vseh nadaljnjih postopkov. Za preostale tri igralce dobimo naslednjo igro s popolno informacijo:

	L_{13}	D_{13}
A_1A_{23}	$3, 1; 4$	$4, 3; 2$
A_1B_{23}	$3, 2; 5$	$4, 4; 3$
B_1A_{23}	$1, 1; 0$	$5, 3; 3$
B_1B_{23}	$1, 2; 1$	$5, 4; 4$

Iz tabele je razvidno, da akcija B_{23} strogo dominira akcijo A_{23} (čeprav je v izvirni Bayesovi igri v stanju ω_2 ravno obratno – akcija A strogo dominira akcijo B). Tako dobimo igro za dva igralca, od katerih ima vsak po dve akciji. Mešana Bayesova ravnovesja: $(A_1B_{23}, L_{13}L_2)$, $(B_1B_{23}, D_{13}L_2)$, $\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} B_{23}, \begin{pmatrix} L_{13} & D_{13} \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} L_2\right)$.

4. Drevo igre:



Recimo, da podjetje B takoj vstopi na trg (T). Če ima podjetje A visoke stroške, se mu ne splača oglaševati (N_V), če ima nizke stroške, pa se mu splača oglaševati (O_N). Zdaj lahko izračunamo pričakovani dobiček podjetja B. Če vstopi na trg takoj (T), le-ta znaša $\frac{1}{2}(4 - 2) = 1$, če počaka eno leto (L), le-ta znaša $\frac{1}{2}(5 - 1) = 2$, če pa sploh ne vstopi na trg, le-ta znaša $\frac{1}{2}(0+0) = 0$. Torej se mu najbolj splača počakati eno leto. Edino vgnezdeno behavioristično Nashevo ravnovesje je torej (N_VO_N, L).

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 22. 6. 2015

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. a) Človek, ki nahrani tistega, ki mu sedi desno nasproti, bo vložil napor a in dobil povrnjeno celotno nagrado b. Od tega, da bo nahranjen, bo dobil korist 1, dal pa bo nagrado b. Torej bo njegov izkupiček enak $1 - a$.

Če se premisli in nahrani tistega, ki mu sedi levo nasproti, se bo zadeva spremenila v toliko, da bo dobil povrnjeno samo polovico nagrade b. Torej bo njegov izkupiček enak $1 - a - b/2$.

Če pa se premisli tako, da ne nahrani nikogar, ne bo vložil napora a in tudi nagrade b ne bo dobil. Njegov izkupiček bo enak $1 - b$.

Dani profil bo torej čisto Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko bo $1-a \geq 1-a-b/2$ in $1 - a \geq 1 - b$, torej natanko tedaj, ko bo $b \geq a$ in $b \geq 0$.

b) Če se igralec premisli tako, da bodisi vedno nahrani tistega, ki mu sedi levo nasproti, bodisi tistega, ki mu sedi desno nasproti, bo vložil napor a, pričakovana vrednost povrnjene nagrade pa bo $3b/4$. Vsak od tistih, ki mu sedita nasproti, ga bo nahranil z verjetnostjo $1/2$, torej bo imel od hrane pričakovano korist 1. Z verjetnostjo $1/4$ ne bo nahranjen in ne bo dal nagrade, z verjetnostjo $3/4$ pa bo nahranjen in bo dal nagrado b. Torej bo pričakovana vrednost, ki jo bo dal za nagrado, enaka $3b/4$. Njegov pričakovani izkupiček je enak $1 - a$. Velja princip indiferentnosti – pričakovani izkupiček je enak ne glede na to, ali nahrani levega ali desnega.

Če pa se igralec premisli tako, da ne nahrani nikogar, ne bo vložil napora in ne bo dobil povrnjenih nagrad. Še vedno pa bo pričakovana korist od hrane enaka 1, pričakovana vrednost, ki jo bo dal za nagrado, pa $3b/4$. Njegov pričakovani izkupiček bo enak $1 - 3b/4$.

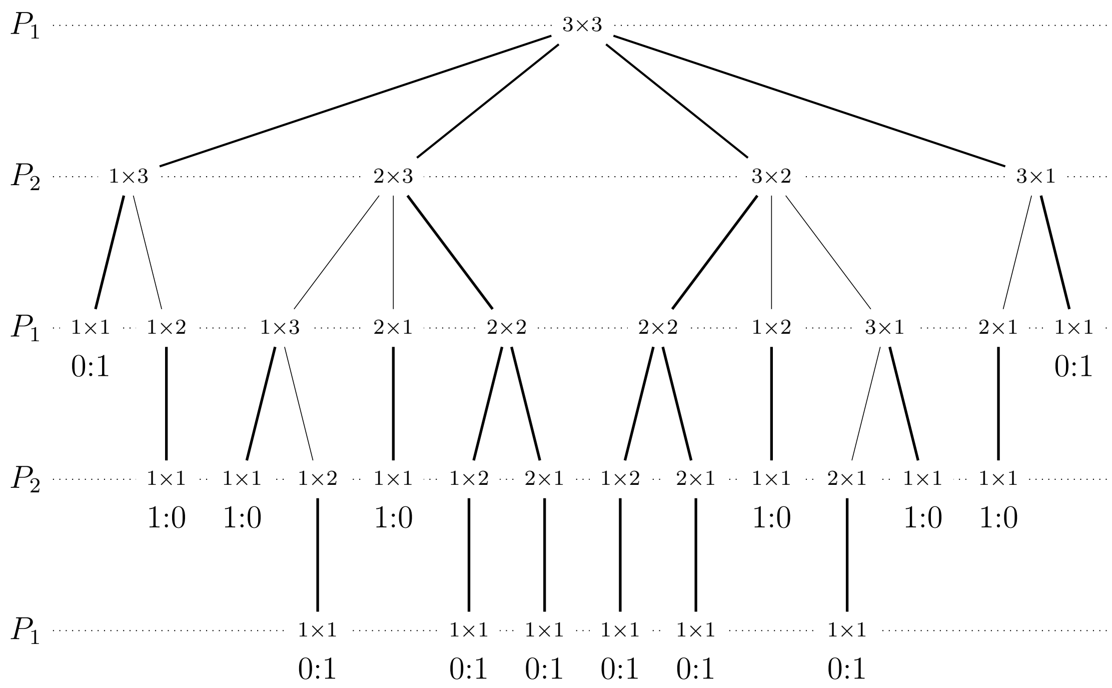
Dani profil bo torej mešano Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko bi $1-a \geq 1-3b/4$, torej natanko tedaj, ko bo $a \leq 3b/4$.

2. Prirejena igra s popolno informacijo ima štiri igralce: prvega s signalom iz stanja ω_1, prvega s signalom iz stanj ω_2, ω_3, drugega s signalom iz stanj ω_1, ω_3 in drugega s signalom iz stanja ω_2. Opazimo, da pri prvem igralcu s signalom iz stanja ω_1 akcija B strogo dominira akcijo A, zato lahko slednjo eliminiramo iz vseh nadaljnjih postopkov. Za preostale tri igralce dobimo naslednjo igro s popolno informacijo:

	L_2L_{13}	L_2D_{13}	D_2L_{13}	D_2D_{13}
A_{23}	1 ; 0, 2·5	4·5 ; 0, 2	5 ; 6, 2·5	8·5 ; 6, 2
B_{23}	4 ; 4, 3	2·5 ; 4, 2	2 ; 0, 3	0·5 ; 0, 2

Iz tabele je razvidno, da akcija L_{13} strogo dominira akcijo D_{13} (čeprav je v izvirni Bayesovi igri v stanju ω_1 ravno obratno – akcija D strogo dominira akcijo L). Tako dobimo igro za dva igralca, od katerih ima vsak po dve akciji. Mešana Bayesova ravnovesja so (B_1B_{23}, L_2L_{13}), (B_1A_{23}, D_2L_{13}) in $\left(B_1 \begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_2 & D_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} L_{13}\right)$.

3. Drevo igre:



Z debelo so označene poteze, ki so v danem vozlišču igre za igralca najboljše. Poljubna kombinacija tako označenih potez je vgnezdeno Nashevo ravnovesje. Teh je torej $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Vgnezdena Nasheva ravnovesja oz. zmagovalno strategijo je možno opisati na naslednji način: če ima igralec, ki je na potezi, na voljo pravokotno tablico, jo odlomi tako, da bo kvadratna; če pa ima na voljo kvadratno tablico, je vseeno, kako je odlomi. V dani igri tako drugi igralec, če igra pravilno, vedno zmaga.

4. Igralcev je pet: pek, prodajalec in trije pomočniki. Vrednost koalicije, ki ne vsebuje tako peka kot prodajalca, je ena nič. Vrednost koalicije, ki vsebuje tako peka kot prodajalca, poleg tega pa še k pomočnikov, pa je enaka $100 + 20k$.

Vrstnih redov pristopanja h koaliciji je sicer $5! = 120$, a za posamezne igralce jih lahko nekaj združimo. Če iščemo Shapleyjevo vrednost za peka, so vsi trije pomočniki enakovredni in če jih identificiramo, je vrstnih redov le še $\frac{5!}{3!} = 20$. Če pek pristopi h koaliciji pred prodajalcem, ne prispeva nič, če pa pristopi za prodajalcem, je njegov prispevek enak $100 + 20k$, kjer je k število pomočnikov, ki so pristopili pred njim. Vrstnih redov, kjer je pred pekom prodajalec in natanko k pomočnikov, je $k + 1$, skupaj 10. Shapleyjeva vrednost za peka je torej enaka:

$$\frac{1}{20}\big[10 \cdot 100 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3\big] = 70\,.$$

To je tudi Shapleyjeva vrednost za prodajalca, saj sta ta dva v igri enakovredna.

Pomočnik pa prispeva 20, če je tako za pekom kot tudi za prodajalcem; sicer ne prispeva nič. Vrstni red pristopanja lahko konstruiramo tako, da najprej postavimo peka, nato prodajalca pred ali za pekom, nato aktualnega pomočnika na enega od treh položajev, na koncu pa še oba ostala pomočnika. Tako vidimo, da je pomočnik za pekom in prodajalcem pri natanko tretjini vrstnih redov, zato je njegova Shapleyjeva vrednost enaka $20/3 = 6\frac{2}{3}$.

Opomba. Dovolj je izračunati Shapleyjevo vrednost za enega igralca, vse ostale lahko izračunamo tako, da upoštevamo, da sta pek in prodajalec enakovredna, da so enakovredni vsi trije pomočniki in še, da je vsota vseh Shapleyjevih vrednosti enaka vrednosti polne koalicije, ki je $100 + 3 \cdot 20 = 160$. Zlahka preverimo, da tudi naračunane vrednosti temu ustrezajo.

2013/14

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 22. 11. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Iz preferenčne funkcije drugega igralca dobimo naslednja najboljša odgovora tega igralca:

- Če prvi igralec igra L, je $a = 1$.
- Če prvi igralec igra R, je $a = 0$.

Zdaj pa si pri teh najboljših odgovorih oglejmo najboljše odgovore prvega igralca:

- Če je $a = 0$, je najboljši odgovor R.
- Če je $a = 1$, sta L in R enako dobra odgovora.

Nashevi ravnovesji sta torej $(L, 1)$ in $(R, 0)$.

2. Oglejmo si najprej, koliko v Nashevem ravnovesju znaša najvišja ponujena cena m. Zagotovo ne znaša več kot 1000 evrov (t. j. najmanj 1100 evrov), saj bi v nasprotnem primeru kupec, ki bi ponudil toliko, imel izgubo in bi se mu bolj splačalo ponuditi nižjo ceno, pri kateri ne bi dobil predmeta. Dokažimo, da pa tudi ne more znašati manj kot 1000 evrov. Če maksimalna cena znaša manj kot 1000 evrov (t. j. največ 900 evrov), morajo to ceno ponuditi vsi kupci: sicer bi se tistemu, ki ponudi manj, splačalo ponudbo dvigniti na 900 evrov, da bi s pozitivno verjetnostjo dobil predmet in imel pozitiven dobiček. Pričakovani dobiček tistega igralca, ki mu predmet pomeni največ, je $(1015 - m)/10$; če ponudbo dvigne za 100 evrov, je novi dobiček enak $915 - m$. Torej mora biti $(1015 - m)/10 \geq 915 - m$ oziroma $m \geq 903\frac{8}{9}$, kar je protislovje.

Najvišja ponujena cena mora torej znašati natanko 1000 evrov in toliko lahko ponudi le kupec, ki mu predmet pomeni največ: ostali bi pri tej ceni imeli izgubo. Kupcu, ki mu predmet pomeni največ, se seveda ne splača ponudbe še dvigniti, morda pa se mu jo splača spustiti. Če druga najvišja cena znaša manj kot 900 evrov, se mu seveda splača ceno spustiti na 900 evrov. Torej mora druga najvišja cena znašati natanko 900 evrov. Naj si jo deli k kupcev. Kupcu, ki mu predmet pomeni največ, se splača ceno spustiti kvečjemu na teh 900 evrov (sicer ne bo dobil nič). Tedaj bo njegov dobiček namesto začetnih 15 evrov znašal $115/(k+1)$ evrov, torej bo moralo biti $15 \geq 115/(k+1)$ oziroma $k \geq 6\frac{2}{3}$.

Sklep: v Nashevem ravnovesju smo natanko tedaj, ko noben kupec ne ponudi več kot 1000 evrov, kupec, ki mu predmet pomeni največ, ponudi 1000 evrov in vsaj sedem kupcev ponudi 900 evrov.

3. Najprej iz:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & b+2 \end{bmatrix}$$

razberemo, da drugi igralec ne more mešati akcije X: kakršen koli delež akcije X se mu bolj splača zamenjati z Y. Nadalje iz principa indiferentnosti za prvega igralca sledi, da drugi igralec ne more igrati čiste strategije. Torej mora mešati $\begin{pmatrix} Y & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, kjer je $0 < q < 1$. Iz principa indiferentnosti za drugega igralca dobimo $b + 2 = 4$, torej $b = 2$. Iz koristnostne funkcije prvega igralca pa dobimo $5 - 4q = 3 + 4q \geq 2 - 2q + aq$, od koder sledi $q = 1/4$ in $a \leq 10$.

Sklep: iskano Nashevo ravnovesje je $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y & Z \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right)$, velja pa za $a \geq 10$ in $b = 2$. Parameter c je lahko poljuben.

4. a) Naj Alfred izbere število i z verjetnostjo p_i, Bernard pa z verjetnostjo q_i. Iz principa indiferentnosti za Alfreda dobimo:

$$q_1 - q_2 = q_2 - q_3 = \cdots = q_{n-1} - q_n = q_n \,,$$

kar ima za rešitev $q_i = (n - i + 1)q_n$. Ker mora biti vsota verjetnosti enaka 1, je končno $q_i = \dfrac{2(n-i+1)}{n(n+1)}$.

Iz principa indiferentnosti za Bernarda pa dobimo:

$$-p_1 = p_1 - p_2 = p_2 - p_3 = \cdots = p_{n-1} - p_n \,,$$

od koder podobno kot prej sledi $p_i = \dfrac{2i}{n(n+1)}$.

b) *Prvi način.* Če Alfred izbere število i, Bernard pa meša in njegove verjetnosti označimo tako kot v prejšnji točki, Alfred dobi $q_i - q_{i+1}$, če je $i = 1, \ldots n-1$, in q_n, če je $i = n$. Če torej Alfred izbere število i s strogo pozitivno verjetnostjo, je $q_i - q_{i+1}$ oziroma q_n največje izmed števil $q_1 - q_2, \ldots q_{n-1} - q_n, q_n$. Dotični maksimum je očitno strogo večji od nič. To pomeni, da, če Alfred s strogo pozitivno verjetnostjo izbere število i, to število s strogo pozitivno verjetnostjo izbere tudi Bernard.

Podobno, če Bernard izbere število j, Bernard pa meša in njegove verjetnosti označimo tako kot v prejšnji točki, Bernard dobi $-p_1$, če je $j = 1$, in $p_{j-1} - p_j$, če je $i = 2, \ldots n$. Če torej Bernard izbere število j s strogo pozitivno verjetnostjo, je $-p_1$ oziroma $p_{j-1} - p_j$ največje izmed števil $-p_1, p_1 - p_2, \ldots p_{n-1} - p_n$.

Pokažimo, da je slednji maksimum strogo manjši od nič. Pa recimo, da temu ni tako. Gotovo obstaja število i, ki ga Alfred izbere s strogo pozitivno verjetnostjo, t. j. $p_i > 0$. Ugotovili smo že, da je tedaj tudi $q_i > 0$. Toda potem mora biti pri $p_{i-1} - p_i$ dosežen maksimum (pri $-p_i$ ob naši predpostavki ne more biti), torej je $p_{i-1} - p_i \geq 0$, to pa pomeni, da je tudi $p_{i-1} > 0$. Potem pa je tudi $q_{i-1} > 0$ in spet $p_{i-2} > 0$, torej končno $p_1 > 0$, $q_1 > 0$ in $-p_1 > 0$, kar je protislovje.

Ker je maksimum števil $-p_1, p_1 - p_2, \ldots p_{n-1} - p_n$ strogo manjši od nič, mora biti $p_i > 0$ za vse i. Potem pa mora biti tudi $q_i > 0$ za vse i, torej zahtevano mešano Nashevo ravnovesje ne obstaja.

Drugi način. Opazimo, da je to kvadratna igra z ničelno vsoto (matrična igra) z enim samim mešanim Nashevim ravnovesjem, kjer oba igralca strogo mešata vse akcije. Teorija pa pravi, da je to v tem primeru edino mešano Nashevo ravnovesje nasploh, torej zahtevano mešano Nashevo ravnovesje ne obstaja.

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 28. 1. 2014

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Najprej opazimo, da je akcija prva vrstica dominirana z mešanico $1 - p$ druge in p tretje, brž ko je brž ko je $6/11 \le p \le 3/5$. Vrednost igre se splača izračunati kot:

$$\max_{0 \le p \le 1} \min\{11p, 4-2p, 10-10p, 2+2p\} = \max_{0 \le p \le 1} \begin{cases} 11p & ; 0 \le p \le 2/9 \\ 2+2p & ; 2/9 \le p \le 1/2 \\ 4-2p & ; 1/2 \le p \le 3/4 \\ 10-10p & ; 3/4 \le p \le 1 \end{cases} = 3\,.$$

2. Stanja igre so vse možne delitve kart. Za vsako delitev kart signal posameznemu igralcu pove, kateri karti je dobil on. Strategija za vsakega igralca z znanima kartama pove, katero naj odvrže: strategije so vse možne kombinacije. Dovolj pa je povedati, katero karto posamezen igralec odvrže v primeru, ko dobi dve različni karti. Koristnostni funkciji sta jasni. Aposteriorne verjetnosti dobimo iz apriornih, pri katerih so vse možne delitve, kjer vse karte ločimo, enako verjetne.

Čisto Bayesovo ravnovesje je profil, pri katerem ima vsak od igralcev naslednjo strategijo:

- Če dobi kamen in škarje, odvrže škarje.
- Če dobi škarje in papir, odvrže papir.
- Če dobi papir in kamen, odvrže kamen.

Izračunajmo pričakovano koristnost posameznega igralca s signalom za ta profil. Manj zanimiva možnost je, da je dobil dve enaki karti. Zaradi simetrije lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je dobil dvakrat kamen. Preostanejo še dvakrat škarje in dvakrat papir. Možni nasprotnikovi nabori kart skupaj z aposteriornimi verjetnostmi in dobitki igralca so naslednji:

nasprotnikovi karti	aposteriorna verjetnost	dobitek
škarje, papir	2/3	0
škarje, škarje	1/6	1
papir, papir	1/6	0

Pričakovani dobitek znaša 1/6 točke. Zanimivejša pa je možnost, da je dobil dve različni karti. Spet lahko zaradi simetrije brez škode za splošnost privzamemo, da je dobil kamen in škarje. Preostanejo še karte kamen, škarje in dvakrat papir. Možni nasprotnikovi nabori kart skupaj z aposteriornimi verjetnostmi in dobitki igralca so naslednji:

nasprotnikovi karti	aposteriorna verjetnost	dobitek
kamen, škarje	1/6	1/2
kamen, papir	1/3	0
škarje, papir	1/3	1
papir, papir	1/6	1

Pričakovani dobitek znaša 7/12 točke.

Zdaj pa moramo pričakovane dobitke primerjati s pričakovanimi dobitki v primerih, ko igralec s signalom zamenja strategijo. Formalno gledano strategija opisuje ravnanje v vseh primerih: tako opis strategije igralca, ki dobi kamen in škarje, zajema tudi irelevantni primer, ko bi dobil škarje in papir. Toda koristnostna funkcija se bo spremenila le, če se bo spremenil predpis, kako naj ravna, če je dobil kamen in škarje. Torej se bo namesto 'odvrzi škarje' glasil 'odvrzi kamen'. V tem primeru je situacija naslednja:

nasprotnikovi karti	aposteriorna verjetnost	dobitek
kamen, škarje	1/6	1
kamen, papir	1/3	1/2
škarje, papir	1/3	0
papir, papir	1/6	0

in pričakovani dobiček znaša 1/3, kar je manj od prejšnjih 7/12.

Opomba. Ker je to simetrična igra s fiksno vsoto 1, mora *apriorni* pričakovani dobiček vsakega igralca nujno znašati 1/2. Možno je izračunati, da posamezen igralec dobi enaki karti z verjetnostjo 1/5 in različni z verjetnostjo 4/5. Apriorni pričakovani dobiček torej znaša $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{2}$, tako kot mora biti.

3. Po izteku igre sta dobitka enaka:

$$u_1(q_1, q_2) = \big((5 - q_1 - q_2)_+ - 1\big)q_1\,, \qquad u_2(q_1, q_2) = \big((5 - q_1 - q_2)_+ - 1\big)q_2\,.$$

Najprej moramo raziskati, kdaj pri danem q_1 izraz $u_2(q_1, q_2)$ doseže maksimum. Vrednosti in najboljše odgovore lahko tabeliramo:

	$q_2 = 0$	$q_2 = 1$	$q_2 = 2$	$q_2 = 3$	$q_2 = 4$	$q_2 \geq 5$	Najboljši odgovor
$q_1 = 0$	0	3	4	3	0	< 0	2
$q_1 = 1$	0	2	2	0	< 0	< 0	$1, 2$
$q_1 = 2$	0	1	0	< 0	< 0	< 0	1
$q_1 = 3$	0	0	< 0	< 0	< 0	< 0	$0, 1$
$q_1 \geq 4$	0	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	0

Označimo strategije prvega proizvajalca z A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, glede na to, koliko proizvede. Strategije drugega pa so vse kombinacije akcij B_{ij_i} za $i = 0, 1, 2, \ldots$, kjer B_{ij} pomeni, da, če prvi proizvede i, drugi proizvede j. Toda le za $i = 1$ in $i = 3$ imamo po dve možnosti, sicer vselej po eno. Zato v opisu strategije lahko navedemo le B_{11} ali B_{12} in še B_{30} ali B_{31} (tako recimo strategija $B_{11}B_{30}$ v resnici pomeni $B_{02}B_{11}B_{21}B_{30}B_{40}B_{50}\ldots$ Končno iz vrednosti koristnostne funkcije prvega igralca za izbrane profile:

$$\begin{gathered} u_1(0,2) = 0\,, \quad u_1(1,1) = 2\,, \quad u_1(1,2) = 1\,, \quad u_1(2,1) = 2\,, \\ u_1(3,0) = 3\,, \quad u_1(3,1) = 0\,, \quad u_1(4,0) = 0\,, \\ u_1(q_1, 0) < 0 \text{ za } q_1 \geq 5 \end{gathered}$$

dobimo naslednja vgnezdena Nasheva ravnovesja skupaj s koristnostnimi funkcijami:

$$\begin{matrix} (A_3, B_{11}B_{30}) \\ (3,0) \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} (A_1, B_{11}B_{31}) \\ (2,2) \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} (A_2, B_{11}B_{31}) \\ (2,1) \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} (A_3, B_{12}B_{30}) \\ (3,0) \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} (A_2, B_{12}B_{31}) \\ (2,1) \end{matrix}\,.$$

Iz koristnostnih funkcij vidimo, da je bolje biti prvi proizvajalec (četudi ne strogo bolje, ker pri profilu $(A_2, B_{11}B_{31})$ oba dobita enako).

4. Za vse možne vrstne rede pristopanja h koaliciji moramo izračunati, koliko posamezen igralec prispeva k skupnemu dobitku. Če je Adrijan v koalicijo stopil kot i-ti, je njegov prispevek enak i, če je pred njim že vstopila Brigita ali pa Cveto, sicer pa je enak nič. Verjetnost tega dogodka je:

$$\frac{1}{6}\left(2 \cdot \frac{i-1}{5} - \frac{(i-1)(i-2)}{5 \cdot 4}\right) = \frac{11i - i^2 - 10}{120}$$

in je za $i = 1$ seveda enaka nič. Torej je Adrijanova Shapleyjeva vrednost enaka:

$$\sum_{i=2}^{6} i \cdot \frac{5i - i^2 - 4}{120} = 2 \cdot \frac{8}{120} + 3 \cdot \frac{14}{120} + 4 \cdot \frac{18}{120} + 5 \cdot \frac{20}{120} + 6 \cdot \frac{20}{120} = \frac{35}{12}\,.$$

Če je Brigita vstopila v koalicijo kot i-ta, je njen prispevek enak i, če je pred njo že vstopil Adrijan, ne pa tudi Cveto. Verjetnost tega dogodka je $\frac{1}{6} \cdot \frac{i-1}{5} \cdot \frac{6-i}{4}$ in je za $i = 1$ in $i = 6$ seveda enaka nič. Če sta pred Brigito vstopila tako Adrijan kot tudi Cveto, je njen prispevek enak 1. Verjetnost tega dogodka je $\frac{1}{6} \cdot \frac{i-1}{5} \cdot \frac{(i-2)}{4}$ in je za $i = 1, 2$ enaka nič. Sicer (če Adrijan ni vstopil pred Brigito) pa je njen prispevek enak nič. Torej je Brigitina Shapleyjeva vrednost enaka:

$$\sum_{i=2}^{5} i \cdot \frac{(i-1)(6-i)}{120} + \sum_{i=3}^{6} \frac{(i-1)(i-2)}{120} = \frac{11}{12}\,.$$

To je tudi Cvetova Shapleyjeva vrednost. Za vsakega od preostalih igralcev pa velja, da je, če je pred njim že vstopil Adrijan ter tudi Brigita ali Cveto, njegov prispevek enak 1, sicer pa je enak nič. Verjetnost, da se to zgodi in da je dani igralec hkrati vstopil kot i-ti, je enaka:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{i-1}{5} \cdot \left(2 \cdot \frac{i-2}{4} - \frac{(i-2)(i-3)}{4 \cdot 3}\right) = \frac{(i-1)(11i - i^2 - 18)}{360},$$

in je za $i = 1, 2$ enaka nič. Torej je Shapleyjeva vrednost enaka:

$$\sum_{i=3}^{6} \frac{(i-1)(11i - i^2 - 18)}{360} = \frac{12}{360} + \frac{30}{360} + \frac{48}{360} + \frac{60}{360} = \frac{5}{12}.$$

Opomba. Vsota vseh Shapleyjevih vrednosti je $\frac{35}{12} + 2 \cdot \frac{11}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} = 6$, kar je natančno skupni dobitek polne koalicije. Torej bi lahko enega od računov izpustili.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 10. 2. 2014

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Opazimo, da pri prvem igralcu akcija T dominira akcijo B. Dominacija sicer ni stroga, nam pa vseeno pomaga izločiti kar nekaj profilov. Iz:

$$\begin{aligned} U_1\left(T, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1-r & r \end{pmatrix}\right) &= 1\,, \\ U_1\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1-r & r \end{pmatrix}\right) &= (1-q)(1-r) + qr \end{aligned}$$

sledi, da lahko akcijo B izločimo, brž ko je $(1-q)(1-r) + qr < 1$. Nekaj analize pokaže, da v okviru splošnih omejitev za q in r to ni res samo v dveh primerih: ko je $q = r = 0$ in ko je $q = r = 1$ ali z drugimi besedami, ko drugi in tretji igralec igrata (X, L) ali (Y, R). Ločimo torej tri možnosti:

1. *Prvi igralec igra* T. V tem primeru hitro vidimo, da morata oba igralca mešati. Če se držimo oznak od prej, iz principa indiferentnosti dobimo $2 = 1 + 3r$ in $3 = 4 - 3q$, od koder dobimo mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(T, \begin{pmatrix} X & Y \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & R \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right).$$

2. *Drugi igralec igra* X*, tretji pa* L. Iz pogojev:

$$\begin{aligned} U_2\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X, L\right) &\ge U_2\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Y, L\right), \\ U_3\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X, L\right) &\ge U_2\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X, R\right) \end{aligned}$$

dobimo družino mešanih Nashevih ravnovesij:

$$\left(\begin{pmatrix} T & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X, L\right)\;;\quad \frac{1}{3} \le p \le \frac{1}{2}\,.$$

3. *Drugi igralec igra* Y*, tretji pa* R. Tu pa pogoja za koristnostni funkciji drugega in tretjega igralca nista izpolnjena in ne dobimo mešanih Nashevih ravnovesij.

2. Vsak od igralcev ima dve akciji: vreči ali ne vreči karto. Stanja igre je možno podati na več načinov. Lahko so to npr. kar razporeditve kart v kupu, za katere privzamemo, da so označene: v tem primeru imamo $5! = 120$ enako verjetnih stanj. Lahko so to vsa možna jemanja dveh označenih kart s kupa: v tem primeru imamo $6 \cdot 5 = 30$ enako verjetnih stanj. Lahko pa stanje le pove, kateri igralec ima kakšno karto, npr. prvi igralec ima asa, drugi pa fanta (karte so neoznačene). V tem primeru pa imamo 9 stanj, a niso vsa enako verjetna: stanja, kjer imata oba igralca enaki karti, imajo verjetnosti 1/15, stanja, kjer imata različni karti, pa 2/15. Pri tej definiciji stanj sta koristnostni funkciji naslednji:

FF

	V	N
V	$0,0$	$0,0$
N	$0,0$	$0,0$

FK

	V	N
V	$-1,1$	$1,-1$
N	$0,0$	$0,0$

FA

	V	N
V	$-2,2$	$2,-2$
N	$0,0$	$0,0$

KF

	V	N
V	$1,-1$	$0,0$
N	$-1,1$	$0,0$

KK

	V	N
V	$0,0$	$1,-1$
N	$-1,1$	$0,0$

KA

	V	N
V	$-1,1$	$2,-2$
N	$-1,1$	$0,0$

AF

	V	N
V	$2,-2$	$0,0$
N	$-2,2$	$0,0$

AK

	V	N
V	$1,-1$	$1,-1$
N	$-2,2$	$0,0$

AA

	V	N
V	$0,0$	$2,-2$
N	$-2,2$	$0,0$

Signal posameznemu igralcu pove, kakšno karto ima. Vsak igralec torej lahko dobi tri signale – 'fant', 'kralj' ali 'as'.

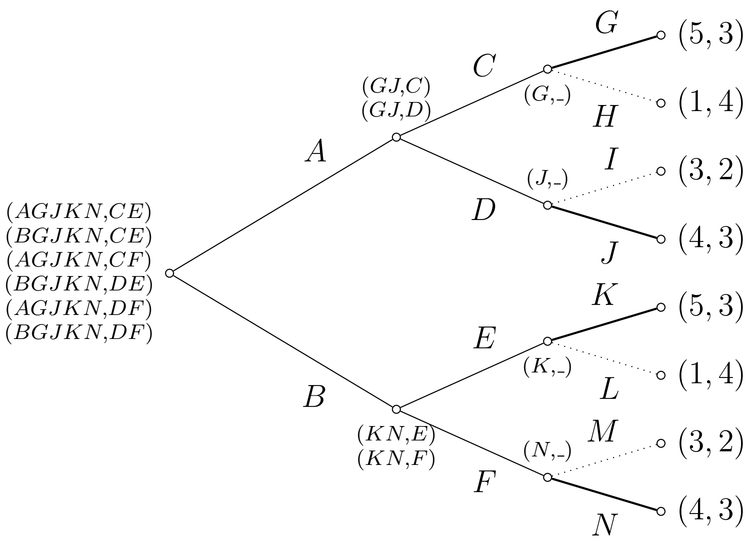
Iz tabele odčitamo, da pri igralcu, ki dobi asa, akcija 'vreči' v vseh stanjih strogo dominira akcijo 'ne vreči'. Zato igralec asa vedno vrže.

Podobno je pri igralcu, ki dobi kralja: akcija 'vreči' v vseh stanjih dominira akcijo 'ne vreči'. To pomeni, da, če obstaja čisto Bayesovo ravnovesje, obstaja tudi tako, pri katerem nobeden od igralcev ne vrže kralja. Možno pa je tudi izračunati, da je v prirejeni strateški igri dominacija stroga, torej dejansko ni Bayesovega ravnovesja, pri katerem kakšen od igralcev ne bi vrgel asa.

Končno, če zožimo igro, tako da igralec, ki dobi asa ali kralja, tega vrže, dobimo, da pri igralcu, ki vrže fanta, akcija 'ne vreči' dominira akcijo 'vreči'. Spet je možno izračunati, da je v prirejeni strateški igri dominacija stroga. Od tod sledi, da ima igra čisto Bayesovo ravnovesje $(N_{F1}V_{K1}V_{A1}, N_{F2}V_{K2}V_{A2})$: vsak od igralcev igra tako, da fanta ne vrže, kralja ali asa pa vrže. Če upoštevamo strogost dominacij, dobimo, da je to tudi edino mešano Bayesovo ravnovesje.

Opomba. Pri izračunu Bayesovega ravnovesja nismo čisto nič potrebovali aposteriornih verjetnosti. To pomeni, da rezultat velja ne glede na to, koliko fantov, kraljev ali asov je v kupu, z edino omejitvijo, da v kupu ni samih fantov. V slednjem primeru se namreč enako splača fanta vreči ali ne vreči.

3. Drevo z ustreznimi vgnezdenimi Nashevimi ravnovesji podiger:



4. Jedro je tista delitev dobitka polne koalicije, pri kateri nobena od koalicij, ki izstopi iz polne koalicije, ne dobi več, kot bi skupaj dobila, če bi ostala v kviru polne koalicije in bi si dobitek 2 razdelila po njenih pravilih.

Najprej si oglejmo koalicije, sestavljene le iz enega igralca. Ker je dobitek osamljenega igralca ne glede na spol enak nič, to pomeni, da mora v polni koaliciji vsak igralec dobiti vsaj nič (ne sme se zgoditi, da bi še kaj plačal).

Koalicija, sestavljena iz dveh moških in dveh žensk, dobi 2, če izstopi. Torej mora vsaj toliko dobiti tudi v okviru polne koalicije. A več kot 2 ne more dobiti, ker vsak posameznik dobi vsaj nič. To pomeni, da mora biti dobitek moškega, ki ostane izven te koalicije, enak nič. Ko pogledamo vse take koalicije, vidimo, da morajo biti dobitki vseh moških enaki nič.

Koalicija, sestavljena iz treh moških in ene ženske, pa dobi 1, če izstopi. Vsaj toliko mora dobiti tudi v okviru polne koalicije, kar pomeni, da sme preostala ženska dobiti največ 1. Torej v jedru vsaka izmed žensk dobi največ 1. A ker moški ne dobijo nič, dobi ženska natanko 1.

Jedro torej sestavlja kvečjemu delitev, pri kateri moški dobijo 0, ženske pa 1. Pri taki delitvi vsaka skupina dobi natanko toliko, kot je v njej žensk, to pa je najmanj toliko, kot bi dobila, če bi izstopila iz koalicije. Ta delitev torej dejansko je (edina) v jedru.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 20. 5. 2014

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Če je sodelavec prizadeven, je njegova koristnostna funkcija enaka $3\ln(1+p)-1$, če pa se iz prizadevnega spremeni v lenega, je njegova nova koristnost enaka $3\ln p$. Podobno, če je sodelavec len, je njegova koristnostna funkcija enaka $3\ln(1+p)$, če pa se spremeni v prizadevnega, je nova koristnost enaka $3\ln(2+p)-1$. Profil je torej Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja:

$$\begin{aligned} 3\ln(1+p)-1 &\geq 3\ln p\,, && \text{brž ko je} \quad p \geq 1\,, \\ 3\ln(1+p) &\geq 3\ln(2+p)-1\,, && \text{brž ko je} \quad p \leq 4\,, \end{aligned}$$

Če je $p>0$, je prvi pogoj ekvivalenten $p \leq 1/\bigl(e^{1/3}-1\bigr) \doteq 2\text{·}53$, drugi pa $p \geq \bigl(2-e^{1/3}\bigr)/\bigl(e^{1/3}-1\bigr) \doteq 1\text{·}53$. Nashevo ravnovesje torej nastopi natanko tedaj, ko sta prizadevna delavca natanko dva. Takih profilov je $\binom{5}{2}=10$.

2. Prirejeno igro s popolno informacijo lahko zapišemo takole:

	$L_{12}L_3$	$L_{12}R_3$	$R_{12}L_3$	$R_{12}R_3$
T_{123}	$2;3,3$	$5;3,5$	$2;4,3$	$5;4,5$
B_{123}	$8;4,7$	$2;4,1$	$8;5,7$	$2;5,1$

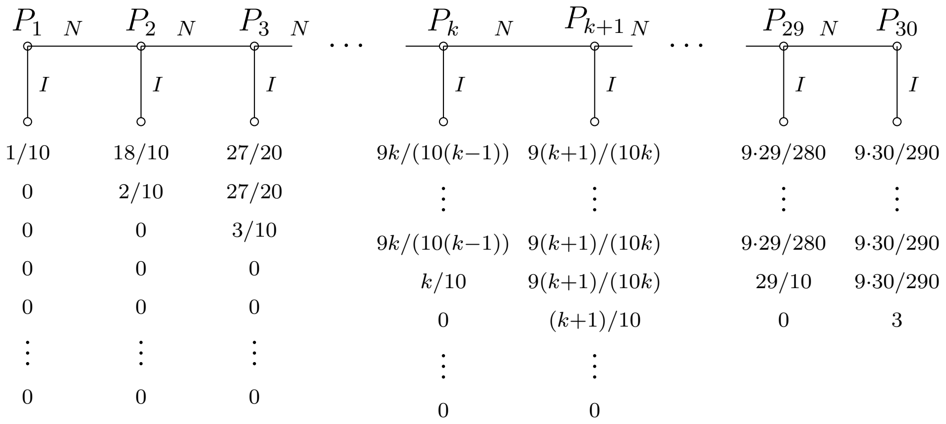
,

pri čemer prva številka pomeni (pričakovano) korist prvega igralca, druga številka korist drugega igralca, ki ve, da je v stanju ω_1 ali ω_2, tretja pa korist drugega igralca, ki ve, da je v stanju ω_3. Opazimo, da akcija R_{12} strogo dominira akcijo L_{12} (čeprav v izvirni igri ni dominacije v nobenem stanju). Torej lahko problem prevedemo na iskanje mešanih ravnovesij naslednje igre:

	L_3	R_3
T_{123}	$2,3$	$5,5$
B_{123}	$8,7$	$2,1$

Mešana Bayesova ravnovesja: $(T_{123}, R_{12}R_3)$, $(B_{123}, R_{12}L_3)$,
$\left(\begin{pmatrix} T_{123} & B_{123} \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right)$, $R_{12}\left(\begin{pmatrix} L_3 & R_3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\right)$.

3. Drevo igre lahko prikažemo na naslednji način:



Vgnezdena Nasheva ravnovesja začnemo iskati od zadaj. Zadnji igralec lahko ubere le akcijo I. Ker je $29/10 > 9 \cdot 30/290$, se tudi predzadnjemu igralcu strogo bolj splača ubrati akcijo I. Tako velja tudi še za nekaj igralcev nazaj. Morda to velja kar za vse igralce, morda pa ne. V slednjem primeru naj bo k zadnji igralec (t. j. prvi od zadaj), ki se mu ne splača strogo ubrati akcije I. To pomeni, da je:

$$\frac{k}{10} \le \frac{9(k+1)}{10k}, \quad \text{medtem ko je} \quad \frac{l}{10} > \frac{9(l+1)}{10l} \quad \text{za vse } k < l < 30\,.$$

Neenačba $\dfrac{k}{10} \le \dfrac{9(k+1)}{10k}$ je za $k > 0$ ekvivalentna neenačbi $k^2 - 9k - 9 \le 0$, ta pa neenačbi $\dfrac{9-3\sqrt{13}}{2} \le k \le \dfrac{9+3\sqrt{13}}{2}$. Ker je $\dfrac{9-3\sqrt{13}}{2} < 0 < 9 < \dfrac{9+3\sqrt{13}}{2} < 10$, omenjena neenačba velja za $k = 1, 2, \ldots 9$ (velja celo stroga neenakost), medtem ko za $k = 10, 11, \ldots 29$ omenjena neenačba ne velja. To pomeni, da v vgnezdenem Nashevem ravnovesju vsi igralci od 10. do 30. uberejo akcijo I, medtem ko 9. igralec ubere akcijo N.

Naj bo zdaj $j < 9$ igralec, za katerega velja, da vsi nadaljnji do vključno devetega uberejo akcijo I. Če tak igralec ubere N, dobi $99/100$, medtem ko, če ubere I, dobi $j/10$. Ker za vse $j < 9$ velja $99/100 > j/10$, v vgnezdenem Nashevem ravnovesju vsi igralci do vključno devetega uberejo akcijo N, medtem ko, kot smo že ugotovili, vsi nadaljnji uberejo I. Deseti igralec torej zaključi igro.

4. Situacijo najprej zmodeliramo kot strateško igro, kjer sta igralca banki, vsaka banka pa ima dve možni akciji: S (stečaj) ali P (prestrukturiranje). Upoštevajoč verjetnosti in pričakovane vrednosti, dobimo:

	S	P
S	$2,6$	$4,5$
P	$6,4$	$8,3$

Točka status quo je določena z Nashevim ravnovesjem matrične igre razlik:

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ta matrična igra ima čisto Nashevo ravnovesje (P, S) – to je sedlo. To pomeni, da je točka status quo $(6, 4)$ z razliko 2 v korist prve banke. Ker gre za igro s prenosljivo dobrino, banki sporazumno ubereta optimalno strategijo (P, P), pri kateri prva iztrži 8, druga pa 3. Kompenzaciji pa se določita tako, da se ohrani razlika iz točke status quo, ki znaša 2. Torej mora prva banka drugi plačati $1{\cdot}5$, tako da nazadnje prva banka iztrži $6{\cdot}5$, druga pa $4{\cdot}5$.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 29. 8. 2014

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. a) Naj $4 - k$ igralcev igra akcijo A, k igralcev pa akcijo B. V spodnji tabeli je za vsak k prikazan pogoj, ki morajo veljati za igralca, ki igra A oz. B, da se mu ne splača premisliti:

k	A	B
0	$6 \geq 5$	—
1	$4 \geq 3$	$5 \geq 6$
2	$2 \geq 4$	$3 \geq 4$
3	$0 \geq 8$	$4 \geq 2$
4	—	$8 \geq 0$

Vidimo, da je vse izpolnjeno le pri $k = 0$ in $k = 4$. Sledi, da ima igra dve čisti Nashevi ravnovesji, in sicer, da vsi igrajo A ali da vsi igrajo B.

b) Recimo, da vsak igralec igra A z verjetnostjo p, B pa z verjetnostjo $1 - p$. Če se določen igralec premisli in igra A, je njegov pričakovani dobitek enak:

$$(1 - p)^3 \cdot 6 + 3p(1 - p)^2 \cdot 4 + 3p^2(1 - p) \cdot 2 + p^3 \cdot 0\,,$$

Če se premisli, da bo igral B, pa je enak:

$$(1 - p)^3 \cdot 5 + 3p(1 - p)^2 \cdot 3 + 3p^2(1 - p) \cdot 4 + p^3 \cdot 8\,.$$

Po principu indiferentnosti morata biti oba pričakovana dobitka enaka. Po ureditvi dobimo $1 - 9p^2 = 0$, kar pomeni, da edino iskano mešano Nashevo ravnovesje nastopi pri $p = 1/3$.

2. Najprej opazimo, da pri $P_{1;\{\omega_1\}}$ akcija C strogo dominira akcijo A in da pri $P_{2;\{\omega_2\}}$ akcija D strogo dominira akcijo L. Ko ustrezni akciji odstranimo in prevedemo na strateško igro, dobimo:

$P_{1;\{\omega_1\}}, P_{1;\{\omega_2,\omega_3\}} \backslash P_{2;\{\omega_1,\omega_3\}}$	L_{13}	D_{13}
$B_1 A_{23}$	$0, 4; 1$	$4, 5; 2$
$B_1 B_{23}$	$0, 5; 2$	$4, 6; 3$
$B_1 C_{23}$	$0, 4; 3$	$4, 4; 4$
$C_1 A_{23}$	$5, 4; 2$	$4, 5; 1$
$C_1 B_{23}$	$5, 5; 3$	$4, 6; 2$
$C_1 C_{23}$	$5, 4; 4$	$4, 4; 3$

V tej igri akcija B_{23} strogo dominira akciji A_{23} in C_{23}. Ko le-ti odstranimo, je potrebno gledati le še igralca $P_{1;\{\omega_1\}}$ in $P_{2;\{\omega_1,\omega_3\}}$. Dobimo igro:

$P_{1;\{\omega_1\}} \backslash P_{2;\{\omega_1,\omega_3\}}$	L_{13}	D_{13}
B_1	$0; 2$	$4; 3$
C_1	$5; 3$	$4; 2$

z mešanimi Nashevi ravnovesji:

$$(C_1, L_{13}) \quad \text{in} \quad \left(\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \; D_{13}\right) \; ; \; 0 \le p \le \frac{1}{2} \, .$$

Mešana Bayesova ravnovesja prvotne igre so torej:

$$(C_1 B_{23}, L_{13} D_2) \quad \text{in} \quad \left(\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} B_{23} \, , \; D_{13} D_2\right) \; ; \; 0 \le p \le \frac{1}{2} \, .$$

3. Koristnost drugega igralca je enaka:

$$u_2(q_1, q_2) = \frac{q_2}{q_1 + q_2} - q_2 \, .$$

Velja $u_2(q_1, 0) = 0$, ko gre q_2 proti neskončno, pa gre $u_2(q_1, q_2)$ proti minus neskončno. Po odvajanju:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = \frac{q_1}{(q_1 + q_2)^2} - 1$$

dobimo, da moramo ločiti dva primera:

- Če je $q_1 < 1$, je stacionarna točka pri $q_2 = \sqrt{q_1} - q_1$ in velja $u_2\big(q_1, \sqrt{q_1} - q_1\big) = \big(1 - \sqrt{q_1}\big)^2 > 0$. Torej je v stacionarni točki maksimum in to količino proizvede drugi proizvajalec.
- Če je $q_1 \le 1$, v notranjosti definicijskega območja ni stacionarne točke. Od tod sledi, da je maksimum dosežen pri $q_2 = 0$.

Povedano krajše: če prvi proizvajalec proizvede q_1, drugi proizvede $\big(\sqrt{q_1} - q_1\big)_+$. Zdaj privlečemo na dan koristnost prvega igralca:

$$u_1(q_1, q_2) = \frac{q_1}{q_1 + q_2} - q_1 \, .$$

in poiskati moramo maksimum izraza:

$$u_1\Big(q_1, \; \big(\sqrt{q_1} - q_1\big)_+\Big) = \big(\sqrt{q_1} - q_1\big)_+ \, .$$

Krajši račun pokaže, da ta nastopi pri $q_1 = 1/4$. Vgnezdeno Nashevo ravnovesje je torej naslednje:

- Prvi proizvajalec proizvede $1/4$.
- Če prvi proizvajalec proizvede q_1, drugi proizvede $\big(\sqrt{q_1} - q_1\big)_+$.

Enako dobro je biti prvi ali drugi proizvajalec.

4. Vsaki koaliciji, t. j. podmnožici množice teh štirih študentk, predpišemo vrednost, ki naj bo enaka negativni vrednosti skupnih dodatnih stroškov, ki jih ima, če se na tečaj vpiše optimalno. Če koalicija k študentk ne vsebuje Adeline, je njena vrednost enaka $-80k$ (eni ali dvema se bolj splača iti k prvemu ponudniku, za tri pa je vseeno, ali gredo vse k prvemu ali pa vse k drugemu). Oglejmo si še primer, ko koalicija vsebuje k študentk in še Adelino. Za $k = 0, 1, 2$ se najbolj splača, če gredo vse k prvemu ponudniku: vrednost koalicije je $-72 - 80k$. Za $k = 3$ pa se bolj splača, če gredo vse k drugemu ponudniku (in je Adelinin predujem izgubljen): vrednost koalicije je -300.

Izračunajmo najprej Adelinino Shapleyjevo vrednost. Za ta namen moramo za $k = 0, 1, 2, 3$ izračunati, za koliko Adelina zniža vrednost koalicije, če pristopi h koaliciji k študentk. Za $k = 0, 1, 2$ sprememba vrednosti znaša -72, medtem ko za $k = 3$ znaša -60. Shapleyjeva vrednost za Adelino je povprečje teh sprememb, ki je enako -69.

Zaradi simetrije so Shapleyjeve vrednosti vseh ostalih študentk enake. Ker mora biti vsota vseh Shapleyjevih enaka vrednosti polne koalicije, so Shapleyjeve vrednosti za Brigito, Cvetko in Dragico enake -77.

Sklep: Adelina mora plačati še 69 evrov, ostale kolegice pa 77 evrov. Če torej upoštevamo še Adelinin predujem, so stroški vseh študentk enaki, po 77 evrov na vsako.

2012/13

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 30. 11. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Iz preferenčne funkcije drugega igralca dobimo naslednje najboljše odgovore tega igralca:

- Če prvi igralec igra A, je $q = 1$.
- Če prvi igralec igra B, je $q = 0$.
- Če prvi igralec igra C, je $q = 2/3$.

Zdaj pa si pri teh najboljših odgovorih oglejmo oglejmo najboljše odgovore prvega igralca:

- Če je $q = 0$, sta najboljša odgovora B in C.
- Če je $q = 2/3$, je najboljši odgovor C.
- Če je $q = 1$, je najboljši odgovor C.

Nashevi ravnovesji sta torej $(B, 0)$ in $(C, 2/3)$.

2. Igralci so proizvajalci, akcije so zneski, ki jih vložijo v marketing. Ker je tržni delež d_i sorazmeren z x_i, mora biti: $d_i = x_i/s$, kjer je $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Koristnostna funkcija i-tega igralca je torej enaka:

$$u_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = a\,\frac{x_i}{s} - x_i = a\,\frac{x_i}{s_i + x_i} - x_i\,,$$

kjer je $s_i = s - x_i$. Poiskati je potrebno najboljši odgovor pri fiksnih akcijah x_j, $j \neq i$. Limita funkcije u_i, ko gre x_i z desne proti nič, je enaka nič, ko gre x_i proti neskončno, pa gre u_i proti minus neskončno. Najboljši odgovor bo torej dosežen kvečjemu v stacionarni točki. Za ta namen izračunajmo parcialni odvod:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = a\,\frac{s_i}{s^2} - 1 = a\,\frac{s_i}{(s_i + x_i)^2} - 1\,.$$

Ni sicer vnaprej jasno, da je parcialni odvod sploh pri kakšnem $x_i > 0$ enak nič. Toda iz drugega parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = -2a\,\frac{s_i}{(s_i + x_i)^3}$$

dobimo, da je funkcija u_i konkavna funkcija spremenljivke x_i. Od tod pa sledi, da najboljši odgovor obstaja, brž ko je pri nekem $x_i > 0$ prvi parcialni odvod enak nič.

Nasheva ravnovesja so torej natanko točke, kjer so vsi parcialni odvodi enaki nič. Po seštetju enačb dobimo $(n-1)a/s = n$, torej $s = (n-1)a/n$, torej:

$$x_i = \frac{(n-1)a}{n^2}\,.$$

Ker je to strogo pozitivno, je tam res doseženo edino čisto Nashevo ravnovesje.

3. To se lahko zgodi kvečjemu v naslednjih dveh primerih:

- $a = 3$, prvi igralec meša A in C, drugi igralec igra X;
- $a = 5$, prvi igralec meša B in C, drugi igralec igra Y.

V mešanem Nashevem ravnovesju smo, če je strategija drugega igralca dejansko najboljši odgovor. V prvem primeru velja:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-p & 4-4p & 3p \end{bmatrix}.$$

V mešanem Nashevem ravnovesju bomo, če bo $3 - p \geq 4 - 4p$ in $3 - p \geq 3p$. To se zgodi za $1/3 \leq p \leq 3/4$.

V drugem primeru pa velja:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-p & 2-2p & 1+2p \end{bmatrix}.$$

V mešanem Nashevem ravnovesju bomo, če bo $2 - 2p \geq 3 - p$ in $2 - 2p \geq 1 + 2p$. Toda prva neenakost ni izpolnjena za noben $0 \leq p \leq 1$, torej takih mešanih Nashevih ravnovesij ni.

Sklep: iskana mešana Nasheva ravnovesja so $\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X\right)$; $1/3 \leq p \leq 3/4$.

4. Najprej opazimo, da je akcijo A strogo dominira mešanica $\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, brž ko je $1/3 < p < 1/2$. Torej lahko akcijo A odstranimo. Po odstranitvi mešanica $\begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ dominira akcijo W, brž ko je $1/4 < q < 1/2$. Torej lahko odstranimo tudi akcijo W. Nadaljnjih dominacij ni.

Okleščena igra ima čisti Nashevi ravnovesji (B, Y) in (C, Z). Kombinacij tipa čisto–mešano ni. Preostanejo le še presečišča na zgornji ovojnici:

$$\max U_2\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 8-4p & ;\ 0 \leq p \leq 1/2 \\ 4+4p & ;\ 1/2 \leq p \leq 4/5 \\ 9p & ;\ 4/5 \leq p \leq 1 \end{cases}.$$

Presečišči sta torej pri $p = 1/2$, ko prvi igralec meša X in Y, in pri $p = 4/5$, ko prvi igralec meša X in Z. Toda v prvem primeru prvi igralec ne more biti indiferenten, ker ima pri akciji B v vsakem primeru večji dobitek kot pri C, v drugem primeru pa iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-2q \\ 2+2q \end{bmatrix}$$

dobimo, da je prvi igralec indiferenten pri $q = 1/4$. Mešana Nasheva ravnovesja so torej:

$$(B, Y),\ (C, Z) \quad \text{in} \quad \left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right).$$

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 21. 1. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Prirejena strateška igra:

$P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}, P_{1;\{\omega_3\}} \backslash P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$	L	D
AA	$5, 1; 2$	$6, 5; 3$
AB	$5, 2; 5$	$6, 3; 1$
BA	$4, 1; \frac{15}{4}$	$4, 5; 6$
BB	$4, 2; \frac{27}{4}$	$4, 3; 4$

Opazimo, da akcija A pri igralcu $P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}$ dominira akcijo B, tako da se naloga prevede na naslednjo igro:

$P_{1;\{\omega_3\}} \backslash P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$	L	D
A	$1, 2$	$5, 3$
B	$2, 5$	$3, 1$

Ta igra ima čisti Nashevi ravnovesji (B, L) in (A, D). Kombinacij čisto–mešano ni, za popolnoma mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & D \\ 1-q & q \end{pmatrix} \right)$$

pa iz principa indiferentnosti dobimo sistem enačb:

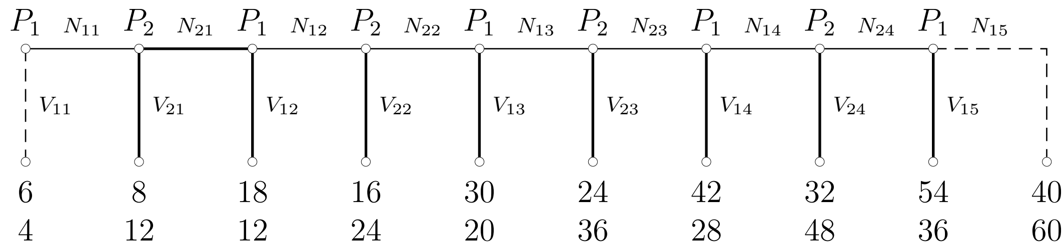
$$1 + 4q = 2 + q\,, \qquad 2 + 3p = 3 - 2p$$

z rešitvijo $p = 1/5$, $q = 1/3$. Mešana Bayesova ravnovesja so torej:

$$\begin{pmatrix} P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}: & P_{1;\{\omega_3\}}: & P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}: \\ A & B & L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}: & P_{1;\{\omega_3\}}: & P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}: \\ A & A & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}: & P_{1;\{\omega_3\}}: & P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}: \\ A & \begin{pmatrix} A & B \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L & D \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

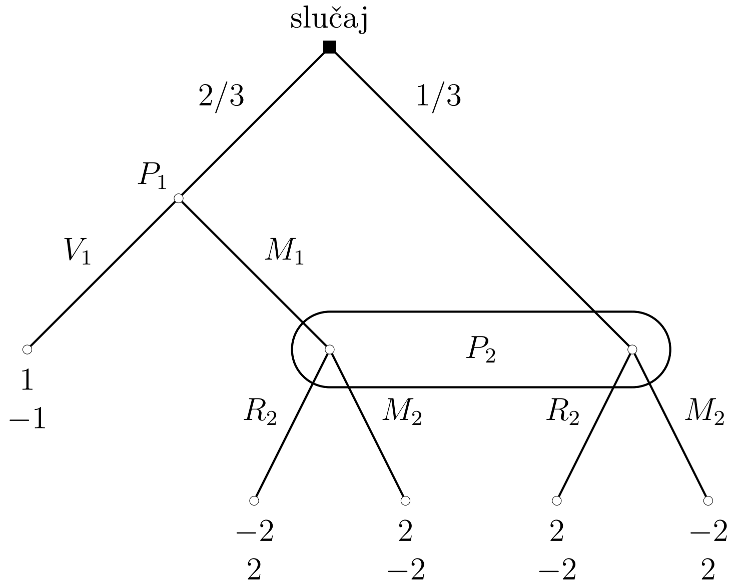
2. Drevo pripadajoče ekstenzivne igre:



Vgnezdeni Nashevi ravnovesji:

$$(N_{11}V_{12}V_{13}V_{14}V_{15},\, V_{21}V_{22}V_{23}V_{24}) \quad \text{in} \quad (N_{11}V_{12}V_{13}V_{14}V_{15},\, N_{21}V_{22}V_{23}V_{24})$$

3. To lahko modeliramo z naslednjo ekstenzivno igro z nepopolno informacijo:



ki ji pripada naslednja strateška igra:

$P_1 \backslash P_2$	R_2	M_2
V_1	$\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$	$0, 0$
M_1	$-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

Čistih Nashevih ravnovesij ni, prav tako tudi ne ravnovesij tipa čisto–mešano. Za popolnoma mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} V_1 & M_1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_2 & M_2 \\ 1-q & q \end{pmatrix} \right)$$

pa iz principa indiferentnosti dobimo sistem enačb:

$$4 - 6p = 2p\,, \qquad 4 - 4q = -2 + 4q$$

z rešitvijo $p = 1/2$, $q = 3/4$. Igra ima torej edino mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} V_1 & M_1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_2 & M_2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \right).$$

4. Dani igri pripada naslednja matrična igra:

	L	D
A	4	0
B	0	4
C	2	3

Zgornjo ovojnico pripadajoče koristnostne funkcije prvega igralca pri mešani strategiji $\begin{pmatrix} L & D \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ drugega igralca tvorijo naslednje akcije prvega igralca:

- A za $0 \le q < \frac{2}{5}$;
- A in C za $q = \frac{2}{5}$;
- C za $\frac{2}{5} < q < \frac{2}{3}$;
- C in B za $q = \frac{2}{3}$;
- B za $\frac{2}{3} < q \le 1$.

Minimum je dosežen pri $q = 2/5$, kjer prvi igralec meša A in C. Od tod že dobimo vrednost igre $v_0 = 12/5$. Ker je maksimalni skupni dobitek v prvotni igri enak $\sigma = 10$, od tod dobimo naslednjo delitev dobitka:

$$\left(\frac{10 + \frac{12}{5}}{2}, \frac{10 - \frac{12}{5}}{2} \right) = \left(\frac{31}{5}, \frac{19}{5} \right) = (6{\cdot}2, 3{\cdot}8)\,.$$

Za izračun točke nesporazuma je potrebno do konca izračunati Nashevo ravnovesje pripadajoče matrične igre (grozilni profil). Iz principa indiferentnosti za koristnostno funkcijo drugega igralca pri mešani strategiji $\begin{pmatrix} A & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ prvega igralca dobimo enačbo $4 - 2p = 3p$, ki ima rešitev $p = 4/5$. Grozilni profil je torej:

$$\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & D \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \right).$$

To pomeni, da v primeru nesporazuma prvi igralec dobi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{132}{25} = 5{\cdot}28\,,$$

drugi igralec pa:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{72}{25} = 2{\cdot}88\,.$$

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 11. 2. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Prispevki družbenikov so lahko kar njihove akcije, koristnostne funkcije pa so naslednje:

$$
\begin{aligned}
U_{\text{Aljaž}}(a,b,c) &= -2a + \frac{a}{a+b+c}\, f(a+b+c)\,, \\
U_{\text{Bogdan}}(a,b,c) &= -3b + \frac{b}{a+b+c}\, f(a+b+c)\,, \\
U_{\text{Ciril}}(a,b,c) &= -4c + \frac{c}{a+b+c}\, f(a+b+c)\,,
\end{aligned}
$$

kjer je:

$$
f(x) = \begin{cases} 6000 & ;\ x \geq M \\ 0 & ;\ x < M \end{cases} \;;
$$

dodati moramo še:

$$
U_{\text{Aljaž}}(0,0,0) = U_{\text{Bogdan}}(0,0,0) = U_{\text{Ciril}}(0,0,0) = 0\,.
$$

Koristnostne funkcije imajo naslednjo lastnost: če vzamemo poljuben profil, je koristnostna funkcija vsakega družbenika na dovolj majhni desni okolici strogo padajoča v spremenljivki, ki pripada družbeniku. Zato je lahko Nashevo ravnovesje le v točki, kjer je $a + b + c = M$ ali pa so vsi trije prispevki enaki nič. Če torej želimo, da imata dva družbenika strogo pozitiven prispevek, mora biti $a + b + c = M$.

Privzemimo, da je $M > 0$ (če bomo našli ustrezni M s to lastnostjo, ne bo potrebno več iskati naprej). Profil (a, b, c), kjer je $a+b+c = M$, je strogo Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja:

$$
\begin{array}{lllll}
\dfrac{6000\,a}{a+b+c} - 2a \geq 0\,, & \text{oziroma} & M \leq 3000\,, & \text{če je} & a > 0\,, \\
\dfrac{6000\,b}{a+b+c} - 3b \geq 0\,, & \text{oziroma} & M \leq 2000\,, & \text{če je} & b > 0\,, \\
\dfrac{6000\,c}{a+b+c} - 4c \geq 0\,, & \text{oziroma} & M \leq 1500\,, & \text{če je} & c > 0\,.
\end{array}
$$

Od tod se vidi, da Nasheva ravnovesja, kjer imata natanko dva strogo pozitiven prispevek, obstajajo natanko tedaj, ko je $M \leq 2000$. Za $M = 2000$ morata biti tista s strogo pozitivnim prispevkom Aljaž in Bogdan: iskana Nasheva ravnovesja so vsi profili oblike $(a, 2000 - a, 0)$, kjer je $0 < a < 2000$.

2. Prirejena strateška igra:

	L_2L_{13}	L_2D_{13}	D_2L_{13}	D_2D_{13}
A_1A_{23}	$4,4;5,5$	$4,4;5,3$	$4,4;4,5$	$4,4;4,3$
A_1B_{23}	$4,5;2,4$	$4,6;2,5$	$4,5;3,4$	$4,6;3,5$
A_1C_{23}	$4,4;3,6$	$4,5;3,3$	$4,2;2,6$	$4,3;2,3$
B_1A_{23}	$0,4;5,4$	$3,4;5,2$	$0,4;4,4$	$3,4;4,2$
B_1B_{23}	$0,5;2,3$	$3,6;2,4$	$0,5;3,3$	$3,6;3,4$
B_1C_{23}	$0,4;3,5$	$3,5;3,2$	$0,2;2,5$	$3,3;2,2$
C_1A_{23}	$5,4;5,4$	$1,4;5,3$	$5,4;4,4$	$1,4;4,3$
C_1B_{23}	$5,5;2,3$	$1,6;2,5$	$5,5;3,3$	$1,6;3,5$
C_1C_{23}	$5,4;3,5$	$1,5;3,3$	$5,2;2,5$	$1,3;2,3$

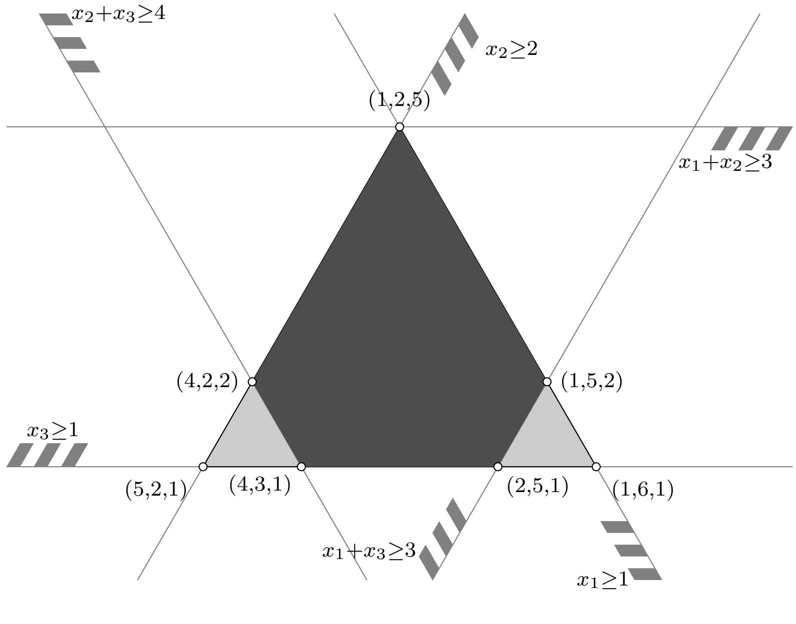
Najprej opazimo, da akcija B_{23} strogo dominira akciji A_{23} in C_{23}. Ko le-ti izločimo, akcija D_2 dominira akcijo L_2, akcija D_{13} pa dominira akcijo L_{13}. Edino mešano Bayesovo ravnovesje je torej čisto, in sicer (A_1B_{23}, D_2D_{13}).

3. Dana ekstenzivna igra še eno netrivialno podigro, in sicer tisto, kjer ima drugi igralec na voljo akcije D, E in F. V tej podigri Nashevo ravnovesje tvorita akciji D in F. Po odstranitvi akcije E se dana ekstenzivna igra prevede na naslednjo strateško igro:

$P_1 \backslash P_2$	DG	DH	FG	FH
A	$5,3$	$5,3$	$1,3$	$1,3$
B	$5,2$	$2,4$	$5,2$	$2,4$
C	$3,4$	$4,2$	$3,4$	$4,2$

Čisti Nashevi ravnovesji sta (A, DG) in (A, DH).

4. Funkcija v je superaditivna za $3 \leq a \leq 7$. Za $a = 3$ so imputacije in jedro prikazani na naslednji skici:



Rešitve izpita iz teorije iger z dne 16. 5. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Naj bosta akciji obeh igralcev kar r_1 in r_2. Tedaj je tržna cena blaga kar $r_1 + r_2$. Od tod dobimo koristnostni funkciji:

$$u_1(r_1, r_2) = (120 - r_1)\left[r_1 + r_2 - \left(60 - \frac{r_1}{4}\right)\right] = (120 - r_1)\left(\frac{5r_1}{4} + r_2 - 60\right),$$

$$u_2(r_1, r_2) = (120 - r_2)\left[r_1 + r_2 - \left(72 - \frac{2r_2}{5}\right)\right] = (120 - r_2)\left(r_1 + \frac{7r_2}{5} - 72\right).$$

Opazimo, da je u_1 konkavna funkcija spremenljivke r_1 in prav tako tudi r_2 konkavna funkcija spremenljivke r_2. To pomeni, da je v stacionarni točki globalni maksimum. Z drugimi besedami, če je točka, kjer je $\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \frac{\partial u_2}{\partial r_2} = 0$, profil (torej če sta r_1 in r_2 v intervalu $[0, 120]$), je tam tudi Nashevo ravnovesje. Iz odvodov:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = 210 - \frac{5r_1}{2} - r_2\,, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial r_2} = 240 - r_1 - \frac{14r_2}{5}$$

dobimo stacionarno točko $r_1 = 58$, $r_2 = 65$, ki je po zgoraj povedanem tudi Nashevo ravnovesje. To odgovarja vrednostma $q_1 = 62$ in $q_2 = 55$.

2. Opazimo, da pri prvem igralcu, ki ve, da je v prvem stanju, akcija T strogo dominira akcijo B. Podobno pri drugem igralcu, ki je v drugem stanju, akcija L strogo dominira akcijo R. Tako lahko med akcijama izbirata le še prvi igralec, ki je v stanju ω_2 ali ω_3, in drugi igralec, ki je v stanju ω_1 ali ω_3. Za ta dva igralca dobimo naslednjo prirejeno strateško igro:

	L_{13}	R_{13}
T_{23}	$\frac{7}{4}, 2$	$2, 7$
B_{23}	$2, 4$	$\frac{9}{4}, 3$

Vidimo, da akcija B_{23} strogo dominira akcijo T_{23} (medtem ko v imamo v stanju ω_2 izvirne igre le navadno dominacijo). Ko akcijo T_{23} izločimo, vidimo, da se drugemu igralcu bolj splača igrati L_{13}. Edino mešano Bayesovo ravnovesje igre je torej $(T_1, B_{23}; L_2, L_{13})$.

3. Igra ima dve netrivialni podigri, ki sta določeni z vozliščem, kjer ima drugi igralec možni potezi C in D, in vozliščem, kjer ima drugi igralec možni potezi E in F. V prvi podigri igra le še drugi igralec in ima očitno edino čisto Nashevo ravnovesje $(\_, D)$. Druga podigra pa se prevede na strateško igro:

	E	F
G	$2, 2$	$3, 1$
H	$1, 3$	$4, 4$

ki ima čisti Nashevi ravnovesji (E, G) in (H, F). Iz kombinacij čistih Nashevih ravnovesij za obe podigri in primerjanj koristnostnih funkcij prvega igralca za akciji A in B končno dobimo čisti vgnezdeni Nashevi ravnovesji (AG, DE) in (BH, DF).

4. Najprej izračunamo:

$$v(\{1\}) = \min_{0 \le p \le 1} \max\{1 + 4p, 4 - 4p, 3 - p\} = \frac{13}{5},$$
$$v(\{2\}) = \max_{0 \le p \le 1} \min\{2 + p, 1 + 5p, 4 - 4p\} = \frac{12}{5}.$$

Očitno je tudi $v(\{1, 2\}) = 8$. Shapleyjevi vrednosti: $\phi_1 = \frac{41}{10}$, $\phi_2 = \frac{39}{10}$.

2011/12

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 29. 11. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Ker mora vsak kupec ponuditi vsaj 1 evro, mora kupec, ki z gotovostjo dobi predmet dražbe, zanj plačati vsaj 2 evra. Torej to v Nashevem ravnovesju ne more biti Andraž, saj bi imel v tem primeru izgubo. Bolje bi naredil, če bi ponudil le 1 evro, saj tedaj bodisi z gotovostjo ne bi dobil predmeta bodisi bi ga dobil z verjetnostjo 1/5 (to bi bilo tedaj, ko bi vsi ponudili po 1 evro). V obeh primerih bi bil na ničli, kar bi bilo zanj boljše.

Nadalje opazimo, da morajo v Nashevem ravnovesju, kjer posamezen kupec z gotovostjo dobi predmet dražbe, ostali ponuditi strogo manj, kot ga on ceni. Sicer bi imel namreč zmagovalec dražbe izgubo, saj bi moral za predmet dražbe plačati vsaj 1 evro več, kot ceni predmet dražbe. Spet bi se mu bolj splačalo ponudbo znižati npr. na 1 evro.

V Nashevem ravnovesju, kjer bi Brigita zagotovo dobila predmet dražbe, bi smeli torej vsi ostali kupci ponuditi le 1 evro. Brigita bi bila tedaj na ničli. Toda če bi spustila ponudbo na 1 evro, bi imela pričakovani dobiček 1/5, kar je bolje. Torej tudi za Brigito ni Nashevega ravnovesja, kjer bi z gotovostjo dobila predmet dražbe.

Prav tako niti za Andraža niti za Brigito ni Nashevega ravnovesja, kjer bi imela strogo pozitiven pričakovani dobiček. Za Andraža ga ni, ker mora, brž ko dobi predmet dražbe, plačati vsaj 1 evro. Toda tudi Brigita bi smela, če bi hotela imeti strogo pozitiven pričakovani dobiček, za predmet dražbe plačati največ 1 evro. To je možno le, če vsi ponudijo le po 1 evro. Toda to ni Nashevo ravnovesje, saj se že Cvetu bolj splača ponuditi 2 evra.

Za vse ostale kupce pa obstaja Nashevo ravnovesje, kjer zagotovo dobijo predmet dražbe in imajo strogo pozitiven pričakovani dobiček. Oglejmo si namreč profil, ko zmagovalec ponudi vsaj 5 evrov, ostali pa ponudijo po 1 evro. Tedaj je dobiček zmagovalca vsaj 1 in tako ostane, če le ponudi več kot 1 evro. Če pa spusti ponudbo na 1 evro, se njegov pričakovani dobiček zniža na 1/5, kar je slabše. Nadalje, če naj se za katerega drugega kupca kaj spremeni, mora ponuditi vsaj 5 evrov, v tem primeru pa je pričakovano bodisi na ničli bodisi na izgubi. Torej je tak profil res Nashevo ravnovesje in zmagovalec ima zagotovljen strogo pozitiven dobiček.

Trdimo, da so ti profili za Cveta tudi edini, v katerih on zagotovo dobi predmet dražbe. Cveto v tem primeru namreč mora ponuditi najmanj 5 evrov, sicer se Edu splača dvigniti ponudbo na 4 evre in njegov pričakovani dobiček bo strogo pozitiven, ne glede na to, ali bo dobil predmet z gotovostjo ali ne. Za ostale kupce pa smo že dognali, da ponuditi manj kot 3 evre. A če bi kdo ponudil 2 evra, bi moral Cveto plačati 3 evre in bi bil na ničli. Bolj bi se mu splačalo spustiti ponudbo na 2 evra, saj bi imel v tem primeru strogo pozitiven pričakovani dobiček.

Sklepi:

a) Kupci, za katere obstaja Nashevo ravnovesje, v katerem zagotovo dobijo predmet dražbe, so Cveto, Darja in Edo.
b) Cveto, Darja in Edo so tudi kupci, za katere obstaja Nashevo ravnovesje, pri katerem imajo strogo pozitiven pričakovan dobiček.
c) Nasheva ravnovesja, pri katerih Cveto zagotovo dobi predmet dražbe, so tista, pri katerih Cveto ponudi vsaj 5 evrov, ostali pa le po 1 evro.

2. Ker akcija A strogo dominira akcijo C, lahko slednjo izločimo.
Iz tabele zlahka odčitamo čisti Nashevi ravnovesji (A, X) in (B, Z).
Poleg tega je možno, da prvi igralec meša A in B, drugi pa ubere čisto strategijo Y ali Z. Za ta namen moramo izračunati:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6-6p & 5-3p & 1+3p \end{bmatrix}.$$

Maksimum je dosežen (zgornja ovojnica):

- za $0 \le p < \frac{1}{3}$: pri X;
- za $p = \frac{1}{3}$: pri X in Y;
- za $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$: pri Y;
- za $p = \frac{2}{3}$: pri Y in Z;
- za $\frac{2}{3} < p \le 1$: pri Z.

Od tod dobimo skupino mešanih Nashevih ravnovesij:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Y\right); \ \frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3}, \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Z\right); \ \frac{2}{3} \le p \le 1.$$

Nasheva ravnovesja, kjer oba mešata, pa so lahko dosežena le pri $p = 1/3$, ko drugi igralec meša X in Y, in pri $p = 2/3$, ko meša Y in Z. Za prvi primer iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4-2q \\ 2q \end{bmatrix}$$

dobimo indiferentnost pri $q = 1$. Za drugi primer pa iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} Y & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+q \\ 2+q \end{bmatrix}$$

dobimo indiferentnost pri vseh q. Mešana Nasheva ravnovesja so torej:

$$(A, X), \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Y\right); \ \frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3},$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Z\right); \ \frac{2}{3} \le p \le 1, \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right); \ 0 \le q \le 1.$$

3. Profil (A, X) je Nashevo ravnovesje za $a \geq 2$.
Profil (B, X) je Nashevo ravnovesje za $a \leq 0$.
Profil $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X\right)$ je mešano Nashevo ravnovesje, če je $a = 2$ in $0 \leq p \leq 1/3$.
Profil $\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$ je mešano Nashevo ravnovesje, če je $a = 0$ in $0 \leq q \leq 2/3$.
Profil $\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{1}{3-a} & \frac{2-a}{3-a} \end{pmatrix}\right)$ je mešano Nashevo ravnovesje, če je $0 \leq a \leq 2$.
Drugih mešanih Nashevih ravnovesij ni.

4. Če z A označimo matriko igre, se splača vrednost igre iskati kot:

$$\max_{0 \leq p \leq 1} \min \begin{bmatrix} 1-p & p \end{bmatrix} A = \max_{0 \leq p \leq 1} \left\{ 6-p, 4+2p, 1+8p, 8-4p, 3+5p \right\},$$

torej kot maksimum spodnje ovojnice stolpcev, ki jih označimo z $S_1, \ldots S_5$. Spodnjo ovojnico tvorijo:

- S_3 za $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$;
- S_2 za $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{2}{3}$;
- S_1 za $q = \frac{2}{3}$;
- S_4 za $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$.

Stolpec S_5 pa je strogo dominiran recimo z $\begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
No, tudi stolpec S_1 je kar enak $\begin{pmatrix} S_2 & S_4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
Vrednost igre je dosežena pri $p = 2/3$ in je enaka $16/3$.

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 26. 1. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. a) Igra ima 6 stanj glede na to, katero nagrado dobi posamezen igralec – recimo AB, AC, BA, BC, CA in CB. Prvi igralec lahko dobi signale $A*$, $B*$ in $C*$, drugi igralec pa $*A$, $*B$ in $*C$, pač glede na to, katero nagrado je posamezen igralec dobil. Če prvi igralec prejme signal $A*$, je aposteriorna (pogojna) porazdelitev stanj enaka $\begin{pmatrix} AB & AC \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ in podobno tudi za ostala dva signala in za drugega igralca.

Vsak igralec ima dve možni akciji: *menjati* (M) ali *ne menjati* (N). Do menjave pride, če sta obe akciji enaki M. Od tod dobimo naslednje tabele koristnostnih funkcij po stanjih:

AB

	N	M
N	$1, 1$	$1, 1$
M	$1, 1$	$3, 4$

AC

	N	M
N	$1, 2$	$1, 2$
M	$1, 2$	$4, 4$

BA

	N	M
N	$3, 4$	$3, 4$
M	$3, 4$	$1, 1$

BC

	N	M
N	$3, 2$	$3, 2$
M	$3, 2$	$4, 1$

CA

	N	M
N	$4, 4$	$4, 4$
M	$4, 4$	$1, 2$

CB

	N	M
N	$4, 1$	$4, 1$
M	$4, 1$	$3, 2$

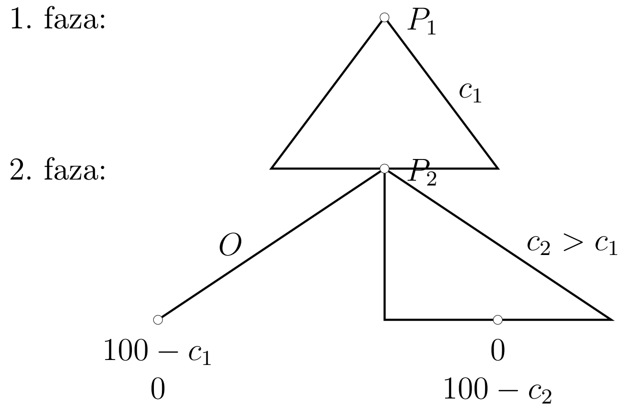
b) V Bayesovem ravnovesju prav gotovo ne pride do menjave nagrad, ki imata za igralca najvišjo možno vrednost, t. j. prvi igralec ne bo zamenjal nagrade C, drugi igralec pa ne nagrade B. Oglejmo si zdaj profil, pri katerem je vsak igralec pripravljen zamenjati vsako nagrado razen najvišje, t. j. profil:

$$(M_{A*} M_{B*} N_{C*}, N_{*A} M_{*B} M_{*C}) \, .$$

Koristnostne funkcije igralcev z ustreznimi signali v prirejeni strateški igri s popolno informacijo so za ta profil enake $(3\dot{}5, 3\dot{}5, 4; 4, 2\dot{}5, 2\dot{}5)$, kar je večje ali enako $(1, 3, 3\dot{}5; 2\dot{}5, 1, 2)$ – koristnostnim funkcijam posameznih igralcev s signali za primer, ko zamenjajo akcijo. Zato je profil $(M_{A*} M_{B*} N_{C*}, N_{A*} M_{B*} M_{C*})$ Bayesovo ravnovesje, v njem pa lahko pride do vseh menjav, ki jih nismo izključili, t. j. $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$ in $B \leftrightarrow C$.

c) Profil, pri katerem nobeden ni nikoli pripravljen menjati, je Bayesovo ravnovesje, ker se, če je določen igralec pri določenem signalu (t. j. določeno nagrado) pripravljen menjati, njegova koristnostna funkcija ne spremeni. Ta profil je torej čisto Bayesovo ravnovesje, pri katerem nikoli ne pride do menjave.

2. Označimo s c_1 ponudbo prvega, s c_2 pa morebitno ponudbo drugega igralca. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



Oglejmo si najprej drugo fazo. Če prvi igralec ponudi 100 ali več, mora drugi igralec odstopiti, če ponudi 98 ali manj, mora ponuditi $c_1 + 1$. Če pa prvi igralec ponudi 99, je drugemu igralcu vseeno, ali ponudi 100 ali pa odstopi. V prvem primeru bomo rekli, da ubere *provokativno*, v drugem pa, da ubere *konservativno* strategijo. V ta dva pojma zajamemo tudi prej omenjene nedvoumne reakcije drugega igralca.

Oglejmo si zdaj prvo fazo. Če drugi igralec ubere konservativno strategijo, bo prvi igralec dobil $100 - c_1$, če je $c_1 \geq 99$, sicer pa 0. To doseže maksimum pri $c_1 = 99$. Če pa drugi igralec ubere provokativno strategijo, bo prvi igralec dobil $100 - c_1$, če je $c_1 \geq 100$, sicer pa 0. To pa je lahko enako največ 0, in sicer pri $c_1 = 1, 2, \ldots 100$. Vgnezdena Nasheva ravnovesja so torej:

$$(99, \text{ konservativna strategija}) \quad \text{in} \quad (c_1, \text{ provokativna strategija})\,;\ c_1 = 1, 2, \ldots 100\,.$$

3. Če se igralca sporazumeta, si razdelita maksimalni skupni dobitek $\sigma = 9$. Delitev temelji na vrednosti matrike:

$$A - B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kombinacija vrstic, ki jo predstavlja vektor $(1-p, p, 0)$, kjer je $2/5 < p < 1/2$, strogo dominira tretjo vrstico. Ko jo odstranimo, kombinacija stolpcev, ki jo predstavlja vektor $(1 - q, 0, q)$, kjer je $1/2 < q < 2/3$, strogo dominira drugi stolpec. Torej je:

$$\begin{aligned} D = v(A - B) &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min \begin{bmatrix} 1 - p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{-5 + 10p,\ 3 - 2p\} = \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \begin{cases} -5 + 10p & ;\ 0 \leq p \leq 2/3 \\ 3 - 2p & ;\ 2/3 \leq p \leq 1 \end{cases} = \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

in maksimum je dosežen pri $p = 2/3$. Velja tudi:

$$\begin{aligned}
D &= \min_{0\le q\le 1} \max \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix} = \\
&= \max_{0\le q\le 1} \min\{-5+8q,\ 5-4q\} = \\
&= \max_{0\le q\le 1} \begin{cases} -5+8q & ;\ 0 \le q \le 5/6 \\ 5-4q & ;\ 5/6 \le q \le 1 \end{cases} = \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

in minimum je dosežen pri $q = 5/6$. Rešitev igre:

$$\left(\frac{\sigma + D}{2}, \frac{\sigma - D}{2}\right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

Zaradi stroge dominacije je $\big((1/3, 2/3, 0), (1/6, 0, 5/6)\big)$ edino Nashevo ravnovesje matrične igre z matriko $A - B$, torej obstaja tudi ena sama točka nesporazuma:

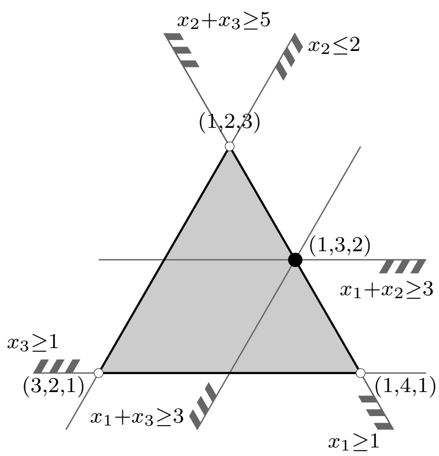
$$D_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \frac{25}{6}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}.$$

4. a) Iz $v(\{2,3\}) \ge v(\{2\}) + v(\{3\})$ sledi $t \ge 3$, iz $v(\{1,2,3\}) \ge v(\{1\}) + v(\{2,3\})$ pa sledi $t \le 5$. Ostale relacije superaditivnosti vedno veljajo, torej je v superaditivna za $t \in [3,5]$.

Če z (x_1, x_2, x_3) označimo delitev dobitka velike koalicije, je jedro določeno z naslednjo enačbo in neenačbami:

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 = 6\,, \\
x_1 \ge 1\,, \quad x_2 \ge 2\,, \quad x_3 \ge 1\,, \\
x_1 + x_2 \ge 4\,, \quad x_1 + x_3 \ge 3\,, \quad x_2 + x_3 \ge 5\,.
\end{gathered}$$

Rešitev je ena sama točka $(1,3,2)$. Slika:



Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	1	2	3
$1, 2, 3$	1	3	2
$1, 3, 2$	1	3	2
$2, 1, 3$	2	2	2
$2, 3, 1$	1	2	3
$3, 1, 2$	2	3	1
$3, 2, 1$	1	4	1
Povprečje	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{11}{6}$

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_1 = 4/3$, $\phi_2 = 17/6$ in $\phi_3 = 11/6$.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 10. 2. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Akcije opišemo z urejenimi pari (i, s), kjer je i število iztegnjenih prstov (t. j. 1 ali 2), s pa je napoved skupnega števila iztegnjenih prstov. Smiselne akcije so $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ in $(2, 4)$. Koristnostni funkciji sta podani v naslednji tabeli:

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(2,4)$
$(1,2)$	$0,0$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
$(1,3)$	$0,1$	$0,0$	$0,0$	$1,0$
$(2,3)$	$1,0$	$0,0$	$0,0$	$0,1$
$(2,4)$	$0,0$	$0,1$	$1,0$	$0,0$

.

Mešano Nashevo ravnovesje npr. nastopi, če oba igralca mešata vse akcije z enakimi verjetnostmi. Bolj formalno, je oblike (π, π), kjer je:

$$\pi = \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

saj tedaj velja:

$$U_1\big((1,2),\pi\big) = U_1\big((1,3),\pi\big) = U_1\big((2,3),\pi\big) = U_1\big((2,4),\pi\big) = \frac{1}{4} \quad \text{in}$$
$$U_2\big(\pi,(1,2)\big) = U_2\big(\pi,(1,3)\big) = U_2\big(\pi,(2,3)\big) = U_2\big(\pi,(2,4)\big) = \frac{1}{4}.$$

Še eno mešano Nashevo ravnovesje je tudi:

$$\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (1,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right),$$

saj tedaj velja:

$$\begin{aligned}
U_1\left((1,2), \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) &= U_1\left((1,4), \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \geq \\
\geq U_1\left((1,3), \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) &= U_1\left((2,4), \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{in} \\
U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (1,3) \right) &= U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (2,3) \right) = \frac{1}{2} \geq \\
\geq U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (1,2) \right) &= U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (2,4) \right) = 0.
\end{aligned}$$

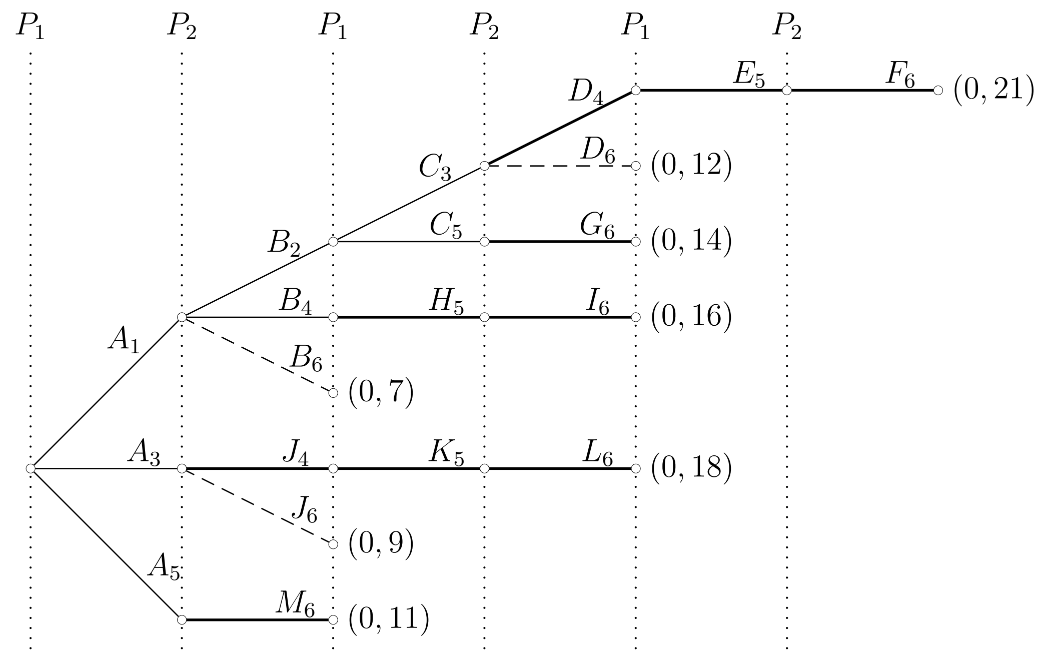
Opomba. Če bi akcijam, s katerimi smo delali, dodali še kakšno drugo akcijo (npr. $(1, 4)$), bi bila ta strogo dominirana s kombinacijo iz Nashevega ravnovesja, ki smo ga našli.

2. Prirejena igra s popolno informacijo ima štiri igralce: prvega s signalom iz stanja ω_1, prvega s signalom iz stanj ω_2, ω_3, drugega s signalom iz stanj ω_1, ω_2 in drugega s signalom iz stanja ω_3. Opazimo, da pri slednjem akcija L dominira akcijo D, zato lahko slednjo eliminiramo iz vseh nadaljnjih postopkov. Za preostale tri igralce dobimo naslednjo igro s popolno informacijo:

	L_{12}	D_{12}
A_1A_{23}	$3,1;4$	$4,3;2$
A_1B_{23}	$3,2;5$	$4,4;3$
B_1A_{23}	$1,1;0$	$5,3;3$
B_1B_{23}	$1,2;1$	$5,4;4$

Iz tabele je razvidno, da akcija B_{23} strogo dominira akcijo A_{23} (čeprav je v izvirni Bayesovi igri v stanju ω_2 ravno obratno – akcija A strogo dominira akcijo B). Tako dobimo igro za dva igralca, od katerih ima vsak po dve akciji. Mešana Bayesova ravnovesja: $(A_1B_{23}, L_{12}L_3)$, $(B_1B_{23}, D_{12}L_3)$, $\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} B_{23}, \begin{pmatrix} L_{12} & D_{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} L_3\right)$.

3. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



Indeks ob črki pomeni vrednost karte, ki jo položi igralec, ki je na potezi. Debelejše črte pomenijo akcije, ki jih igralec zagotovo izbere, črtkane črte pa akcije, ki jih zagotovo ne izbere. Tako bodo akcije D_4, E_5, F_6, G_6, H_5, I_6, J_4, K_5, L_6 in M_6 zagotovo v vsakem vgnezdenem Nashevem ravnovesju. Prvemu igralcu je vedno vseeno, kaj narediti, ne glede na to, kaj dela drugi igralec. Toda izbira akcije C_3 ali

C_5 odloča o akciji drugega igralca v drugi fazi igre. Vgnezdena Nasheva ravnovesja so torej oblike:

$$(A\,C_3E_5H_5K_5,\ B_2D_4F_6G_6I_6L_6J_4M_6) \quad \text{in} \quad (A\,C_5E_5H_5K_5,\ B_4D_4F_6G_6I_6L_6J_4M_6)\,,$$

kjer je A pri obeh lahko A_1, A_3 ali A_5. Skupaj jih je 6.

4. Shapleyjeva vrednost posameznega člana komisije je tukaj kar verjetnost, da ta član odločilno prispeva k sprejetju odločitve, če glasujejo v na slepo izbranem vrstnem redu. Predsednik odločilno prispeva, če je na tretjem ali četrtem mestu, torej ima Shapleyjevo vrednost 1/3. Vsak drug član komisije pa odločilno prispeva, če je bodisi na tretjem mestu in predsednik pred njim bodisi na četrtem mestu in predsednik za njim. Njegova Shapleyjeva vrednost je 2/15.

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 6. 7. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Preferenčna funkcija prvega proizvajalca:

$$u_1(q_1,q_2) = \frac{36q_1}{q_1+q_2+1} - 4q_1$$

kot funkcija spremenljivke q_1 na intervalu $[0,\infty)$ doseže maksimum bodisi pri $q_1 = 0$ bodisi v stacionarni točki, ki je ničla parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = \frac{36(q_2+1)}{(q_1+q_2+1)^2} - 4$$

(velja $\lim_{q_1\to\infty} u_1(q_1,q_2) = -\infty$). Podobno tudi preferenčna funkcija drugega proizvajalca, ki je za $q_2 > 0$ enaka:

$$u_2(q_1,q_2) = \frac{36q_2}{q_1+q_2+1} - 3q_2 - c\,,$$

kot funkcija spremenljivke q_2 na intervalu $[0,\infty)$ doseže maksimum bodisi pri $q_2 = 0$ bodisi v stacionarni točki, ki je ničla parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = \frac{36(q_1+1)}{(q_1+q_2+1)^2} - 3$$

(tudi tukaj velja $\lim_{q_2\to\infty} u_2(q_1,q_2) = -\infty$, pomembno pa je tudi, da ima u_2 v izhodišču skok navzdol). Od tod dobimo štiri možnosti za kandidate za čista Nasheva ravnovesja.

Prva možnost je $q_1 = q_2 = 0$. Če je $q_2 = 0$ je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ pri $q_1 = 2$ (ničle izven intervala $[0,\infty)$ ne upoštevamo). Velja $u_1(0,0) = 0$ in $u_1(2,0) = 16$, torej profil $q_1 = q_2 = 0$ ni čisto Nashevo ravnovesje.

Druga možnost je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0, q_2 = 0$ ali ekvivalentno $q_1 = 2, q_2 = 0$. V tem primeru u_1 doseže maksimalno vrednost. Oglejmo si še u_2. Velja $u_2(2,0) = 0$; nadalje, če je $q_1 = 2$, je $\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0$ pri $q_2 = 3$ in velja $u_1(2,3) = 9 - c$. Profil $q_1 = 2, q_2 = 0$ je torej čisto Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko je $c \geq 9$.

Tretja možnost je $q_1 = 0, \frac{\partial u_2}{\partial u_2} = 0$ ali ekvivalentno $q_1 = 0, q_2 = \sqrt{12} - 1$. Toda ker je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1}\big(0, \sqrt{12}-1\big) = 3\sqrt{12} - 4 > 0$, to ne more biti čisto Nashevo ravnovesje.

Preostane še zadnja možnost, ko je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ in $\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0$. V tem primeru iz obeh parcialnih odvodov dobimo:

$$(q_1+q_2+1)^2 = 9(q_2+1) = 12(q_1+1)\,,$$

torej $q_2 = (4q_1+1)/3$. Ko to spet vstavimo v zgornji sistem, dobimo $q_1 = 2, q_2 = 3$. Iz primerjave vrednosti $u_1(2,3) = 4$ in $u_1(0,3) = 0$ ter $u_2(2,3) = 9-c$ in $u_2(2,0) = 0$

dobimo, da je profil $q_1 = 2, q_2 = 3$ čisto Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko je $c \le 9$.

Še drugače povedano, za $c < 9$ ima igra edino čisto Nashevo ravnovesje $q_1 = 2, q_2 = 3$, za $c > 9$ edino čisto Nashevo ravnovesje $q_1 = 2, q_2 = 0$, pri $c = 9$ pa ima dve čisti Nashevi ravnovesji, in sicer prej omenjena profila.

2. Označimo z $\sim$ enakost vrednosti iger. Za $a \ge 5$ iz dominacij dobimo:

$$\begin{bmatrix} 5 & a & b \\ a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

za $a \le 5$ pa iz dominacij dobimo:

$$\begin{bmatrix} 5 & a & b \\ a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

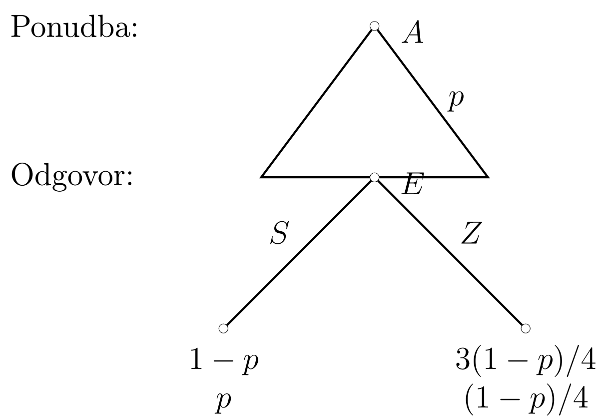
3. Najprej opazimo, da pri drugem igralcu, ki dobi signal stanja ω_2, akcija D dominira akcijo L, če dobi signal stanja ω_3, pa akcija L dominira akcijo D. Za drugega igralca s tema dvema signaloma je torej strategija jasna, za drugega igralca s signalom stanja ω_1 in prvega igralca pa dobimo strateško igro z naslednjima funkcijama koristnosti:

	L_1	D_1
A_{123}	$3, 8$	$4, 1$
B_{123}	$3{\cdot}5, 0$	$2{\cdot}5, 3$

Iz tabele razberemo, da ta igra nima čistih Nashevih ravnovesij, prav tako tudi ne ravnovesij tipa čisto–mešano. Iz principa indiferentnosti razberemo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_1 & D_1 \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$, kjer je $0 < p, q < 1$, mešano Bayesovo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $8 - 8p = 1 + 2p$ in $3 + q = 3{\cdot}5 - q$, torej $p = 0{\cdot}7$ in $q = 0{\cdot}25$. Sklep: edino mešano Bayesovo ravnovesje naše igre je:

$$\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & D_1 \\ 0{\cdot}75 & 0{\cdot}25 \end{pmatrix}, D_2 L_2\right).$$

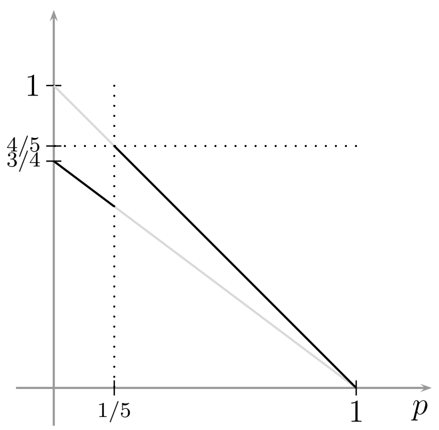
4. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



Oglejmo si najprej, kaj se splača storiti Egonu. Če je $p < 1/5$, se mu bolj splača zavrniti, če je $p > 1/5$, se mu bolj splača sprejeti, pri $p = 1/5$ pa se mu oboje enako splača.

Preden se lotimo vprašanja, kaj se najbolj splača storiti Albertu, moramo pokombinirati Egonove strategije v vseh možnih situacijah, v katerih se znajde. Možni sta le dve kombinaciji. Rekli bomo, da Egon ubere *ustrežljivo* strategijo, če zavrne pri $p < 1/5$ in sprejme pri $p \geq 1/5$. Nadalje bomo rekli, da ubere *zlobno* strategijo, če zavrne pri $p \leq 1/5$ in sprejme pri $p > 1/5$.

Albertov dobitek v odvisnosti od njegove ponudbe p ima naslednji graf:



pri čemer je vrednost pri $p = 1/5$ na zgornji črti, če Egon ubere ustrežljivo strategijo, in spodaj, če ubere zlobno strategijo. Če Egon ubere ustrežljivo strategijo, je maksimum v tej točki tudi dosežen, če ubere zlobno strategijo, pa maksimum ni dosežen. Edino vgnezdeno Nashevo ravnovesje je torej ($p = 1/5$, ustrežljiva strategija).

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 30. 8. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Pripadajoča strateška igra ima 5000 igralcev – uslužbencev, od katerih lahko vsak igra dve akciji (strategiji): vlak ali avto. Preferenčna funkcija je lahko čas, ki ga uslužbenec potrebuje za pot do službe, a je urejena nasprotno kot množica realnih števil: večje število pomeni nižjo preferenco in obratno.

Če se vsi uslužbenci peljejo z avtomobilom, vsak od njih za pot potrebuje 50 minut. Če se eden od njih namesto tega odloči potovati z vlakom, bo za pot potreboval $27{\cdot}005$ minute, kar je ugodneje, torej to ni Nashevo ravnovesje.

Privzemimo zdaj, da se vsaj en uslužbenec pelje z vlakom, torej da je $y \ge 1$. Če število vlakov v predstavimo kot funkcijo spremenljivke y, dobimo, da smo v Nashevem ravnovesju natanko tedaj, ko velja:

$$25+\frac{x}{200} \le 15+\frac{y+1}{200}+\frac{12}{v(y+1)}\,, \quad 15+\frac{y}{200}+\frac{12}{v(y)} \le 25+\frac{x+1}{200}\,, \quad x+y=5000\,.$$

Po krajšem računu dobimo, da je to (če obdržimo zadnjo zvezo) ekvivalentno:

$$\frac{12}{v(y)}-\frac{1}{200} \le 35-\frac{y}{100} \le \frac{12}{v(y+1)}+\frac{1}{200}\,.$$

Če pogledamo samo skrajno levo in desno stran, dobimo:

$$\frac{1}{v(y)} \le \frac{1}{v(y+1)}+\frac{1}{1200}\,.$$

Ker pa je v nepadajoča funkcija in lahko $1/v(t)$ zavzame le vrednosti 1, 1/2 in 1/3, je ta zveza možna le, če je $v(y)=v(y+1)$, torej je izključeno, da je $y=2000$ ali $y=4000$. Vse skupaj se potem prevede na:

$$\frac{12}{v(y)}-\frac{1}{200} \le 35-\frac{y}{100} \le \frac{12}{v(y)}+\frac{1}{200}\,.$$

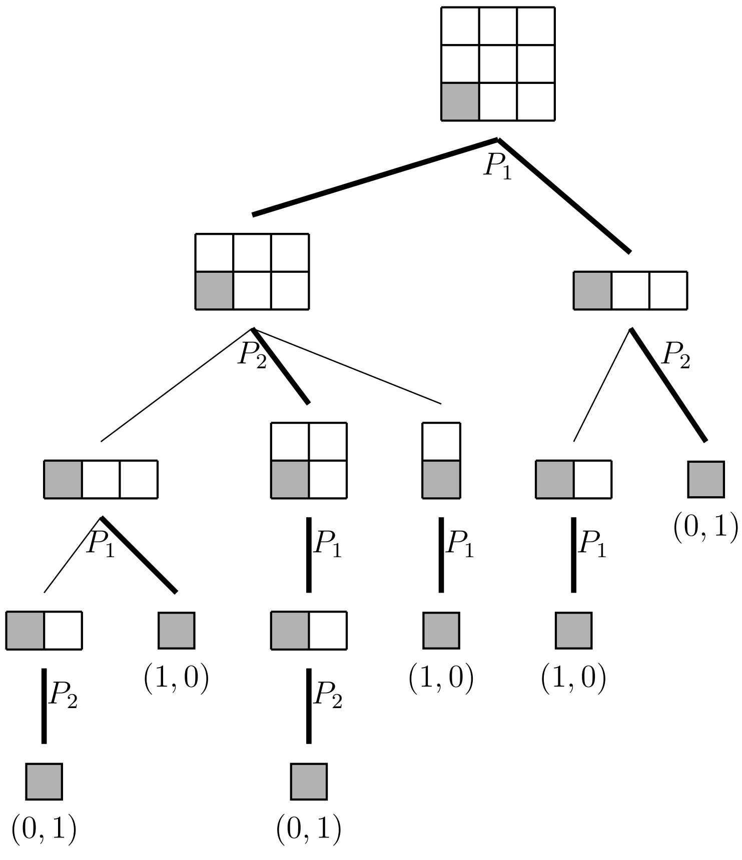
Za $1 \le y \le 1999$, torej $v(y)=1$, dobimo $2299{\cdot}5 \le y \le 2300{\cdot}5$, torej $y=2300$, kar je v nasprotju z začetnim pogojem. Za $2001 \le y \le 3999$ dobimo $2899{\cdot}5 \le y \le 2900{\cdot}5$, torej $y=2900$, kar je v redu, za $4001 \le y \le 5000$ pa dobimo $3099{\cdot}5 \le y \le 3100{\cdot}5$, kar je spet v nasprotju z začetnim pogojem. Nashevo ravnovesje je torej natanko tedaj, ko se z vlakom pelje 2900, z avtomobilom pa 2100 uslužbencev. Formalno gledano ima igra $\binom{5000}{2100} \doteq 1{\cdot}97 \cdot 10^{1475}$ Nashevih ravnovesij.

2. Najprej opazimo, da je druga vrstica strogo dominirana s konveksno kombinacijo $(1-p)$-kratnika prve vrstice in p-kratnika tretje vrstice, brž ko je $3/8 < p < 1/2$. Zato lahko drugo vrstico izločimo. Preostaneta še dve vrstici, kar pomeni, da je Nashevo ravnovesje tam, kjer spodnja ovojnica stolpcev doseže maksimum. Če prvi igralec meša $(1-p)$-kratnik prve in p-kratnik tretje vrstice, je spodnja ovojnica stolpcev enaka:

$$\min\{8-4p, 1+8p, 2+4p\} = \begin{cases} 1+8p & ; p \leq 1/4 \\ 2+4p & ; 1/4 \leq p \leq 3/4 \\ 8-4p & ; p \geq 3/4 \end{cases}$$

in maksimum je dosežen pri $p = 3/4$. Torej prvi igralec meša $3/4$ prve vrstice in $1/4$ tretje, drugi igralec pa meša prvi in tretji stolpec, recimo $(1-q)$-kratnik prvega in q-kratnik tretjega. Iz principa indiferentnosti dobimo $8 - 6q = 4 + 2q$, torej $q = 1/2$. Nashevo ravnovesje je torej eno samo, in sicer ga lahko ponazorimo s parom vektorjev $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

3. Igro lahko modeliramo kot ekstenzivno igro z naslednjim drevesom (kjer so vmesna stanja kvadrati, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da igralec, ki je na potezi, lomi vrstice):



(odebeljene črte predstavljajo optimalne ali edine možne akcije). Iz diagrama je razvidno, da drugi igralec, če igra prav, vedno zmaga. Njegova strategija je preprosta: vedno mora odrezati tako, da dobi kvadrat. Torej je bolje biti na potezi kot drugi.

4. Če koalicija vsebuje Ambroža in še vsaj enega mesarja, dobi toliko, kolikor največ iztrži mesar, ki je v koaliciji. Sicer koalicija ne dobi ničesar. Torej velja:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = v(\{B, C\}) = 0\,,$$
$$v(\{A, B\}) = 90\,, \qquad v(\{A, C\}) = v(\{A, B, C\}) = 120\,.$$

Pri delitvi dobička, ki je v jedru, Boris ne sme dobiti ničesar, sicer bi lahko Ambrož in Cveto izstopila iz velike koalicije in bi dobila več (120 denarnih enot). Toda Borisova prisotnost pomeni, da Cveto ne sme dobiti več kot 30 denarnih enot. V nasprotnem primeru bi namreč lahko Ambrož in Boris izstopila iz velike koalicije in bi dobila več (90 denarnih enot). Drugi izstopi iz koalicije pa pomenijo le, da na koncu nihče ne sme biti v minusu, saj je izkupiček drugih koalicij enak nič (ni pa negativen). Skratka, jedro predstavljajo natanko koalicije, pri katerih Ambrož dobi a, Boris nič, Cveto pa $120 - a$, kjer je $90 \le a \le 120$.

Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	A	B	C
A, B, C	0	90	30
A, C, B	0	0	120
B, A, C	90	0	30
B, C, A	120	0	0
C, A, B	120	0	0
C, B, A	120	0	0
Povprečje	75	15	30

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_A = 75$, $\phi_B = 15$ in $\phi_C = 30$, se pravi, da mora tudi Boris dobiti nekaj denarja.

2010/11

Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 14. 4. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. V tabeli preferenčnih funkcij elemente, pri katerih gre zagotovo za najboljši odziv, zamenjamo s kljukicami, elemente, pri katerih zagotovo ne gre za najboljši odziv, pa s črticami. Dobimo:

Tretji igralec izbere C_1:

	B_1	B_2
A_1	$\checkmark, a, b$	$/, 5, \checkmark$
A_2	$/, \checkmark, \checkmark$	$\checkmark, /, \checkmark$

Tretji igralec izbere C_2:

	B_1	B_2
A_1	$/, b, 1$	$a, 1, /$
A_2	$\checkmark, /, /$	$2, \checkmark, /$

Tretji igralec izbere C_3:

	B_1	B_2
A_1	$/, /, /$	$/, \checkmark, a$
A_2	$\checkmark, \checkmark, /$	$\checkmark, /, /$

Nasheva ravnovesja so lahko le v poljih brez črtic, edino tako polje pa je (A_1, B_1, C_1). Le-to je Nashevo ravnovesje, če je $b \ge 5$ in $b \ge 1$.

Če in samo če je $b \ge 1$, strategija C_1 dominira strategijo C_2.
Če in samo če je $a \le 4$ in $b \ge 0$, strategija C_1 dominira strategijo C_3.
Če in samo če je $a \le 3$, strategija C_2 dominira strategijo C_3.
Drugih dominacij ni.

2. Iz:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2) = \frac{q_2}{(q_1 + q_2)^2} - c_1 \,, \qquad \frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2) = \frac{q_1}{(q_1 + q_2)^2} - c_2$$

po nekaj računanja dobimo, da je Nashevo ravnovesje doseženo kvečjemu za:

$$q_1 = \frac{c_2}{(c_1 + c_2)^2} \,, \quad q_2 = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)^2} \,.$$

Da gre tam res za Nashevo ravnovesje, t. j. da sta res dosežena ustrezna globalna maksimuma, lahko preverimo npr. z drugima parcialnima odvodoma:

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} u_1(q_1, q_2) = -\frac{q_2}{2(q_1 + q_2)^3} \,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} u_2(q_1, q_2) = -\frac{q_1}{2(q_1 + q_2)^3} \,.$$

3. Iz:

$$U_2\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+3p \\ 3-2p \\ 5-4p \end{bmatrix} \,, \quad U_2\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, Z \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dobimo, da mešana strategija $\begin{pmatrix} X & Y \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ strogo dominira Z, brž ko je $0 < p < \frac{1}{2}$. Zato lahko strategijo Z izločimo iz iskanja Nashevih ravnovesij. Drugih dominacij pa ni.

Iz tabele hitro razberemo, da ni čistih Nashevih ravnovesij. Prav tako s pomočjo principa indiferentnosti hitro vidimo, da ni niti Nashevih ravnovesij, kjer bi bila katera od strategij čista. Z drugimi besedami, so le Nasheva ravnovesja, pri katerih oba igralca mešata strategije. Iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4-4q \\ 3-q \\ 3q \end{bmatrix}$$

dobimo, da je lahko Nashevo ravnovesje doseženo kvečjemu:

- če prvi igralec meša A in B: pri $q = \frac{1}{3}$;
- če prvi igralec meša A in C: pri $q = \frac{4}{7}$;
- če prvi igralec meša B in C: pri $q = \frac{3}{4}$.

Če prvi igralec meša A in B, najprej preverimo, da je:

$$U_1\left(A, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = U_1\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = \frac{8}{3} \ge U_1\left(C, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = 1$$

(t. j. smo na zgornji ovojnici), nakar iz:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+2p & 4-3p \end{bmatrix}$$

dobimo, da je Nashevo ravnovesje doseženo pri $p = \frac{3}{5}$.
Če prvi igralec meša A in C, velja:

$$U_1\left(A, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\right) = U_1\left(C, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\right) = \frac{12}{7} < U_1\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\right) = \frac{17}{7},$$

torej tam ni Nashevega ravnovesja, ker nismo na zgornji ovojnici.
Če pa prvi igralec meša B in C, pa iz:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3+2p & 1 \end{bmatrix}$$

dobimo, da v tem primeru Nashevega ravnovesja ne more biti.
Sklep: edino Nashevo ravnovesje je pri profilu $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right)$.

4. Označimo $\pi_1 := \begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Tedaj je:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{0\le p\le 1} \min\bigl\{U_1(\pi_1, X), U_1(\pi_1, Y), U_1(\pi_1, Z)\bigr\} = \\ &= \max_{0\le p\le 1} \min\{3-3p, 1+3p, 2+p\}\,. \end{aligned}$$

Maksimum je dosežen v presečišču premic, katerih smerna koeficienta imata nasproten predznak (ničla je dovoljena), ki se nahaja na spodnji ovojnici, njegova abscisa pa je v $[0,1]$; če takega presečišča ni, je maksimum dosežen v enem od krajišč. V našem primeru imamo dve presečišči z abscisama v $[0,1]$, kot je prikazano v spodnji tabeli:

p	$3-3p$	$1+3p$	$2+p$
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\frac{1}{3}$	2	2	$\frac{7}{3}$

.

Na spodnji ovojnici leži presečišče pri $p=\frac{1}{3}$, torej je $v_1=2$.

Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 13. 6. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Neposredno iz tabele razberemo, da so možna tudi čista Nasheva ravnovesja, pri katerih prvi igralec igra le A ali B, drugi pa le L ali M, in sicer je (B, L) čisto Nashevo ravnovesje, brž ko je $b \leq 5$, (A, M) pa je Nashevo ravnovesje, brž ko je $a \leq 2$.

Iz principa indiferentnosti dobimo, da kombinacij čisto–mešano ni, za mešano Nashevo ravnovesje oblike $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & M \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$ pa mora veljati:

$$2 + 2q = 5 - 4q \geq b(1-q) \quad \text{in} \quad -1 + 6p = 2 - 3p \geq (1-p)a + 2p\,,$$

od koder dobimo, da je:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & M \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

mešano Nashevo ravnovesje, če je $a \leq 1/2$ in $b \leq 6$.

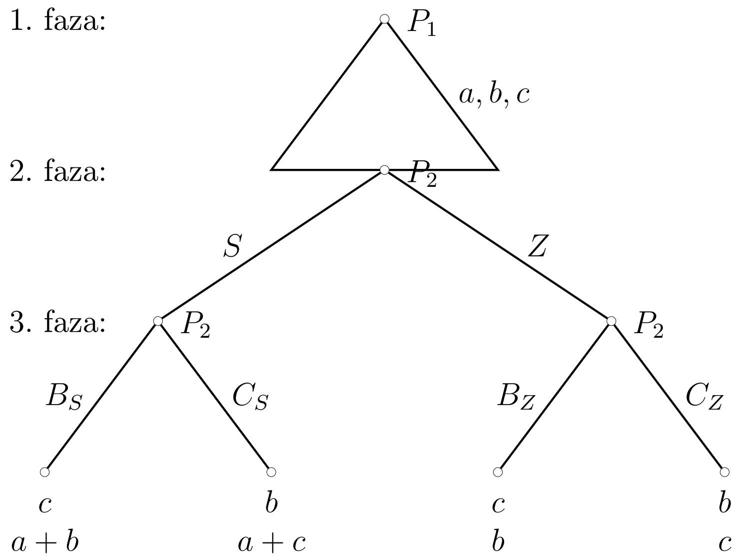
Sklep: mešano Nashevo ravnovesje zahtevane oblike obstaja, brž ko je $a \leq 2$ ali $b \leq 5$, ne glede na c.

2. Najprej opazimo, da pri prvem igralcu, ki dobi signal stanja ω_1, akcija A dominira akcijo B, če dobi signal stanja ω_3, pa akcija B dominira akcijo A. Za prvega igralca s tema dvema signaloma je torej strategija jasna, za prvega igralca s signalom stanja ω_2 in drugega igralca pa dobimo strateško igro z naslednjima funkcijama koristnosti:

	L_{123}	D_{123}
A_2	$0, \frac{3}{2}$	$4, 3$
B_2	$3, 2$	$1, -1$

Iz tabele razberemo, da sta (A_2, D_{123}) in (B_2, L_{123}) čisti Bayesovi ravnovesji in da Bayesovih ravnovesij tipa čisto–mešano ni. Nadalje iz principa indiferentnosti razberemo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$, kjer je $0 < p, q < 1$, mešano Bayesovo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}p = 3 - 4p$ in $4q = 3 - 2q$, torej $p = \frac{1}{3}$ in $q = \frac{1}{2}$. Sklep: mešana Bayesova ravnovesja naše igre so $(A_1A_2B_3, D_{123})$, $(A_1B_2B_3, L_{123})$ in $\left(A_1 \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} B_3,\ \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$.

3. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



V tretji fazi vgnezdeno Nashevo ravnovesje nastopi, če drugi igralec igra B_S in B_Z, če je $b > c$, nadalje igra C_S in C_Z, če je $b < c$, in kar koli, če je $b = c$. Drugi igralec torej v drugi fazi, če ponujeni kos sprejme, dobi $a + \max\{b, c\}$, če pa ga zavrne, dobi $\max\{b, c\}$. V vgnezdenem Nashevem ravnovesju torej sprejme, če je $a > 0$, in sprejme ali zavrne, če je $a = 0$. Oglejmo si zdaj še prvo fazo. V vgnezdenem Nashevem ravnovesju prvi igralec ne glede na optimalno strategijo drugega igralca dobi $\min\{b, c\}$. To bo maksimalno, če bo $a = 0$ in $b = c = \frac{1}{2}$.

Sklep: v vgnezdenem Nashevem ravnovesju:

- prvi igralec razreže torto na kose velikosti 0, $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$;
- če prvi igralec ponudi drugemu kos velikosti več kot nič, ga drugi igralec sprejme, ničelni kos pa sprejme ali zavrne;
- drugi igralec zmakne večjega od preostalih kosov; če sta enaka, zmakne katerega koli.

4. Pripadajoči koeficienti so enaki:

$$c_\emptyset = 0\,, \quad c_{\{1\}} = 0\,, \quad c_{\{2\}} = 1\,, \quad c_{\{3\}} = 1\,,$$
$$c_{\{1,2\}} = 1\,, \quad c_{\{1,3\}} = 0\,, \quad c_{\{2,3\}} = 0\,, \quad c_{\{1,2,3\}} = a - 3\,,$$

Shapleyjeve vrednosti pa so:

$$\phi_1 = \frac{a}{3} - \frac{1}{2}\,, \quad \phi_2 = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}\,, \quad \phi_3 = \frac{a}{3}\,.$$

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 21. 6. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

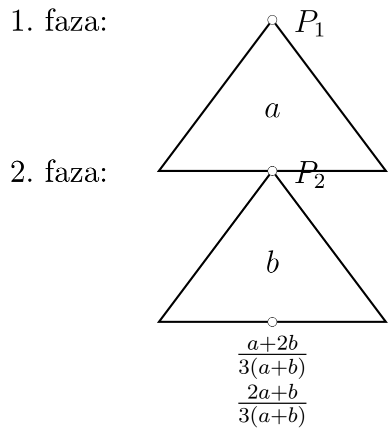
1. Najprej opazimo, da pri prvem igralcu, ki dobi signal stanja ω_1, akcija A dominira akcijo B, pri drugem igralcu, ki dobi signal stanja ω_2, pa akcija D dominira akcijo L. Za igralca s tema signaloma je torej strategija jasna, torej se lahko omejimo na prvega igralca, ki dobi signal stanj ω_2 in ω_3, in drugega igralca, ki dobi signal stanj ω_1 in ω_3. Prvi ima aposteriorno porazdelitev $\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, drugi pa $\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Dobimo strateško igro z naslednjima funkcijama koristnosti:

	L_{13}	D_{13}
A_{23}	$5, 0$	$1, 3$
B_{23}	$1, 2$	$\frac{5}{2}, 1$

.

S primerjanjem funkcij koristnosti hitro ugotovimo, da čistih Bayesovih ravnovesij ni, prav tako tudi ne kombinacij čisto–mešano. Iz principa indiferentnosti razberemo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{13} & D_{13} \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$, kjer je $0 < p, q < 1$, mešano Bayesovo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $5 - 4q = 1 + \frac{3}{2}q$ in $2p = 3 - 2p$, torej $p = \frac{3}{4}$ in $q = \frac{8}{11}$. Edino mešano Bayesovo ravnovesje dane igre je torej
$\left(A_1 \begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, D_2 \begin{pmatrix} L_{13} & D_{13} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}\right)$.

2. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



z dopolnilom, da sta dobitka za $a = b = 0$ enaka p in $1 - p$.

Če je $a > 0$, je v drugi fazi vgnezdeno Nashevo ravnovesje takrat, ko je $b = 0$. Za $a = 0$ pa moramo ločiti glede na p: pri $p < 2/3$ bo do vgnezdenega Nashevega ravnovesja prišlo le pri $b = 0$, pri $p = 2/3$ pri poljubni izbiri števila b, pri $p > 2/3$ pa pri poljubni izbiri $b > 0$ (obstaja torej neskončno mnogo vgnezdenih Nashevih ravnovesij).

Oglejmo si zdaj še prvo fazo. Če prvi igralec izbere $a > 0$, je njegov dobitek enak $1/3$. Če izbere $a = 0$, pa kratek premislek pokaže, da prvi igralec dobi $\min\{p, 2/3\}$, ne glede na optimalno strategijo drugega igralca. Od tod sledi, da so vgnezdena Nasheva ravnovesja naslednja:

- Če je $p < 1/3$, prvi igralec izbere kateri koli $a > 0$, drugi pa vedno izbere $b = 0$.
- Če je $p = 1/3$, prvi igralec izbere kateri koli a, drugi pa vedno izbere $b = 0$.
- Če je $1/3 < p < 2/3$, prvi igralec izbere $a = 0$, drugi pa vedno izbere $b = 0$.
- Če je $p = 2/3$, prvi igralec izbere $a = 0$, drugi pa $b = 0$, če je $a > 0$, in kateri koli b, če je $a = 0$.
- Če je $p > 2/3$, prvi igralec izbere $a = 0$, drugi pa $b = 0$, če je $a > 0$, in kateri koli $b > 0$, če je $a = 0$.

Za $1/3 < p < 2/3$ torej obstaja eno samo, sicer pa neskončno mnogo vgnezdenih Nashevih ravnovesij.

3. a) Iz zapisa ustrezne strateške igre, kjer vrstice predstavljajo Bojana, stolpci Cirila, S sodelovanje, N pa nesodelovanje:

Amanda ne sodeluje:

	N	S
N	$50, 50, 50$	$50, 50, 50$
S	$50, 50, 50$	$50, 50, 50$

Amanda sodeluje:

	N	S
N	$50, 50, 50$	$60, 50, 60$
S	$60, 60, 50$	$40, 40, 40$

dobimo, da do čistega Nashevega ravnovesja pride natanko tedaj, ko pri skupnem projektu bodisi ne sodeluje nobeden bodisi sodelujeta natanko dva igralca.

b) Če Amanda igra proti Bojanu in Cirilu, dobimo matriko dobitkov:

	NN	NS	SN	SS
N	50	50	50	50
S	50	60	60	40

,

ki ima vrednost $v(\{A\}) = 50$. Nadalje, če Bojan igra proti Amandi in Cirilu, ima matrika dobitkov:

	NN	NS	SN	SS
N	50	50	50	50
S	50	50	60	40

prav tako vrednost $v(\{B\}) = 50$. Podobno je tudi $v(\{C\}) = 50$. Če Amanda in Bojan igrata proti Cirilu, dobimo matriko dobitkov:

	N	S
NN	100	100
NS	100	100
SN	100	110
SS	120	80

z vrednostjo $v(\{A, B\}) = 104$. Podobno je tudi $v(\{A, C\}) = 104$. Če Bojan in Ciril igrata proti Amandi, pa ima matrika dobitkov:

	N	S
NN	100	100
NS	100	110
SN	100	110
SS	100	80

vrednost $v(\{B, C\}) = 100$. Končno je največji možni skupni dobitek enak $v(\{A, B, C\}) = 170$. Koeficienti pri izračunu Shapleyjevih vrednosti so torej enaki:

$$c_\emptyset = 0\,, \quad c_{\{A\}} = c_{\{B\}} = c_{\{C\}} = 50\,,$$
$$c_{\{A,B\}} = c_{\{A,C\}} = 4\,, \quad c_{\{B,C\}} = 0\,, \quad c_{\{A,B,C\}} = 12\,,$$

Shapleyjeve vrednosti pa so:

$$\phi_A = 58\,, \quad \phi_B = \phi_C = 56\,.$$

Rešitve izpita iz teorije iger z dne 30. 8. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

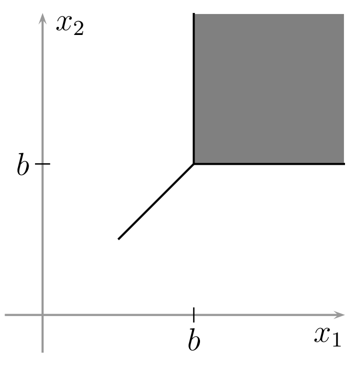
1. Gre za strateško igro s preferenčnima funkcijama:

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1(b - x_2)_+ & ; x_1 \le x_2 \\ \frac{1}{2}x_1(b - x_1)_+ & ; x_1 \ge x_2 \end{cases},$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_2(b - x_2)_+ & ; x_1 \le x_2 \\ \frac{1}{2}x_2(b - x_1)_+ & ; x_1 \ge x_2 \end{cases},$$

kjer smo označili $x_+ = \max\{x, 0\}$, x_1 in x_2 pa sta ceni na enoto blaga, ki ju postavita proizvajalca.

Če oba proizvajalca določita ceno, večjo ali enako b, se ne proda nič blaga in to se ne spremeni, če eden od proizvajalcev spremeni ceno. Zato je taka točka Nashevo ravnovesje. Če eden izmed proizvajalcev določi ceno, večjo ali enako b, drugi pa ceno, manjšo od b, oba prodata več, če tisti, ki postavi višjo ceno, le-to zniža pod b. Zato tam ni Nashevega ravnovesja. Če pa oba postavita ceno, nižjo od b, je maksimum preferenčnih funkcij dosežen, če je $x_1 = \max\{x_2, b/2\}$ in $x_2 = \max\{x_1, b/2\}$. Torej je $x_1, x_2 \ge b/2$, od koder sledi, da mora biti $x_1 = x_2$. Nashevo ravnovesje je torej tudi vsaka točka, kjer je $x_1 = x_2 \ge b/2$. Graf množice Nashevih ravnovesij:



2. Hitro opazimo, da prva in druga strategija prvega igralca ne morata biti dominirani, tretja strategija pa je dominirana s kombinacijo $(1-p)$ prve in p druge natanko tedaj, ko je:

$$\frac{1}{2} \le p \le \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad a \ge \frac{1-2p}{1-p}.$$

Z drugimi besedami, dominacija bo možna natanko tedaj, ko bo obstajal tak $p \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, da bo veljala zadnja enačba. To pa bo natanko tedaj, ko bo $a \ge -1$.

Če zdaj vstavimo $a = -1$, dobimo, da je nivo varnosti za prvega igralca enak:

$$\max_{0 \le p \le 1} \min\{4 - 3p, 1 + 4p, -1 + 3p\} = \frac{3}{2}.$$

3. Najprej opazimo, da v stanju ω_1 strategija D dominira strategijo L, v stanju ω_3 pa strategija L dominira strategijo D. Torej je pri drugem igralcu pomembno le, katero strategijo ubere v stanju ω_2. Tako lahko igro prevedemo na običajno strateško igro z mešanimi strategijami in koristnostnima funkcijama:

	L_2	D_2
A_{123}	$3{\cdot}5, 1$	$2, 2$
B_{123}	$3{\cdot}5, 5$	$3{\cdot}5, 4$
C_{123}	$2{\cdot}5, 0$	$1{\cdot}5, 7$

V tej igri je strategija C_{123} strogo dominirana tako z A_{123} kot tudi z B_{123}, zato jo lahko odstranimo. V tako dobljeni igri hitro vidimo, da je (B_{123}, L_2) edino čisto Nashevo ravnovesje. Med Nashevimi ravnovesji, od katerih eden ubere čisto strategijo, drugi pa meša, dobimo $\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, L_2\right)$ za $p \geq 1/2$. Nashevih ravnovesij, kjer bi oba strogo mešala, pa ni.

Sklep: mešana Bayesova ravnovesja igre so $\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ D_1 L_2 L_3\right)$, kjer je $1/2 \leq p \leq 1$.

4. Karakteristična funkcija je:

$$\begin{gathered} v(\emptyset) = 0\,, \quad v(\{A\}) = -650\,, \quad v(\{B\}) = -200\,, \quad v(\{C\}) = -300\,, \\ v(\{A,B\}) = -700\,, \quad v(\{A,C\}) = -700\,, \quad v(\{B,C\}) = -500\,, \\ v(\{A,B,C\}) = -750\,, \end{gathered}$$

Shapleyjeve vrednosti pa so:

$$\phi_A = -450\,, \quad \phi_B = -125\,, \quad \phi_C = -175\,.$$

V skladu s Shapleyjevimi vrednostmi bi moral torej Aljaž v skupno blagajno prispevati 450€, Bojan 125€, Cveto pa 175€.