

KOLOKVIJI IN IZPITI IZ TEORIJE IGER

Matematika – univerzitetni študij

Zbral: Martin Raič

2020/21

1. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

25. november 2020

- [30] Tri vrstne hiše se držijo druga druge. Pri vsaki se morajo odločiti, koliko bodo pozimi kurili. Naj i -ta hiša za kurivo plača znesek z_i . Od tega dobi prva hiša toploto $4z_1 + z_2$, druga $z_1 + 4z_2 + z_3$, tretja pa $z_2 + 4z_3$. Ugodje hiše, ki prejme toploto q , naj znaša $5 \ln(1 + q)$. Kako bodo v skladu s teorijo iger kurili?
- [35] Dana je igra za štiri igralce, pri kateri mora vsak pokazati rdečo ali zeleno karto; to naredijo neodvisno drug od drugega. Nato:
 - Če vsi pokažejo karto iste barve, nihče ne plača nič.
 - Če eden pokaže rdečo, trije pa zeleno, vsak, ki pokaže zeleno, plača 6 evrov tistemu, ki pokaže rdečo.
 - Če dva pokažeta rdečo, dva pa zeleno, vsak, ki pokaže rdečo, plača po 7 evrov vsakemu, ki pokaže zeleno.
 - Če eden pokaže zeleno, trije pa rdečo, tisti, ki pokaže zeleno, plača po 4 evre vsakemu, ki pokaže rdečo.

Poiščite čista Nasheva ravnovesja in še tista mešana, pri katerih vsak pokaže rdečo karto z isto verjetnostjo.

- [35] Poiščite vrednost in mešana Nasheva ravnovesja matrične igre:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \\ 6 & 4 & 6 \\ 1 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

Namig: premislite, kako je z dominacijo pri stolpcih.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **75 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IN IZPIT IZ TEORIJE IGER

18. januar 2021

Za kolokvij rešujete zadnje tri, za izpit pa vse štiri naloge.

Pri kolokviu se bodo točke pomnožile s $4/3$.

1. [25] Danih je n posameznikov in vsak lahko nekaj prispeva v skupno blagajno: označimo ta znesek z x_i . Privzamemo, da je $x_i \geq 0$. Prispevki se investirajo v projekt, ki vsem skupaj prinese korist $\sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$. Ta korist se potem razdeli sorazmerno z investiranimi zneski.

- a) Modelirajte to kot strateško igro in poiščite vsa čista Nasheva ravnovesja. Kot znano lahko privzamete, da obstaja vsaj eno čisto Nashevo ravnovesje.
- b) Bi se lahko dogovorili bolje kot v čistih Nashevih ravnovesjih?

2. [25] Dana je strateška igra:

	L	R
T	5, 1	0, 1
B	1, 0	1, 4

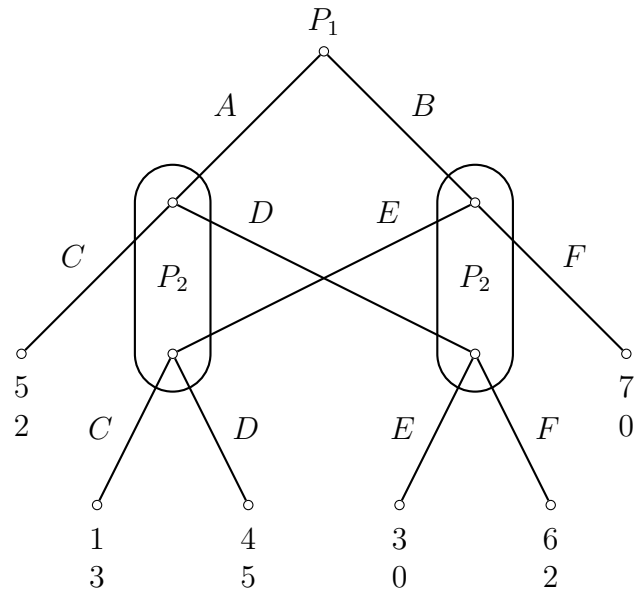
- a) Za vsako točko grožnje, ki izhaja iz čistih strategij, poiščite rešitev Nashevega modela pogajanja, če izhajamo iz pripadajočega para dobitkov, množica dopustnih sporazumov pa izhaja iz dane strateške igre in dobrina ni prenosljiva.
- b) Poiščite čista Nasheva ravnovesja pripadajoče dvofazne igre z zavezujočim sporazumom. Za njih navedite tudi, kako igralca implementirata sporazum.
3. [25] Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 , drugega pa od stanj ω_2 in ω_3 . Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 , drugega pa od stanj ω_1 in ω_3 . Na začetku oba igralca verjameta v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

Stanje ω_1 :	Stanje ω_2 :	Stanje ω_3 :																											
<table border="1"><tr><td></td><td>L</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td>3, 8</td><td>4, 1</td></tr><tr><td>B</td><td>1, 0</td><td>5, 3</td></tr></table>		L	D	A	3, 8	4, 1	B	1, 0	5, 3	<table border="1"><tr><td></td><td>L</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td>3, 3</td><td>5, 2</td></tr><tr><td>B</td><td>0, 5</td><td>3, 3</td></tr></table>		L	D	A	3, 3	5, 2	B	0, 5	3, 3	<table border="1"><tr><td></td><td>L</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td>0, 0</td><td>6, 1</td></tr><tr><td>B</td><td>3, 2</td><td>9, 5</td></tr></table>		L	D	A	0, 0	6, 1	B	3, 2	9, 5
	L	D																											
A	3, 8	4, 1																											
B	1, 0	5, 3																											
	L	D																											
A	3, 3	5, 2																											
B	0, 5	3, 3																											
	L	D																											
A	0, 0	6, 1																											
B	3, 2	9, 5																											

Poiščite mešana Bayes–Nasheva ravnovesja igre.

O B R N I T E !

4. [25] Poiščite vsa mešana Nasheva ravnovesja naslednje ekstenzivne igre z nepopolno informacijo:



Katera od njih so behavioristična?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja kolokvija je **90 minut**, čas reševanja izpita pa **120 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2019/20

1. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
21. november 2019

1. [30] Dana je igra za dva igralca, pri kateri je množica akcij prvega igralca interval $[0, 1]$, množica akcij drugega pa je $\{A, B, C\}$. Preferenčni funkciji sta podani po predpisih:

$$\begin{aligned}u_1(t, A) &= 3t^2 - 2t, & u_2(t, A) &= 3t, \\u_1(t, B) &= t - t^2, & u_2(t, B) &= 3 - 3t, \\u_1(t, C) &= 3t^2 - 4t, & u_2(t, C) &= 2 - t.\end{aligned}$$

Poiščite čista Nasheva ravnovesja te igre.

2. [35] Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre za tri igralce:

	X	Y		X	Y	
T	1, 3, 1	5, 2, 4		T	2, 1, 3	6, 3, 2
B	4, 2, 2	1, 3, 2		B	4, 4, 1	1, 2, 3
	$a_3 = L$			$a_3 = R$		

v katerih vsaj eden od igralcev igra čisto strategijo.

3. [35] Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y	Z	W
A	2, 6	2, 0	6, 5	0, 3
B	0, 0	4, 7	2, 2	8, 6
C	1, 4	2, 1	4, 2	3, 7

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **80 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IN IZPIT IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
22. januar 2020

Za kolokvij rešujete zadnje tri, za izpit pa vse štiri naloge.

Pri kolokviju se bodo točke pomnožile s $4/3$.

- [25] 100 proizvajalcev se odloča, ali dati na trg dober ali slab izdelek. Če je na trgu d dobrih in s slabih izdelkov ($d + s = 100$), zaslužek posameznega proizvajalca od dobrega izdelka znaša $1/(103 + d)$, zaslužek od slabega pa $2/(103 + 3s)$. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.
- [25] Trije jedci si delijo torto po naslednjem protokolu: najprej prvi odreže kos velikosti $p_1 \in [0, 1]$, nato drugi od preostanka odreže kos velikosti $p_2 \in [0, 1 - p_1]$, nato tretji vzame enega od treh dobljenih kosov, nato enega izmed preostalih dveh kosov vzame prvi, zadnji preostali kos pa dobi drugi jedec. Določite, najmanj koliko in največ koliko dobi prvi jedec v vgnezenem Nashevem ravnovesju. Za najmanjšo in največjo možno vrednost ustrezno vgnezeno Nashevo ravnovesje tudi zapišite.
- [25] Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Igra je v vsakem stanju z enako verjetnostjo. Prvi igralec ve le, ali igra je ali ni v stanju ω_1 , drugi pa sploh ne ve, v katerem stanju je igra. Prvi igralec lahko igra potezo A , B ali C , drugi pa potezo L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	0, 1	6, 6	5, 7	2, 9	5, 9	2, 8
B	2, 7	4, 3	4, 8	0, 6	4, 7	4, 9
C	6, 7	-6, 0	6, 2	3, 1	5, 0	2, 2

Poiščite mešana Bayes–Nasheva ravnovesja igre.

- [25] 20 študentov si želi ogledati Prečudovito jamo. Vstopnina za posameznika je 10 evrov. Le študent Jaka, ki je med njimi, pa ve, da si lahko skupina 10 študentov ogleda jamo že za 75 evrov (kar lahko izkoristi tudi skupina 8 ali 9 študentov). Na koncu si seveda jamo ogledajo za 150 evrov. Kako naj si v skladu s Shapleyjevimi vrednostmi razdelijo ta strošek? Naj Jaka ne plača ničesar in naj mu celo kolegi kaj plačajo?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja kolokvija je **80 minut**, čas reševanja izpita pa **110 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika

30. junij 2020

1. Na tržnici je 25 prodajalcev medu. Vsak lahko prodaja originalen ali pa ponarejen med. Posamezen prodajalec ima od prodaje originalnega medu 1000 evrov, od prodaje ponarejenega medu pa 3000 evrov dobička. Kdor prodaja ponarejen med, pa je z verjetnostjo 1% zasačen (neodvisno od drugih). Če zasačijo kakšnega prodajalca ponarejenega medu, preiščejo vse in vsak, ki prodaja ponarejen med, dobi kazen 20000 evrov. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.
2. Dva igralca izmenoma lomita tablico kvadratkov velikosti 3×3 , ki je prikazana na sliki. Igralec, ki je na potezi, en kos vzame zase, drugega pa pusti za nadaljnji potek igre. Prvi igralec lahko lomi le po vodoravnih, drugi pa le po navpičnih črtah. Če je na voljo več kot ena vrstica za prvega igralca oziroma več kot en stolpec za drugega igralca, mora igralec vsaj nekaj vzeti zase, ne sme pa vzeti vsega. Če pa je na voljo le še ena vrstica oziroma stolpec, igralec, ki je na potezi, vzame vse in je konec igre. Dobitek posameznega igralca je enak vsoti števil na poljih, ki si jih prilasti. Začne prvi igralec. Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja. Ali se na vsakem koraku najbolj splača vzeti kos z največjo vrednostjo?
3. Rešite dvofazni Nashev model pogajanja s prenosljivo dobrino, ki izhaja iz naslednje strateške igre:

2	2	2
2	2	2
0	2	3

	X	Y
A	5, 1	2, 5
B	1, 5	5, 2
C	5, 3	5, 4

O B R N I T E !

4. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Igra je v vsakem od stanj ω_1 in ω_3 z verjetnostjo a , v stanju ω_2 pa je z verjetnostjo $1 - 2a$. Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 , drug signal pa od stanj ω_2 in ω_3 . Drugi igralec pa dobi od vseh treh stanj isti signal. Prvi igralec lahko igra potezi T ali B , drugi pa potezi L , C ali R . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

		L	C	R
Stanje ω_1 :	T	6, 6	7, 7	1, 4
	B	2, 3	4, 3	6, 2

		L	C	R
Stanje ω_2 :	T	1, 6	2, 9	3, 4
	B	0, 2	0, 2	0, 5

		L	C	R
Stanje ω_3 :	T	4, 6	6, 7	3, 8
	B	6, 6	10, 1	9, 6

- a) Za katere vrednosti parametra a akcija T pri prvem igralcu s signalom, ki pride iz stanj ω_2 in ω_3 , šibko oziroma strogo dominira akcijo B ?
- b) Za najvišjo vrednost parametra a , ki se nanaša na vprašanje iz prejšnje točke, poiščite vsa mešana Bayes–Nasheva ravnovesja igre, pri katerih prvi igralec s signalom, ki pride iz stanj ω_2 in ω_3 , igra T .

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2018/19

KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika

8. maj 2019

1. Dana je strateška igra za dva igralca, pri kateri vsak izbere število iz intervala $[0, 1]$. Če prvi izbere x , drugi pa y , sta preferenčni funkciji enaki:

$$u_1(x, y) = 8xy - 2x - x^2, \quad u_2(x, y) = 6xy - 2y - y^2.$$

Določite vsa čista Nasheva ravnovesja te igre.

2. 16 razbojnikov naleti na plen z vrednostjo 16. Vsak izmed njih se mora odločiti, ali se bo plena lotil ali ne. Razbojniki, ki se lotijo plena, si ga na koncu razdelijo v enakih delih, a če se jih s loti plena, medsebojno spopadanje vsakega od njih stane s . Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.
3. Poiščite vsa mešana Nasheva ravnovesja igre:

	L	C	R
T	5, 1	3, 9	2, 2
M	6, 4	4, 2	1, 0
B	4, 0	3, 2	5, 3

4. Dana je igra za dva igralca, pri kateri vsak izbere število od 1 do 5. Če prvi izbere za ena več kot drugi, plača drugemu 1 evro. Če drugi izbere za ena več kot prvi, plača prvemu 2 evra. Sicer nihče ne plača nič. Določite vrednost igre in vsaj eno mešano Nashevo ravnovesje.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika

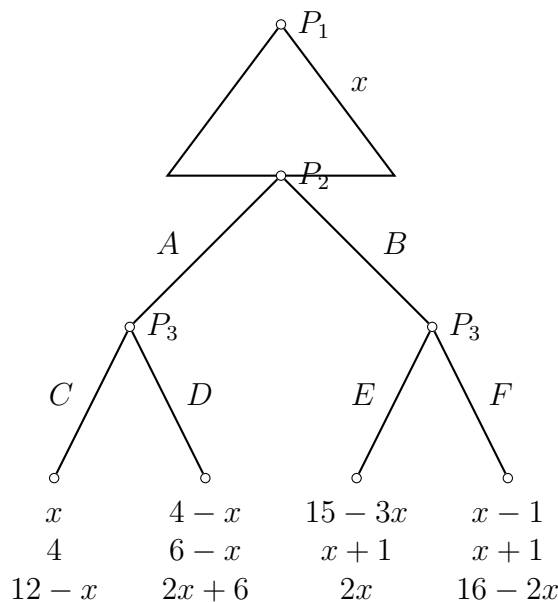
5. junij 2019

1. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 , drugega pa od stanj ω_2 in ω_3 . Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 , drugega pa od stanj ω_1 in ω_3 . Na začetku oba igralca verjameta v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	6, 1	4, 6	3, 1	5, 4	7, 4	9, 5
B	7, 4	5, 3	8, 6	4, 2	6, 5	1, 6

Poiščite mešana Bayes–Nasheva ravnovesja igre.

2. Poiščite vsa števila x , za katera dobimo (vsaj eno) vgnezdjeno Nashevo ravnovesje naslednje ekstenzivne igre:



O B R N I T E !

3. Poiščite rešitev Nashevega modela pogajanja, ki izhaja iz strateške igre:

	L	R
T	1, 4	0, 2
B	1, 0	3, 1

- če prvi igralec izhaja iz čiste strategije B , drugi pa iz čiste strategije L . Dobrina ni prenosljiva. Zapišite tudi, kako igralca implementirata sporazum.
4. Ambrož, Betka, Cene, Darja in Evgen igrajo koalicijsko igro, v kateri je dobitok koalicije enak nič, če notri ni Evgena. Sicer pa Darja, če je v koaliciji, noter prinese dve enoti, vsi ostali (vključno z Evgenom), če so v koaliciji, pa po eno enoto. Primer: če so v koaliciji Ambrož, Darja in Evgen, je njena vrednost $1 + 2 + 1 = 4$ enote. Izračunajte Shapleyjeve vrednosti vseh igralcev.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika

27. junij 2019

1. Tri kuharice spečejo pogačo. Vsaka kuharica je lahko stiskaška ali radodarna. Radodarna kuharica povabi na pogačo še svojega moža, stiskaška pa ne povabi nikogar. Nato si kuharice in povabljeni možje pogačo razdelijo na enake dele.

Korist stiskaške kuharice je enaka deležu pogače, ki ga zaužije (t. j. od $1/6$ do $1/3$). Korist radodarne kuharice pa je enaka deležu pogače, ki ga zaužije, povečanemu za število $z > 0$: to je zadovoljstvo, da pogačo zaužije skupaj z možem. Ta vrednost je za vse kuharice enaka.

- a) Pri katerih z smo v Nashevem ravnovesju, če so vse kuharice stiskaške? Pri katerih z pa smo v Nashevem ravnovesju, če so vse radodarne?
- b) Pri katerih $z > 0$ obstaja mešano Nashevo ravnovesje, pri katerem so vse kuharice radodarne z enako verjetnostjo $0 < \rho < 1$?
2. Dva igralca igrata igro, pri kateri vsak dobi eno izmed štirih možnih kart, ki so as, fant, dama in kralj. Dobita različni karti in vse možne kombinacije so enako verjetne. Karte imajo vrednosti: as je vreden 1 točko, fant 2 točki, dama 3 točke in kralj 4 točke (za spremembo je torej as vreden najmanj).

Ko igralca dobita vsak svojo karto, se morata najprej neodvisno drug od drugega izreči, ali bosta igrala naprej ali ne. Vsak, ki se odloči, da bo igral, dobi spodbudo v višini a . Nato pa, če oba igralca rečeta, da bosta igrala, pokažeta vsak svojo karto in tisti, ki ima nižjo karto, drugemu plača vrednost višje karte; sicer nihče ne plača nič. To modeliramo kot Bayesovo igro. Pri katerih a smo v Bayes–Nashevem ravnovesju, če igralec, ki dobi damo ali kralja, izbere, da igra, igralec, ki dobi asa ali fanta, pa, da ne igra?

3. Bogdan in Ciril se zanimata za delo, ki ga ponuja Adrijan. Le-ta vsakemu ponudi mezdo, obenem pa postavi delovne zahteve v višini z . Glede na zahteve in ponujeno mezdo se najprej Bogdan odloči, ali se bo prijavil ali ne, nato pa se odloči še Ciril, ki že ve, kako se je odločil Bogdan. Delodajalec od vsakega delavca dobi korist $4z - 1$. Če se za delo prijavi en sam delavec, ima od tega korist $1 - 2z$, če pa se prijavita oba, ima vsak od njiju korist $1 - 3z$. Delavec, ki se ne prijavi, ima korist nič. Modelirajte to kot ekstenzivno igro, dokažite, da ima vgnedeno Nashevo ravnovesje, in določite, koliko znašajo Adrijanove zahteve v tem ravnovesju.

4. Dana je naslednja funkcija na potenčni množici množice $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, & v(\{1\}) &= 1, & v(\{2\}) &= 2, & v(\{3\}) &= 1, \\ v(\{1, 2\}) &= 5, & v(\{1, 3\}) &= 3, & v(\{2, 3\}) &= 4, & v(\{1, 2, 3\}) &= a. \end{aligned}$$

Določite, za katere a je ta funkcija superaditivna. Ima pripadajoča koalicijska igra za vse take a neprazno jedro?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

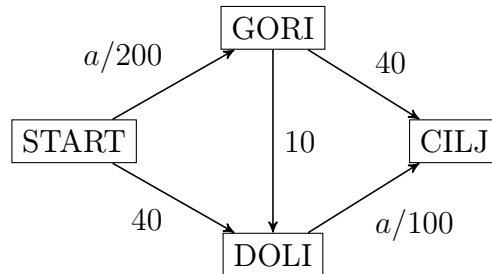
2017/18

1. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
15. december 2017

1. Dan je Cournotov model duopola, kjer tržna cena na enoto blaga znaša a/\sqrt{Q} , kjer je Q skupna količina blaga na trgu, proizvodni stroški na enoto blaga pa znašajo c za vsakega proizvajalca. Pri tem sta $a, c > 0$ znani konstanti. Privzamemo, da vsak proizvajalec ustvari strogo pozitivno količino blaga. Poiščite vsa čista Nasheva ravnovesja tega modela.

2. Na desni je prikazano omrežje enosmer-
nih cest. Ob vsaki cesti je naveden čas
potovanja, če se po njej pelje a avtomobilov. 4000 voznikov (vsak s svojim avtomobilom) želi priti od starta do cilja in vsak ima na voljo tri poti, po katerih lahko gre. Vsak bi želel priti na cilj čimprej. Poiščite čista Nasheva ravnovesja pripadajoče strateške igre.



3. Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	E	F	G	H
A	8, 9	4, 0	0, 8	5, 7
B	6, 1	7, 8	6, 3	2, 6
C	5, 0	5, 1	9, 2	3, 9

4. Trije investitorji se odločajo, ali bodo investirali v določen projekt. Tistega, ki se odloči investirati, to stane eno enoto. Projekt uspe, če investirata vsaj dva. Če investirata natanko dva, skupni dobiček znaša 4 enote, če investirajo vsi trije, pa skupni dobiček znaša 9 enot. Tisti, ki investirajo, si dobiček razdelijo na enake dele (od zaslужka pa je treba seveda odšteti strošek investicije). Kdor ne investira, je na ničli.

Modelirajte to kot strateško igro ter poiščite vsa mešana Nasheva ravnovesja, kjer vsi investitorji uporabijo isto strategijo.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IN IZPIT IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
12. februar 2018

1. Dana je Bayesova igra za dva igralca, v kateri se najprej vržeta dva poštena in neodvisna kovanca. Prvi igralec vidi samo izid na prvem, drugi igralec pa samo izid na drugem kovancu. Nato prvi igralec izbere potezo A ali B , drugi pa istočasno L ali R . Dobitki so prikazani v spodnji tabeli:

Dva grba:			En grb, ena cifra:			Dve cifri:		
	L	R		L	R		L	R
A	3, 4	5, 3	A	7, 5	1, 2	A	1, 1	1, 2
B	1, 6	4, 5	B	3, 3	7, 6	B	6, 3	7, 4

Določite mešana Bayes–Nasheva ravnovesja te igre.

Namig: poiščite dominacijo pri prvem igralcu, ki vidi cifro, in nato pri drugem igralcu, ki vidi grb.

2. Delodajalec išče sezonske delavce in štirje so na voljo. Vsakemu ponudi mezdo v višini 1 denarne enote, postavi pa tudi zahteve v višini z : delodajalec izbere to vrednost, ki je enaka za vse. Te zahteve delavce različno obremenjujejo, tako da njihove koristi, če sprejmejo službo, zaporedoma znašajo $1 - z$, $1 - \frac{3}{4}z$, $1 - \frac{3}{5}z$ in $1 - \frac{1}{2}z$. Delavec, ki ne sprejme službe, pa ima korist 0. Od vsakega delavca, ki sprejme službo, ima delodajalec korist $z - 1$, od vsakega delavca, ki ne sprejme službe, pa korist 0. Delavci se po vrsti, od prvega do zadnjega, odločajo, ali bodo sprejeli službo ali ne. Modelirajte to z uporabo ekstenzivnih iger in poiščite vgnezdene Nasheva ravnovesja. Če nastopi vgnezdene Nashevo ravnovesje, koliko delavcev je zaposlenih, kolikšne koristi imajo in kolikšno korist ima delodajalec?
3. Rešite dvofazni Nashev model pogajanja s prenosljivo dobrino, ki izhaja iz naslednje strateške igre:

	X	Y
A	1, 5	5, 2
B	5, 1	2, 5
C	3, 5	4, 5

4. Dana je množica točk $X = \{1, 2, 3, 4\}$ na številski premici. Te točke so igralci v koalicijski igri, kjer je dobiček koalicije $Y \subseteq X$ dolžina najmanjšega intervala, ki pokrije Y , torej $v(Y) = \max Y - \min Y$. Za prazno koalicijo je seveda $v(\emptyset) = 0$. Izračunajte Shapleyjeve vrednosti te igre.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2016/17

1. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika

18. april 2017

- Pašnik za rejo koz je na voljo n družinam. Če se na pašniku pase k koz, vsaka da $e^{-0.4k}$ enot mleka. Vsaka družina se sama odloči, koliko koz bo redila.
 - Če to modeliramo kot strateško igro s čistimi strategijami, koliko koz bo v Nashevem ravnovesju redila posamezna družina?
 - Je Nashevo ravnovesje optimalno, če gledamo skupno dobro?
- Določite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y	Z	W
A	2,6	4,8	5,4	3,3
B	5,3	1,0	7,4	4,6
C	3,3	2,4	6,7	3,2

- Določite vrednost matrične igre:

$$\begin{bmatrix} a & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

v odvisnosti od parametra a .

- Dana je strateška igra za dva igralca, pri kateri vsak pove naravno število od 1 do 6. Do plačil pride samo, če se povedani števili razlikujeta za 1. V tem primeru je eno od števil sodo, drugo pa liho. Če je sodo število večje, drugi igralec plača prvemu 1 evro, če je liho število večje, pa prvi drugemu plača 1 evro. Določite vsa mešana Nasheva ravnovesja te igre.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

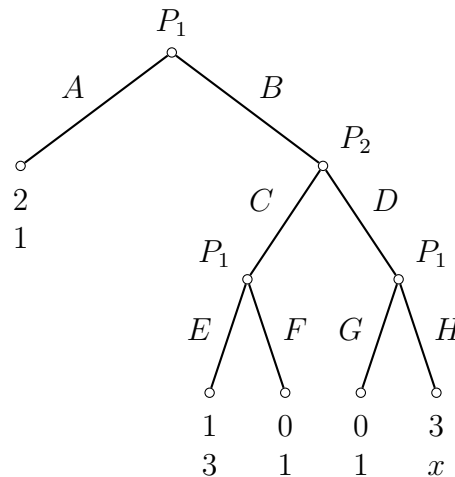
2. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
6. junij 2017

1. Dana je Bayesova igra za dva igralca z dvema stanjema ω_1 in ω_2 . Prvi igralec ve, v katerem stanju je igra, drugi pa ve le, da je igra v stanju ω_1 z verjetnostjo $2/3$ in v stanju ω_2 z verjetnostjo $1/3$. Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani na desni. Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

Stanje ω_1 :	<table border="1" style="border: none;"> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">L</td><td style="padding: 2px 10px;">D</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A</td><td style="padding: 2px 10px;">3, 3</td><td style="padding: 2px 10px;">5, 1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">B</td><td style="padding: 2px 10px;">7, 2</td><td style="padding: 2px 10px;">6, 3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">C</td><td style="padding: 2px 10px;">4, 1</td><td style="padding: 2px 10px;">4, 3</td></tr> </table>		L	D	A	3, 3	5, 1	B	7, 2	6, 3	C	4, 1	4, 3
	L	D											
A	3, 3	5, 1											
B	7, 2	6, 3											
C	4, 1	4, 3											
	<table border="1" style="border: none;"> <tr><td></td><td style="padding: 2px 10px;">L</td><td style="padding: 2px 10px;">D</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">A</td><td style="padding: 2px 10px;">8, 8</td><td style="padding: 2px 10px;">0, 3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">B</td><td style="padding: 2px 10px;">1, 5</td><td style="padding: 2px 10px;">7, 6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">C</td><td style="padding: 2px 10px;">6, 2</td><td style="padding: 2px 10px;">5, 6</td></tr> </table>		L	D	A	8, 8	0, 3	B	1, 5	7, 6	C	6, 2	5, 6
	L	D											
A	8, 8	0, 3											
B	1, 5	7, 6											
C	6, 2	5, 6											

2. Dana je ekstenzivna igra za dva igralca s parametrom x , tako kot je prikazano na desni. Določite, pri katerih vrednostih parametra x obstaja čisto Nashevo ravnovesje pripadajoče strateške igre, pri katerem oba igralca dobita strogo več kot v vseh vgnezenih Nashevih ravnovesjih.



3. Dan je Nashev model pogajanja z izhodiščem $(-9, -4)$ in množico dopustnih sporazumov:

$$S = \{(x, y) ; x < 0, y < 0, xy \geq 1\}.$$

Poiščite Nashevo rešitev pri neprenosljivi in pri prenosljivi dobrini.

4. Lastniki petih sosednjih hiš dobijo neupravičen račun podjetja Oderuh d. o. o. za odvajanje odpadne vode: dva dobita račun za 740€, trije pa račun za 400€. Na voljo imajo dve možnosti: lahko račun plačajo, lahko pa ga izpodbijejo. A za slednje potrebujejo odvetnika, ki stane 1000€. Slednji strošek je skupen za vse, ki ga najamejo. Modelirajte to kot koalicijsko igro, pri čemer koalicija vedno izbere ugodnejšo možnost – ali najamejo odvetnika ali pa plačajo račune. Kako naj si v skladu s Shapleyjevimi vrednostmi razdelijo stroške odvetnika?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

Izpit iz teorije iger

Finančna matematika

26. junij 2017

1. Pet študentov piše izpit. Vsak lahko piše hitro ali pa počasi. Če vsaj trije pišejo počasi, asistent podaljša čas pisanja. V spodnji tabeli je prikazano, koliko naredi študent v posamezni situaciji:

	ne podaljša	podaljša
hitro	70%	100%
počasi	65%	95%

- a) Poiščite vsa čista Nasheva ravnovesja.
b) Ali obstaja kakšno mešano Nashevo ravnovesje?
Namig: iščite med simetričnimi ravnovesji.

2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Igra je v vsakem stanju z enako verjetnostjo. Prvi igralec ve le, ali igra je ali ni v stanju ω_1 , drugi pa sploh ne ve, v katerem stanju je igra. Prvi igralec lahko igra potezo A , B ali C , drugi pa potezo L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	5, 2	4, 3	5, 7	7, 9	9, 9	1, 8
B	7, 14	0, 6	8, 8	3, 6	6, 7	7, 9
C	3, 11	6, 3	7, 0	5, 1	8, 1	6, 2

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Alfred in Bernard sta našla tri enake zlatnike in se odpravila k Cenetu, da jima jih pomaga razdeliti. Cene najprej veli Alfredu, naj ponudi Bernardu vsaj en zlatnik. Bernard lahko ponudbo sprejme ali zavrne. Če sprejme, dobi ponujeno število zlatnikov, preostanek pa dobi Alfred. Če pa zavrne, Cene vzame en zlatnik in veli Bernardu, naj Alfredu ponudi vsaj en zlatnik. Alfred lahko sprejme ali zavrne. Če sprejme, si ustrezno razdelita dva zlatnika, če pa zavrne, Cene spet vzame en zlatnik, preostali zlatnik pa dobi Bernard. Privzamemo, da Alfred in Bernard vnaprej vesta, kako bo ravnal 'arbiter' Cene.

Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.

4. Dana je naslednja funkcija na podmnožicah množice $\{1, 2, 3\}$:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 1, \quad v(\{2\}) = 2, \quad v(\{3\}) = 4, \\ v(\{1, 2\}) = a, \quad v(\{1, 3\}) = a, \quad v(\{2, 3\}) = a, \quad v(\{1, 2, 3\}) = 12.$$

Za katere a je ta funkcija superaditivna? Za najmanjši tak a skicirajte imputacije in jedro pripadajoče koalicijske igre.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

Izpit iz teorije iger

Finančna matematika

22. avgust 2017

1. Dana je igra za tri igralce, ki neodvisno drug od drugega izberejo nekaj števil od 0 do 9 po naslednjem postopku. Najprej se vsak igralec sam odloči, koliko števil bo izbral. Potem računalnik za vsakega igralca naključno izbere podmnožico zahtevane moči, tako da so vse kombinacije, ki ustrezajo zahtevam, enako verjetne. Če je določena številka izbrana dvakrat, nihče ne dobi nič, sicer pa vsak igralec dobi toliko evrov, kolikor števil je izbral.

Poglejmo primer. Če igralka Ana izbere moč 1, Bojan moč 2 in Ciril moč 4, bo računalnik za Ano izbral neko množico A moči 1, za Bojana neko množico B moči 2 in za Cirila neko množico C moči 4. Vsaka množica vsebuje števila od 0 do 9, porazdelitev posamezne množice je enakomerna med množicami zahtevane moči in izbrane množice so med seboj neodvisne. Če so vsa števila v A , B in C različna, Ana dobi en evro, Bojan 2 evra in Ciril 4 evre. V nasprotnem primeru, ko se neko število pojavi vsaj dvakrat, nihče ne dobi nič.

Vsak igralec želi maksimizirati pričakovani dobiček. Določite vsa čista simetrična Nasheva ravnovesja igre, pri katerih vsi igralci izberejo isto število števil.

Opomba: slučajne izbire tu niso mešane strategije – razumemo jih kot akcije same po sebi. Igralec namreč določi fiksno število števil, ki jih bo izbral – ne predvidevamo, da recimo z določeno verjetnostjo izbere dve, z določeno pa tri številke.

2. Dana je Bayesova igra za dva igralca, v kateri ima stanje sistema dve komponenti: prva je lahko α ali β , druga pa γ ali δ . Verjetnosti posameznih stanj so podane v naslednji tabeli:

	γ	δ
α	1/3	1/6
β	1/6	1/3

Prvi igralec ve, v katerem stanju je prva komponenta, drugi igralec pa, v katerem stanju je druga komponenta. Prvi igralec ima na voljo akciji T in B , drugi pa L in R . Koristi obeh igralcev glede na stanje in akciji so prikazane v spodnji tabeli:

		γ		δ		
		L	R	L	R	
α	T	3, 7	4, 0	T	1, 1	2, 3
	B	2, 4	5, 2	B	4, 6	5, 1
β	T	10, 7	1, 2	T	1, 1	1, 3
	B	0, 1	6, 8	B	3, 2	6, 4

Poiščite mešana Bayes–Nasheva ravnovesja te igre.

Namig: začnite s prvim igralcem, ki prejme signal, da je prva komponenta enaka α .

O B R N I T E !

3. Država A uvažuje določeno luksuzno blago iz države B ; to je za državo A tudi edini vir tega blaga. Za to blago pa si država A vzame davek (carino) po stopnji ρ : za vsak znesek a , ki ga država B dobi za to blago, ko ga izvozi, si država A vzame znesek ρa , tako da tržna cena za porabnike v državi A znaša $(1 + \rho)a$. Znano je, da obdavčitev ni več kot 50-odstotna.

Če država A uvozi količino q tega blaga, tržna cena na enoto blaga (z vključenim davkom) znaša $(1 + \rho)a$, država B pa ima s proizvodnjo enote tega blaga stroške $1/2$. To modeliramo kot ekstenzivno igro, v kateri se država B ravna po državi A : glede na razmere (davčno stopnjo) proizvede ustrezno količino blaga. Poiščite vgneždena Nasheva ravnovesja te igre.

4. Dana je naslednja funkcija na množicah:

$$\begin{aligned}v(\{1\}) &= 1, & v(\{2\}) &= 2, & v(\{3\}) &= 4, \\v(\{1, 2\}) &= 4, & v(\{1, 3\}) &= a, & v(\{2, 3\}) &= 6, \\v(\{1, 2, 3\}) &= 9.\end{aligned}$$

- a) Za katere a je ta funkcija superaditivna?
b) Za največji tak a poiščite Shapleyjeve vrednosti igralcev pripadajoče koalicijske igre.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

Izpit iz teorije iger

Finančna matematika

6. september 2017

- Amalija ponudi Bogdanu naslednjo igro: najprej vsak od njiju izbere številko 1, 2 ali 3, ne da bi vedela drug za drugega. Nato se dobro premeša kup 7 kart, med katerimi je natanko ena dama. Z vrha se odkrije toliko kart, kolikor je Amalijina številka. Če je med njimi dama, nihče ne plača nič. Sicer pa, če se Bogdanova številka ujema z Amalijino, Amalija Bogdanu plača 2 evra, če se ne ujema, pa mu plača 1 evro.
 - Poiščite mešana Nasheva ravnovesja te igre (za koristnost seveda vzamemo pričakovani dobiček). *Namig*: najprej poiščite ravnovesja, kjer vsi trije strogo mešajo. Je še kakšno mešano Nashevo ravnovesje?
 - Koliko bi bila poštena cena te igre?
- Bayesova igra za dva igralca ima stanja α in β . Prvi igralec pozna stanje igre, drugi pa ve le, da je igra v stanju α z verjetnostjo $1/3$ in v stanju β z verjetnostjo $2/3$. Dobitki pri posameznih stanjih in akcijah so prikazani spodaj:

	Stanje α :			Stanje β :			
	L	C	R	L	C	R	
T	3, 1	5, 9	4, 2	T	1, 6	4, 9	8, 8
M	4, 2	5, 8	4, 1	M	5, 6	3, 5	4, 2
B	7, 3	6, 0	5, 5	B	4, 3	5, 6	7, 5

Poiščite mešana Bayes–Nasheva ravnovesja igre.

- Dana je ekstenzivna igra, v kateri nastopajo organizator in dva igralca in poteka po naslednjih korakih:
 - Organizator izbere znesek $x > 0$.
 - Vsak od igralcev organizatorju plača znesek x .
 - Prvi igralec dobi bon za 60 evrov, drugi pa bon za 120 evrov.
 - Organizator igre odpre sklad, v katerem najprej ni nič denarja.
 - Vsak od igralcev, najprej prvi, nato drugi, izbira med dvema možnostma: ali svoj bon vnovči ali pa ga da v sklad. Če ga vnovči, mu organizator plača na njem napisani znesek, sklad pa izprazni. Če pa ga da v sklad, organizator tja vложи vrednost bona in primakne še $3x/2$ evrov.
 - Ves denar iz sklada se razdeli na enake dele med tiste, ki so svoj bon vložili vanj (torej ga bodisi dobi drugi igralec bodisi si ga oba razdelita na pol).

Poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja te igre.

O B R N I T E !

4. Dana je strateška igra:

	L	R
T	0, 3	6, 0
B	6, 1	4, 2

- a) Poiščite Nashevo rešitev pripadajoče dvofazne igre z zavezujočim sporazumom pri prenosljivi dobrini.
- b) Rešitev prejšnje igre vzemite za pogajalsko izhodišče v igri z enakimi akcijami in dobitki, le da dobrina ni prenosljiva. Zdaj pa privzemite, da je dobrina neprenosljiva. Poiščite Nashevo rešitev tako dobljenega modela pogajanja.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2015/16

1. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
20. november 2015

1. Za isti vir se poteguje $n \geq 2$ plemen. Če i -to pleme terja količino $q_i \geq 0$ tega vira, je njegov izkupiček enak:

$$u_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_i e^{-Q^2},$$

kjer je $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$. Določite vsa Nasheva ravnovesja in pokažite, da obstaja profil (q_1, \dots, q_n) , pri katerem vsako posamezno pleme dobi več, kot bi pri katerem koli Nashevem ravnovesju.

2. Pet igralcev igra igro, pri kateri vsak izbere črno ali belo barvo. Če vsi izberejo isto, nihče ne plača nič. Če eden izbere eno barvo, ostali štirje pa drugo, tisti eden dobi 4 evre, tisti štirje pa plačajo vsak po en evro. Če pa dva izbereta eno barvo in trije drugo, tista dva plačata vsak po 3 evre, tisti trije pa dobijo vsak po 2 evra. Poiščite čista in simetrična mešana Nasheva ravnovesja.

Namig: pri simetričnih Nashevih ravnovesjih parametrizirajte tako, da posamezen igralec izbere črno z verjetnostjo $\frac{1}{2} + t$ in belo z verjetnostjo $\frac{1}{2} - t$.

3. Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	L	R
T	$a, 3$	$3, 1$
B	$3, 0$	$2, 7$

v odvisnosti od parametra a .

4. Določite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y	Z
A	$2, 4$	$7, 1$	$2, 3$
B	$7, 5$	$2, 2$	$4, 1$
C	$6, 1$	$5, 6$	$6, 2$

Namig: dominacije.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ TEORIJE IGER

Finančna matematika
29. januar 2016

1. Določite vrednost matrične igre $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec ve, v katerem stanju je igra, drugi igralec pa ne dobi nobene informacije o stanju, pač pa verjame v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/2$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	5, 4	4, 0	0, 0	0, 0	9, 0	1, 4
B	4, 0	3, 4	0, 0	0, 0	3, 4	5, 0

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Leon in Mirko igrata naslednjo igro s tremi kartami – fantom, damo in kraljem: najprej Leon da Mirku damo ali kralja, nakar eno izmed preostalih dveh kart odloži na mizo z licem navzdol, eno pa obdrži zase. Nato Mirko odloži svojo karto bodisi z licem navzgor bodisi z licem navzdol. Če jo odloži z licem navzgor, je igre konec, sicer pa še Leon odloži svojo karto bodisi z licem navzgor bodisi navzdol.

Če eden od igralcev zaključi igro tako, da odloži karto z licem navzgor, le-ta dobi vrednost odložene karte, drugi igralec pa dobi 60% skupne vrednosti kart, ki so na mizi z licem navzdol. Sicer pa vsak od igralcev dobi po 30% skupne vrednosti kart, ki so na mizi z licem navzdol. Fant ima vrednost 15, dama 20, kralj pa 25.

- Modelirajte to kot ekstenzivno igro z nepopolno informacijo, a popolnim priklicem, in sicer tako, da prva poteza pove le to, katero karto je Leon dal Mirku. Upoštevajte, da so karte z licem navzdol videti vse enako.
- Poiščite vgnezdena behavioristično mešana Nasheva ravnovesja.
- Če Mirko igra racionalno, ali je Leonu zagotovljena vrednost karte, ki jo v drugi potezi obdrži zase?

4. Dana je koalicijska igra, v kateri so udeleženi ena ženska in dva moška. V igri lahko kvečjemu pridobijo, a posamezen igralec ne more iztržiti ničesar. Dva moška lahko iztržita skupaj dve enoti, moški in ženska skupaj tri enote, vsi trije pa skupaj a enot.

- Katere vrednosti parametra a so smiselne za to koalicijsko igro?
- Pri katerih vrednostih a je igra brez jedra?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

Izpit iz teorije iger

Finančna matematika

5. februar 2016

- 100 proizvajalcev se odloča, ali dati na trg dober ali slab izdelek. Če je na trgu d dobrih in s slabih izdelkov ($d + s = 100$), zaslužek posameznega proizvajalca od dobrega izdelka znaša $1/(100 + d)$, zaslužek od slabega pa $2/(100 + 3s)$. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.
- Dva proizvajalca se odločata, ali iti na trg s polno proizvodnjo ali pa sploh ne. Če gre na trg le eden izmed njiju, tržna cena izdelka znaša 10 evrov, če gresta na trg oba, pa 6 evrov. Prvi proizvajalec ima znane proizvodne stroške 7 evrov na izdelek, za drugega pa se ne ve, ali znašajo 5 ali pa 8 evrov na izdelek. Prvi proizvajalec misli, da proizvodni stroški drugega z verjetnostjo $1/4$ znašajo 5 evrov, z verjetnostjo $3/4$ pa 8 evrov na izdelek. Modelirajte to kot Bayesovo igro in poiščite mešana Bayesova ravnovesja.
- Naj bo $x \geq 0$. Andreja organizira naslednjo igro za Bojana in Cirila: najprej Bojan in Ciril Andreji plačata vsak znesek x . V zameno za to dobi Bojan bon za 60, Ciril pa za 90 evrov. Nato najprej Bojan in za njim še Ciril izbere med dvigom ali vložitvijo svojega bona. Kdor se odloči za dvig bona, dobi znesek z njegovo vrednostjo. Kdor pa se odloči za vložitev bona, dobi $2/3$ vrednosti vloženga bona, če je edini, ki je vložil, oziroma $1/3$ skupne vrednosti obeh bonov, če sta vložila oba; poleg tega pa vsakomur, ki se odloči za vložitev bona, Andreja doda še znesek $2x$.
 - Pri $x = 20$ modelirajte to kot ekstenzivno igro za Bojana in Cirila in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.
 - Modelirajte to še kot ekstenzivno igro za vse tri igralce, pri čemer naj bo x Andrejina poteza. Katere izbire poteze x so za Andrejo najugodnejše, če Bojan in Ciril igrata racionalno? Če je v okviru tega več možnosti za višini Andrejinih stroškov, privzamemo najvišjo možno vrednost.
- Strateški igri za dva igralca:

	X	Y	Z	U
G	3, 3	6, 3	8, 3	8, 2
D	7, 2	9, 6	7, 6	4, 4

priredimo dvofazno igro s prenosljivo dobrino in zavezujočim sporazumom. Poiščite mešana Nasheva ravnovesja pripadajoče matrične igre. Točk sporazuma ni potrebno iskati.

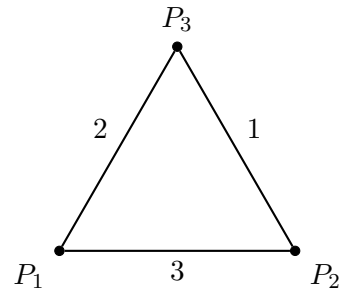
Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

Izpit iz teorije iger

Finančna matematika

17. junij 2016

1. Trije igralci igrajo igro, pri kateri hkrati izberejo barvo: vsak lahko izbere belo ali črno. Če dva igralca izbereta isto barvo, jima to prinese kazni v skladu z grafom na desni. Kazni se seštevajo. Poiščite čista Nasheva ravnovesja in še mešana Nasheva ravnovesja, pri katerih vsi igralci strogo mešajo.



2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Igra je v stanju ω_1 z verjetnostjo $1/2$, v vsakem od stanja ω_2 in ω_3 pa z verjetnostjo $1/4$. Prvi igralec ve le, ali igra je ali ni v stanju ω_1 , drugi pa točno ve, v katerem stanju je igra. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezih so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	0, 4	5, 5	1, 7	9, 2	5, 4	6, 2
B	2, 3	2, 6	7, 7	5, 9	3, 5	3, 4

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Dva igralca izmenoma lomita tablico kvadratkov velikosti 4×2 . Igralec, ki je na potezi, prelomi tablico na dvoje po vodoravni ali navpični črti ter enega izmed kosov vzame zase, drugega pa pusti. Ko ostane le še en kos, le-ta ostane igralcu, ki je na potezi, in igre je konec. Vsak kos ima svojo vrednost in te vrednosti so prikazane na sliki. Dobitek igralca je enak vsoti vrednosti kosov, ki jih je vzel. Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.

1	1
1	1
1	1
-1	1

4. Tri bližnja si mesta potrebujejo letališče. Mesto A potrebuje letališče za 240 milijonov, mesto B za 300 milijonov in mesto C za 420 milijonov dolarjev. Lahko zgradijo skupno letališče, lahko pa tudi vsako mesto zgradi svoje letališče ali pa dve mesti zgradita skupno letališče in tretje posebej. Privzamemo, da stroški ostanejo enaki, če letališče služi enemu, dvema ali pa trem mestom. Modelirajte to kot koalicijsko igro. Kako naj si mesta v skladu s Shapleyjevimi vrednostmi razdelijo stroške skupnega letališča?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2014/15

1. kolokvij iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
20. november 2014

1. Trgovec želi v neki mali državi prodati $b \geq 0$ enot blaga. Dobiček je uradno obdavčen po stopnji p – trgovec mora državi plačati delež p svojega dobička ($0 \leq p \leq 1$), če je le-ta pozitiven, če ima izgubo, pa ne plača nič. Davku pa se želi trgovec izogniti tako, da del blaga proda na črnem trgu, ki seveda ni obdavčen. V skladu z davčno stopnjo trgovec razporedi blago tako, da njegov *bruto* dobiček na legalnem trgu znaša $(1-p)^2(2\sqrt{b}-b)$, na črnem trgu pa $(2p-p^2)(\sqrt{b}-2b)$. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.
2. Določite, pri katerih vrednostih parametrov a, b, c, d, x, y, z je profil:

$$\left(\left(\begin{array}{cc} B & D \\ 2/3 & 1/3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} X & Y \\ 1/4 & 3/4 \end{array} \right) \right)$$

mešano Nashevo ravnovesje igre:

	X	Y	Z	
A	a, x	$5, 7$	$6, 4$	
B	$10, 1$	b, y	$4, 6$.
C	$d, 3$	$7, 0$	$c, 1$	
D	$4, 4$	$0, 3$	$4, z$	

3. Trije igralci hkrati vržejo vsak svoj kovanec. Če vsi trije vržejo enako, nihče ne plača nič. Če eden od igralcev vrže grb, druga dva pa cifro, ta dva tistemu, ki je vrgel grb, plačata vsak po en evro. Če pa eden od igralcev vrže cifro, druga dva pa grb, ta dva tistemu, ki je vrgel cifro, plačata vsak po dva evra. Poiščite vsa čista Nasheva ravnovesja te igre in še vsaj eno mešano, ki ni čisto.
4. Izračunajte vrednost matrične igre:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

2. kolokvij iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
30. januar 2015

1. Poiščite rešitev dvofazne igre z zavezujočim sporazumom in prenosljivo dobrino, ki izhaja iz strateške igre, prikazane na desni. Navedite tudi, koliko mora določen igralec na koncu plačati drugemu.

	L	R
T	3, 3	6, 4
B	2, 4	5, 1

2. Jožica, Karel, Liza in Maks se morajo prijaviti na določen projekt. To lahko storijo individualno ali pa v skupinah. Vsaka skupina, ki se prijavi, skupaj plača eno denarno enoto. Skupina, v kateri so vsaj trije ali pa Maks in vsaj še eden, dobi projekt in z njim nagrado v višini dveh denarnih enot. Modelirajte to kot koalicijsko igro in poiščite Shapleyjeve vrednosti. Je sporazum po Shapleyju v jedru igre?
3. Albin in Bernarda igrata igro s tremi kartami, ki imajo vrednosti 1, 2 in 3. Najprej se vse tri karte dobro premešajo in vsak dobi eno karto. Nato oba hkrati rečeta 'raste' ali pa 'pada'. Če oba rečeta isto, zmaga tisti, ki ima višjo karto, če pa rečeta drugače, zmaga tisti, ki ima nižjo karto. Obravnavajte to kot Bayesovo igro in poiščite vsa čista Bayesova ravnovesja, pri katerih oba ubereta isto strategijo.
4. Lojze oddaja stanovanje. Zna se zgoditi, da mu najemnik nekega dne sporoči, da ne more poravnati najemnine za tekoči mesec, obljubi pa mu, da bo naslednji mesec poravnal vse za nazaj. Najemnik pa je lahko pošten ali goljufiv. Pošteni najemnik tisti mesec res nima denarja in mu naslednji mesec zagotovo poravnava vse za nazaj. Goljufivi najemnik pa ima dve možnosti: bodisi da lastniku pošteno plača bodisi da se mu zlaže, da nima denarja. Če (goljufivi) najemnik pošteno plača, je konec igre in oba z lastnikom sta na ničli. Če pa (pošteni ali goljufivi) najemnik sporoči, da ne more plačati, se igra nadaljuje in v drugem koraku je na potezi lastnik, ki ima dve možnosti. Prva je, da najemnika takoj nažene iz stanovanja. V tem primeru imata oba z najemnikom eno enoto izgube. Druga možnost pa je, da ga pusti notri še en mesec. Če je najemnik pošten, bo plačal in bosta oba na ničli. Če pa je najemnik goljufiv, ne bo plačal in Lojze bo imel dve enoti izgube, najemnik pa dve enoti dobička, saj je že predvidel, kam bo šel. Privzemimo, da je najemnik pošten z verjetnostjo $1/3$ in goljufiv z verjetnostjo $2/3$. Modelirajte to kot randomizirano ekstenzivno igro z nepopolno informacijo. Če pošteni ali goljufivi najemnik v določenem poteku igre ni udeležen, mu pripisite ničlo. Nato zapišite pripadajočo strateško igro in poiščite klasična mešana Nasheva ravnovesja te igre.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
10. februar 2015

1. V regiji je šest držav, vse ustvarjajo enako dodano vrednost. Vsaka država določi stopnjo davka na dodano vrednost, in sicer 5% ali 18%. A če država predpiše višjo davčno stopnjo in vsaj še katera druga država predpiše nižjo davčno stopnjo, se polovica dodane vrednosti v enakih deležih preusmeri v države z nižjo davčno stopnjo, tako da one poberejo davek. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.

2. Izračunajte vrednost matrične igre $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 , drugega pa od stanj ω_2 in ω_3 . Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 , drugega pa od stanj ω_1 in ω_3 . Znanе so apriorne verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobički pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	3, 8	4, 1	0, 3	3, 2	3, 0	9, 3
B	1, 0	5, 3	3, 5	5, 3	0, 2	6, 5

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja. *Namig:* pomagajte si z dominacijami.

4. Podjetje A vstopi na trg z določeno panogo, pri tem pa ima lahko visoke ali nizke stroške. Podjetje B vzame na znanje vstop podjetja A na trg, ne pozna pa njegovih stroškov; ve pa se, da ima podjetje A z verjetnostjo $1/2$ visoke in z verjetnostjo $1/2$ nizke stroške.

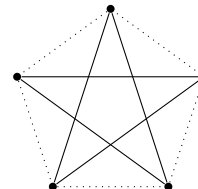
		dobiček			
		visoki stroški		nizki stroški	
		A	B	A	B
B vstopi takoj	A oglašuje	0	2	6	-2
	A ne oglašuje	1	4	5	-1
B vstopi čez eno leto		0	5	7	-1
B sploh ne vstopi		6	0	10	0

Podjetje B razmišlja o vstopu na trg takoj za podjetjem A , čez eno leto ali pa sploh ne. Nadalje, če se podjetje B odloči, da vstopi na trg takoj, podjetje A razmisli o oglaševanju: lahko se odloči, da oglašuje, lahko pa, da ne oglašuje. Dobički za vse primere so prikazani v zgornji tabeli. Modelirajte to kot randomizirano ekstenzivno igro z nepopolno informacijo, a popolnim priklicem. Nato zapišite pripadajočo strateško igro in poiščite vgnezdena behavioristično mešana Nasheva ravnovesja.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
22. junij 2015

1. Stara judovska šala, ki pojasnjuje razliko med nebesi in peklom: okoli mize sedi skupina lačnih ljudi, na mizi pa je kotel z juho. Vsak človek ima žlico, s katero lahko zajame juho, a žlica je predolga, da bi si lahko juho odnesel v usta. Človek se lahko odloči, da bo nahranil koga drugega, lahko pa se tudi odloči, da ne bo nahranil nikogar.



Šalo na stran: recimo, da okoli mize sedi pet ljudi in vsak lahko nahrani le tistega, ki mu sedi levo ali pa desno nasproti (v skladu z neprekinjenimi črtami na sliki). Vsak ima na voljo tri možnosti: ali nahrani levega, desnega ali pa nikogar. Hrana sama prinese vsakemu, ki jo dobi, korist 1. Kdor koga nahrani, mora za to vložiti napor a . Kdor je nahranjen, pa da tistemu ali tistima dvema, ki sta ga nahranila, nagrado b : če sta ga nahranila dva, da vsakemu $b/2$.

Poiščite potreben in zadosten pogoj za to, da smo v:

- čistem Nashevem ravnovesju, če vsak nahrani tistega, ki mu sedi desno nasproti;
 - mešanem Nashevem ravnovesju, če vsak z verjetnostjo $1/2$ nahrani tistega, ki mu sedi levo, z verjetnostjo $1/2$ pa tistega, ki mu sedi desno nasproti.
2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Igra je v vsakem od stanj z verjetnostjo $1/3$. Toda prvi igralec ve, ali igra je ali ni v stanju ω_1 , drugi igralec pa ve, ali igra je ali ni v stanju ω_2 . Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	1, 2	3, 3	0, 0	8, 6	2, 4	9, 1
B	5, 1	4, 3	5, 4	1, 0	3, 5	0, 1

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Dva igralca lomita tablico čokolade, ki je sprva velikosti 3×3 . Košček v enem izmed kotov je označen. Igralec, ki je na potezi, mora odlomiti nekaj vrstic ali pa stolpcev, a brez označenega koščka; ne sme pustiti tako, kot je. Izgubi igralec, ki mu je preostala označeni košček. Narišite drevo pripadajoče ekstenzivne igre in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja. Koliko jih je?
4. Pekarna nujno potrebuje peka in prodajalca – brez njiju ni zaslužka. Če sta samo ona dva, ima pekarna zaslužek 100 enot. Prav pa pridejo tudi do trije pomočniki – vsak od njih poveča zaslužek za 20 enot. Modelirajte to kot koalicijsko igro in poiščite Shapleyjeve vrednosti vseh udeležencev.

2013/14

1. kolokvij iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
22. november 2013

1. Dana je strateška igra za dva igralca, kjer ima prvi igralec na voljo akciji L in R , akcije drugega pa tvorijo interval $[0, 3]$. Preferenčni funkciji sta enaki:

$$\begin{aligned}u_1(L, a) &= 3a, & u_1(R, a) &= a + 2, \\u_2(L, a) &= 3 + 2a - a^2, & u_2(R, a) &= a^2 - 4a + 4.\end{aligned}$$

Določite čista Nasheva ravnovesja igre.

2. Dana je dražba prve cene, kar pomeni, da predmet dobi tisti kupec, ki ponudi največ, in sicer po točno tisti ceni, ki jo ponudi. Če isto najvišjo ceno ponudi več kupcev, vsak od njih dobi predmet z enako verjetnostjo. Poleg tega pa morajo biti ponudbe večkratniki zneska 100 evrov.

Dražbe se udeleži 10 kupcev. Prvemu je predmet vreden 1015 evrov, ostalim pa 999 evrov. Poiščite vsa čista Nasheva ravnovesja igre. Če je odločitev o dobitniku dražbe slučajna, gledamo pričakovano vrednost.

Namig: najprej razmislite, koliko lahko v Nashevem ravnovesju znaša najvišja ponudba in koliko kupcev si jo lahko deli. Nato pa isto razmislite še za drugo najvišjo ponudbo.

3. Določite, pri katerih vrednostih parametrov a , b in c ima igra:

	X	Y	Z
A	1, 2	5, 1	1, $b + 3$
B	2, 5	3, 10	7, b
C	1, 9	2, c	a , $b - 3$

mešano Nashevo ravnovesje, pri katerem prvi igralec meša A z verjetnostjo $2/3$ in B z verjetnostjo $1/3$. To ravnovesje tudi določite.

4. Alfred in Bernard igrata igro, pri kateri oba hkrati izbereta naravno število od 1 do n . Če oba izbereta enako, Bernard plača Alfredu en evro. Če Bernard izbere število, ki je za eno večje od Alfredovega, Alfred Bernardu plača en evro. Sicer nihče ne plača nič.
- Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre, v katerih oba igralca strogo mešata vse akcije.
 - Ali obstaja kakšno mešano Nashevo ravnovesje, kjer kateri od igralcev kakšne akcije ne meša?

2. kolokvij in izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
28. januar 2014

1. Izračunajte vrednost matrične igre:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 2 \\ 11 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Dana je igra s šestimi kartami, kjer je na dveh kartah narisani kamen, na dveh kartah škarje in na dveh kartah papir. Igra igrata dva igralca, ki najprej iz dobro premešanega kupa teh šestih kart vzameta vsak po dve karti. Nato hkrati vržeta vsak eno od kart, ki ju imata. Kamen premaga škarje, škarje premagajo papir, papir pa premaga kamen. Če karta katerega igralca premaga drugo, zmagovalec dobi eno točko, poraženec pa nič. Sicer oba dobita pol točke.

Modelirajte to kot Bayesovo igro. Posebej natančno opišite stanja, signale in strategije. Nato dokažite, da ima igra vsaj eno čisto Bayesovo ravnovesje: opišite ustrezni profil ter izračunajte koristnostne funkcije igralcev s signali in jih primerjajte z vrednostmi, ki jih dobijo, če zamenjajo akcijo iz opisanega profila.

3. Dana je naslednja različica *Stackelbergovega modela duopola*: najprej prvi proizvajalec proizvede količino q_1 določenega blaga, nakar drugi proizvajalec to opazi in sam proizvede količino q_2 istega blaga. Oba gresta nato s tem blagom hkrati na trg, kjer ga prodana po ceni $(5 - q_1 - q_2)_+$ na enoto blaga. Privzamemo, da so stroški proizvodnje na enoto blaga enaki kar 1 in da lahko proizvajalca proizvedeta le nenegativno celoštevilsko količino blaga: $0, 1, 2, \dots$. Poiščite vgnezdene Nashove ravnovesja te različice modela duopola. Je bolje biti prvi ali drugi proizvajalec?
4. Adrijan, Brigita, Cveto, Damjana, Erik in Fedora igrajo koalicijsko igro, v kateri je vrednost koalicije enaka številu igralcev, če je res, da je notri Adrijan, in je hkrati res, da je notri Brigita ali Cveto. Sicer je vrednost koalicije enaka nič. Izračunajte Shapleyjeve vrednosti za vse igralce.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
10. februar 2014

1. Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y
T	1, 2, 3	1, 1, 3
B	1, 1, 4	0, 2, 2

$a_3 = L$

	X	Y
T	1, 2, 4	1, 3, 1
B	0, 4, 2	1, 2, 3

$a_3 = R$

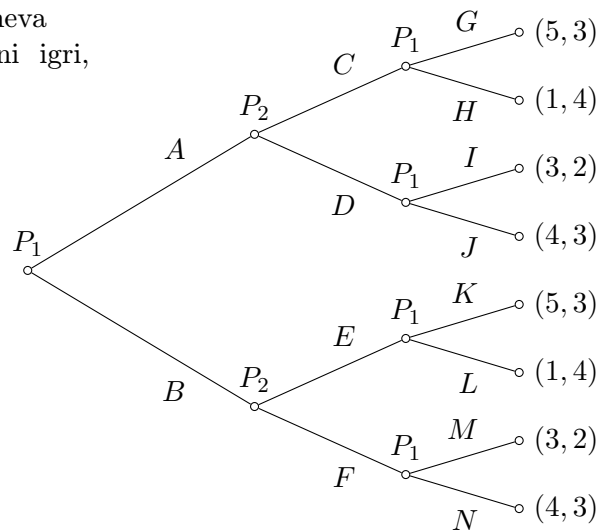
Namig: raziščite, kdaj se prvemu igralcu določene akcije ne splača igrati.

2. Dan je kup 6 kart, med katerima sta dva fanta, dva kralja in dva asa. Fant je vreden nič točk, kralj eno točko, as pa dve točki.

Dva igralca iz dobro premešanega kupa brez vračanja vzameta vsak eno karto. Nato se vsak odloči, ali bo karto vrgel ali ne. Če oba vržeta karto, igralec s karto nižje vrednosti plača nasprotniku razliko vrednosti obeh kart. Če eden karto vrže, drugi pa ne, tisti, ki je ni vrgel, plača nasprotniku vrednost svoje karte. Sicer nihče ne plača ničesar.

Modelirajte to kot Bayesovo igro. Ali obstaja kakšno čisto Bayesovo ravnovesje?

3. Poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja v ekstenzivni igri, prikazani na desni.



4. Koalicijska igra ima pet igralcev, tri moške in dve ženski. Vrednost koalicije je manjše od števila moških in žensk, ki jo sestavljajo. Z drugimi besedami, to je maksimalno število parov, ki jih lahko hkrati vsebuje koalicija: če ima koalicija dva moška in dve ženski, je njena vrednost 2, če ima tri moške in eno žensko, pa je njena vrednost 1. Določite jedro igre.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
20. maj 2014

1. Podjetje povabi k skupnemu projektu pet sodelavcev. Vsak sodelavec lahko prizadevno sodeluje, kar ga stane eno enoto, ali pa lenari, kar ga ne stane nič. Če je pri projektu p prizadevnih sodelavcev, le-ti ustvarijo dobiček v višini $15 \ln(1 + p)$. Dobiček si vseh pet sodelavcev razdeli na enake dele (ne glede na to, ali sodelujejo ali ne). Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja. Koliko jih je?
2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi iz vseh stanj isti signal in verjame, da je igra v vseh stanjih z enako verjetnostjo. Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_1 in ω_2 ter drugega od stanja ω_3 ; v prvem primeru verjame, da je igra v obeh stanjih z enako verjetnostjo. Dobitki pri posameznih stanjih in akcijah so prikazani spodaj:

Stanje ω_1 :			Stanje ω_2 :			Stanje ω_3 :		
	L	R		L	R		L	R
T	3, 5	1, 3	T	3, 1	5, 5	T	0, 3	9, 5
B	2, 2	2, 6	B	4, 6	4, 4	B	18, 7	0, 1

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Dana je igra za 30 igralcev, ki so drug za drugim na potezi (najprej prvi, nato drugi itd.). Ko je na potezi k -ti igralec, znaša nagradni sklad k denarnih enot. Igralec, ki je na potezi, ima dve možnosti. Prva je, da izstopi iz igre in pobere 10% nagradnega sklada, preostalih 90% pa si na enake dele razdelijo soigralci, ki so že bili na potezi (ko je na potezi prvi igralec, z izstopom iz igre dobi le desetino denarne enote, preostalih 9/10 pa zadrži organizator igre). Druga možnost pa je, da igro nadaljuje in je na potezi naslednji igralec. Zadnji igralec nima možnosti izbire - pobere 3 denarne enote, preostanek pa si razdelijo soigralci. Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.
4. Podjetje, ki postane nelikvidno, ima dve banki upnici. Vsaka od upnic lahko sodišču predlaga stečaj ali prestrukturiranje. V primeru stečaja prva banka dobi 2 enoti, druga pa 6 enot. V primeru prestrukturiranja pa prva banka dobi 8 enot in druga 3 enote.
Če obe banki sodišču predlagata isto rešitev, le-to podpre tudi sodišče. Če pa predlagata nasprotni rešitvi, sodišče z verjetnostjo $2/3$ odloči v prid prvi banki, z verjetnostjo $1/3$ pa v prid drugi banki.

Banki se dogovorita za sporazumni predlog sodišču, pri čemer ena od bank drugi plača kompenzacijo (ki ni omejena). Sporazum predvidevata že od začetka: nobena od bank ne dvomi v to, da se jima bo na koncu uspelo sporazumeti. Modelirajte to kot Nashev model pogajanja ter poiščite točko status quo in Nashevo rešitev. Za koristnost štejte pričakovani dobiček.

Izpit iz teorije iger

(z manjšim popravkom)

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
29. avgust 2014

1. Dana je igra za štiri igralce, v kateri ima vsak dve možni akciji, A in B . V tabeli na desni je prikazan dobiček posameznega igralca glede na akcijo, ki jo igra, če $4 - k$ igralcev igra akcijo A , k igralcev pa akcijo B .

k	A	B
0	6	—
1	4	5
2	2	3
3	0	4
4	—	8

- a) Poiščite vsa čista Nasheva ravnovesja.
- b) Kako bi ugotovili, ali obstaja kakšno mešano Nashevo ravnovesje, kjer vsi igralci igrajo B z isto verjetnostjo, ki ni 0 ali 1? Zapišite ustrezno enačbo.

2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 in drugega od stanj ω_2 in ω_3 ; v slednjem primeru verjame, da je igra v stanju ω_2 s pogojno verjetnostjo $2/3$ in v stanju ω_3 s pogojno verjetnostjo $1/3$. Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 in drugega od stanj ω_1 in ω_3 ; v slednjem primeru verjame, da je igra v vsakem od stanj ω_1 in ω_3 s pogojno verjetnostjo $1/2$. Dobitki pri posameznih stanjih in akcijah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :			
	L	D	L	D	L	D		
A	4, 6	3, 5	A	2, 1	6, 3	A	0, 2	3, 1
B	0, 0	4, 3	B	5, 3	5, 4	B	5, 4	8, 3
C	5, 2	4, 1	C	0, 4	2, 5	C	8, 6	8, 5

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Dana je naslednja različica *Stackelbergovega modela duopola*: najprej prvi proizvajalec proizvede količino $q_1 > 0$ določenega blaga, nakar drugi proizvajalec to opazi in sam proizvede količino $q_2 \geq 0$ istega blaga. Oba gresta nato s tem blagom hkrati na trg, kjer ga prodata po ceni $1/(q_1 + q_2)$ na enoto blaga. Privzamemo, da so stroški proizvodnje na enoto blaga enaki 1. Poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja te različice modela duopola. Je bolje biti prvi ali drugi proizvajalec?
4. Študentke Adelina, Brigita, Cvetka in Dragica se nameravajo vpisati na tečaj joge. Na voljo sta dva ponudnika. Prvi računa 80 evrov na osebo ne glede na to, koliko se jih naenkrat prijavi. Drugi pa pri skupini tečajnikov računa 120 evrov za prvega in 60 evrov za vsakega nadaljnjega.

Adelina je pri prvem ponudniku že vplačala 8 evrov predujma, ki ga, če se premisli, ne more več dobiti nazaj. Druge kolegice še niso vplačale ničesar. Modelirajte to kot koalicijsko igro in določite, koliko mora glede na Shapleyjeve vrednosti (še) plačati posamezna študentka, če se odločijo za rešitev, ki bo optimalna glede na skupne stroške.

2012/13

1. kolokvij iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
30. november 2012

1. Dana je strateška igra za dva igralca. Prvi igralec ima na voljo akcije A , B in C , drugi pa akcije iz intervala $[0, 1]$. Označimo akcijo drugega igralca s q . Tedaj sta preferenčni funkciji obeh igralcev podani v naslednji tabeli:

A	q ,	$1 + q$
B	$2 - 2q$,	$1 - q$
C	2 ,	$4q - 3q^2$

.

Poiščite čista Nasheva ravnovesja igre.

2. Danih je n proizvajalcev, ki si konkurirajo. Vsak vloži v marketing znesek $x_i > 0$. Označimo z d_i tržni delež i -tega posameznega proizvajalca. Le-ta je sorazmeren z višino zneska, ki ga vloži v marketing.

S prodajo izdelkov i -ti proizvajalec ustvari dobiček ad_i , kjer je $a > 0$. Pri tem so že odšteti proizvodni stroški, ne pa tudi stroški marketinga. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.

3. Določite, za katere vrednosti parametra a ima igra:

	X	Y	Z
A	$a, 3$	$4, 4$	$7, 0$
B	$2, 3$	$a, 2$	$6, 1$
C	$3, 2$	$5, 0$	$5, 3$

.

Nasheva ravnovesja, pri katerih prvi strogo meša vsaj dve akciji, drugi pa igra čisto strategijo. Taka Nasheva ravnovesja tudi določite.

4. Določite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y	Z	W
A	$1, 6$	$2, 7$	$2, 8$	$2, 9$
B	$3, 4$	$3, 8$	$1, 0$	$2, 5$
C	$2, 8$	$1, 4$	$4, 9$	$3, 6$

.

2. kolokvij in izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
21. januar 2013

1. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanj ω_1 in ω_2 , drug signal pa od stanja ω_3 . Drugi igralec dobi od vseh treh stanj isti signal. Oba igralca verjameta v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	6, 1	5, 1	3, 5	8, 0	1, 1	5, 10
B	4, 3	1, 7	4, 8	10, 0	2, 13	3, 2

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

2. Dana je ekstenzivna igra za dva igralca, ki sta izmenoma na potezi. Igralec, ki je na potezi, ima dve možnosti: lahko pobere 60% nagradnega sklada, nasprotnik pa dobi 40% in s tem je igre konec. Druga možnost pa je, da igralec reče naprej. Nagradni sklad sprva znaša 10 evrov in se vsakič, ko igralec na potezi reče naprej, poveča za 10 evrov. To traja, dokler sklad ne doseže 100 evrov. V tem primeru igralec, ki je na potezi, pobere 60, njegov nasprotnik pa 40 evrov in igre je konec. Narišite drevo igre in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.
3. Dana je igra za dva igralca, pri kateri lahko prvi igralec z verjetnostjo $2/3$ izbira med možnostjo, da mu drugi igralec plača 1 evro in je igre konec, in možnostjo, da miruje. Z verjetnostjo $1/3$ pa prvi igralec mora mirovati. Če je prvi igralec miroval, je na potezi drugi igralec, ki lahko pokaže rdečo ali modro karto. Če drugi igralec pokaže rdečo karto in je imel prvi prej možnost od njega zahtevati plačilo (a tega ni izkoristil), mora zdaj prvi drugemu plačati 2 evra; če pa prvi ni imel možnosti zahtevati plačila, drugi plača prvemu 2 evra. Obratno pa je, če drugi igralec pokaže modro karto: v tem primeru drugi plača prvemu 2 evra, če je imel slednji možnost zahtevati plačilo, in prvi plača drugemu 2 evra, če prvi ni imel možnosti zahtevati plačila. Drugi igralec, ko pride na potezo, ne ve, ali je imel prvi igralec možnost povleči potezo ali ne. Modelirajte to kot ekstenzivno igro z nepopolno informacijo in poiščite mešana Nasheva ravnovesja.

4. Strateški igri za dva igralca:

	L	D
A	6, 2	3, 3
B	2, 2	7, 3
C	5, 3	6, 3

prirejemo kooperativno igro s prenosljivo dobrino in sporazumom po Nashu. Poiščite točko nesporazuma, ki izhaja iz groženj, in določite, kako si igralca razdelita dobiček, če se sporazumeta.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
11. februar 2013

1. Družbeniki Aljaž, Bogdan in Ciril vlagajo v skupen projekt. Njihove prispevke označimo z a , b in c . Privzamemo $a, b, c \geq 0$. Projekt je uspešen, če je $a + b + c \geq M$: v tem primeru skupaj dobijo 6000 evrov, v nasprotnem primeru ne dobijo nič. Če je projekt uspešen, si dobiček razdelijo sorazmerno s prispevki.

Družbeniki pa pri prispevanju v projekt niso enako učinkoviti oz. gospodarni: Aljaž ima s stroške 2 evra na enoto prispevka, Bogdan 3 evre in Ciril 4 evre na enoto prispevka (če je torej Cirilov prispevek enak 100, ga to stane 400 evrov).

Modelirajte to kot strateško igro in poiščite največjo vrednost parametra M , pri kateri obstaja (čisto) Nashevo ravnovesje, kjer je projekt uspešen in imata natanko dva izmed njih strogo pozitiven prispevek. Poiščite vsaj eno tako Nashevo ravnovesje.

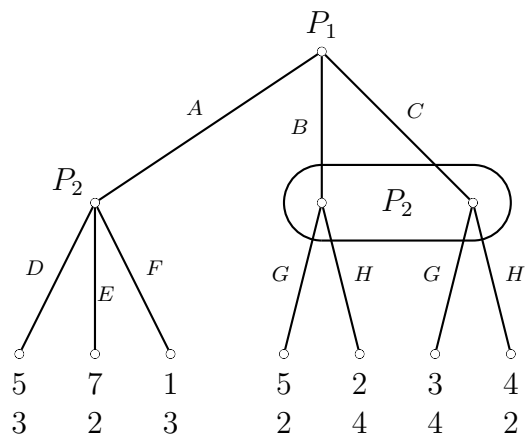
2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 in drugega od stanj ω_2 in ω_3 ; v slednjem primeru verjame, da je igra v stanju ω_2 s pogojno verjetnostjo $2/3$ in v stanju ω_3 s pogojno verjetnostjo $1/3$. Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 in drugega od stanj ω_1 in ω_3 ; v slednjem primeru verjame, da je igra v vsakem od stanj ω_1 in ω_3 s pogojno verjetnostjo $1/2$. Dobitki pri posameznih stanjih in akcijah so prikazani spodaj:

Stanje ω_1 :			Stanje ω_2 :			Stanje ω_3 :		
	L	D		L	D		L	D
A	4, 5	4, 4	A	2, 5	2, 4	A	8, 5	8, 2
B	0, 3	3, 2	B	5, 2	5, 3	B	5, 3	8, 6
C	5, 3	1, 4	C	3, 3	0, 2	C	6, 7	9, 2

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

OBRNI!

3. Poiščite čista vgnezdena Nashova ravnovesja naslednje ekstenzivne igre z nepopolno informacijo:



4. Dana je naslednja karakteristična funkcija:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 1, \quad v(\{2\}) = 2, \quad v(\{3\}) = 1, \\ v(\{1, 2\}) = a, \quad v(\{1, 3\}) = 3, \quad v(\{2, 3\}) = 4, \quad v(\{1, 2, 3\}) = 8.$$

Za katere a je ta funkcija superaditivna? Za najmanjši tak a skicirajte imputacije in jedro pripadajoče koalicijske igre.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
16. maj 2013

1. Dve firmi, ki proizvajata enake izdelke, tekmujeta na istem tržišču. Vsaka ima 120 enot kapitala, ki ga deloma porabi za razvoj, deloma pa za proizvodnjo. Iz vsake enote kapitala, ki se porabi za proizvodnjo, nastane ena enota izdelkov. Firmi dasta izdelke hkrati na trg. Če prva firma da q_1 enot, druga pa q_2 enot, se izdelki prodajo po ceni $240 - q_1 - q_2$ denarnih enot na enoto izdelkov.

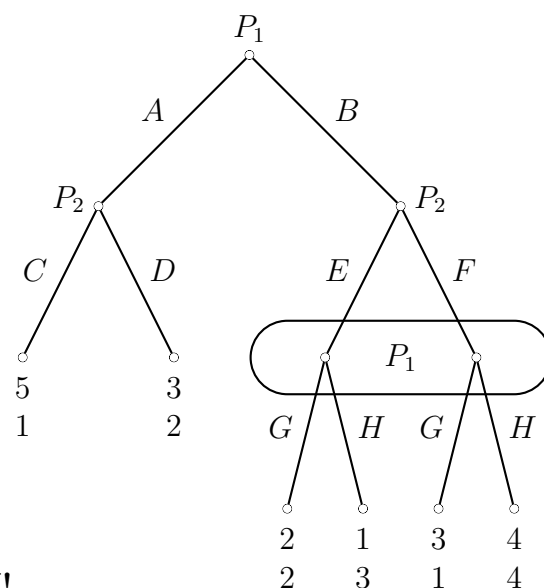
Če prva firma porabi za razvoj r_1 enot, znašajo stroški proizvodnje $60 - r_1/4$ na enoto izdelkov. Če pa druga firma porabi za razvoj r_2 enot, znašajo stroški proizvodnje $72 - 2r_2/5$ na enoto izdelkov. Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.

2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 in drugega od stanj ω_2 in ω_3 ; v slednjem primeru verjame, da je igra v stanju ω_2 s pogojno verjetnostjo $3/4$ in v stanju ω_3 s pogojno verjetnostjo $1/4$. Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 in drugega od stanj ω_1 in ω_3 ; v slednjem primeru verjame, da je igra v stanju ω_1 z verjetnostjo $1/3$ in v stanju ω_3 z verjetnostjo $2/3$. Dobitki pri posameznih stanjih in akcijah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :			Stanje ω_2 :			Stanje ω_3 :	
	L	R		L	R		L	R
T	2, 2	3, 5		2, 2	1, 1		1, 2	2, 8
B	1, 5	2, 8		2, 4	3, 2		2, 5	3, 2

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

3. Poiščite čista vgnazdana Nasheva ravnovesja naslednje ekstenzivne igre z nepopolno informacijo:



OBRNI!

4. Poiščite koalicijsko igro, ki ustreza strateški igri:

	L	R
T	1, 2	5, 3
M	4, 1	0, 6
B	3, 4	2, 0

in poiščite Shapleyjevi vrednosti dobljene igre.

2011/12

1. kolokvij iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
29. november 2011

1. Andraž, Brigita, Cveto, Darja in Edo gredo na *dražbo druge cene*, kjer pa so dovoljene le cene iz množice naravnih števil (brez ničle). Če natanko eden ponudi (strogo) najvišjo ceno, le-ta dobi dražbo in za predmet plača drugo najvišjo ceno, zvišano za 1 evro (to je smiselno, če dražitelj za ta znesek zvišuje ceno). V primeru, da najvišjo ceno ponudi več ponudnikov, gledamo verjetnostno: vsi imajo enako verjetnost, da dobijo predmet. Kdor dobi predmet, zanj plača natanko ceno, ki jo ponudi zanj. Za preferenčno funkcijo vzamemo *pričakovani* dobiček.

Andraž ceni predmet na 1 evro, Brigita na 2 evra, Cveto na 3 evre, Darja na 4 evre in Edo na 5 evrov.

- Določite kupce, za katere obstaja Nashevo ravnovesje, pri katerem zagotovo dobijo predmet dražbe.
- Določite kupce, za katere obstaja Nashevo ravnovesje, pri katerem imajo strogo pozitiven (pričakovani) dobiček.
- Poiščite vsa Nasheva ravnovesja, pri katerih Cveto zagotovo dobi predmet dražbe.

Gledamo zgolj *čista* Nasheva ravnovesja.

2. Poiščite vsa mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y	Z
A	4, 6	2, 5	3, 1
B	0, 0	2, 2	3, 4
C	3, 5	1, 8	2, 5

3. Poiščite mešana Nasheva ravnovesja igre:

	X	Y
A	$a, 6$	3, 5
B	2, 0	2, a

v odvisnosti od parametra a .

4. Izračunajte vrednost matrične igre:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 9 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. kolokvij in izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
26. januar 2012

1. Dva igralca dobita vsak po eno izmed treh možnih nagrad; nagradi, ki ju dobita, sta različni in izbrani na slepo. Vsak igralec ocenjuje vrednost nagrade po svoje – v spodnji tabeli so podane subjektivne vrednosti posameznih nagrad:

Nagrada	P_1	P_2
A	1	4
B	3	1
C	4	2

Po razdelitvi igralca lahko izmenjata svoji nagradi, če se oba s tem strinjata; pri tem pa posamezen igralec ve samo, katero nagrado je dobil on, ne pa tudi, katero nagrado je dobil drugi igralec.

- Modelirajte to kot Bayesovo igro.
 - Določite, do katerih menjav lahko pride v **čistih** Bayesovih ravnovesjih.
 - Ali obstaja **čisto** Bayesovo ravnovesje, pri katerem nikoli ne pride do menjave?
2. Dva kupca se potegujeta za določen predmet. Najprej da ponudbo prvi kupec. Nato lahko drugi kupec da večjo ponudbo ali pa odstopi. V prvem primeru dobi predmet po svoji ceni drugi kupec, v drugem primeru pa prvi kupec. Ponudbe morajo biti iz množice naravnih števil.

Recimo, da ima predmet za oba kupca vrednost 100. Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.

3. Dana je bimatrična igra z matrikama dobitkov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

ki jo gledamo kot kooperativno igro. Določite njeno rešitev (glede na sredinski sporazum) in točko nesporazuma.

4. Dana je funkcija:

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, & v(\{1\}) &= 1, & v(\{2\}) &= 2, & v(\{3\}) &= 1, \\ v(\{1, 2\}) &= 4, & v(\{1, 3\}) &= 3, & v(\{2, 3\}) &= t, & v(\{1, 2, 3\}) &= 6. \end{aligned}$$

- Določite vrednosti parametra t , pri katerih je v superaditivna.
- Za največji tak t narišite jedro in poiščite Shapleyjeve vrednosti ustrezne koalicijske igre.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
10. februar 2012

1. *Mora* je starodavna igra, ki se še danes igra zlasti v romanskem svetu (it. *morra*), znana pa je tudi v Istri. Bistvo igre je, da vsak od igralcev iztegne določeno število prstov in hkrati ugiba o skupnem številu iztegnjenih prstov.

Mora ima veliko različic. Tu bomo obravnavali različico za dva igralca, kjer vsak iztegne enega ali dva prsta in hkrati zakliče, koliko po njegovem znaša skupno število iztegnjenih prstov. Kdor ugane, dobi eno točko, če njegov nasprotnik ne ugane. Če ne ugane nobeden ali pa uganeta oba, nihče ne dobi nič.

Modelirajte to kot strateško igro: natančno opišite akcije in koristnostne funkcije. Nato poiščite vsaj eno mešano Nashevo ravnovesje.

2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 , drugega pa od stanj ω_2 in ω_3 . Drugi igralec pa dobi en signal od stanj ω_1 in ω_2 , drugega pa od stanja ω_3 . Na začetku oba igralca verjameta v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/2$. Prvi igralec lahko igra potezi *A* ali *B*, drugi pa potezi *L* ali *D*. Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	<i>L</i>	<i>D</i>	<i>L</i>	<i>D</i>	<i>L</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	3, 8	4, 1	3, 0	9, 3	0, 3	3, 2
<i>B</i>	1, 0	5, 3	0, 2	6, 5	3, 5	5, 3

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja. *Namig*: pomagajte si z dominacijami.

3. Dva igralca igrata karte. Vsaka karta ima svojo vrednost in vse vrednosti so različne. Najprej prvi igralec vrže eno karto. Nato drugi igralec vrže karto z višjo vrednostjo, če jo ima, nakar spet prvi igralec vrže karto s še višjo vrednostjo. Tako se izmenjujeta, dokler ne zmanjka kart. Tisti, ki je vrgel zadnji, dobi skupno vrednost vseh kart na kupu, nasprotnik pa ne dobi nič.

Recimo, da ima prvi igralec karte z vrednostmi 1, 3 in 5, drugi pa karte z vrednostmi 2, 4 in 6 (vsak pozna tudi nasprotnikove karte). Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.

4. Komisija ima 6 članov, eden izmed njih je predsednik. Pri sprejemanju sklepov, kjer glasujejo, velja, da je sklep sprejet, če zanj glasujejo vsaj štirje člani ali pa predsednik in še dva člana komisije.

Recimo, da ima komisija od nekega sprejetega sklepa korist, ki si jo razdelijo le tisti, ki so glasovali zanj (t. j. $v(S) = 1$, če je koalicija S dovolj močna, da lahko sama sprejme sklep, sicer pa je $v(S) = 0$). Poiščite Shapleyjeve vrednosti posameznih članov te komisije.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
6. julij 2012

1. Dan je Cournotov model duopola: dva proizvajalca proizvedeta določeno količino blaga, prvi proizvajalec q_1 , drugi pa q_2 . Ko ga dasta na trg, se to blago proda po ceni $36/(q_1 + q_2 + 1)$. Stroški proizvodnje so za prvega proizvajalca enaki $4q_1$, za drugega pa $3q_2 + c$, če je $q_2 > 0$, in 0, če je $q_2 = 0$. Seveda privzamemo, da je $q_1, q_2 \geq 0$ in $c \geq 0$. Obravnavajte čista Nasheva ravnovesja tega modela.

2. Naj bo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dokažite, da je vrednost matrične igre $\begin{bmatrix} 5 & a & b \\ a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix}$ enaka vrednosti matrične igre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

3. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi od vseh stanj isti signal in verjame v verjetnosti $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$. Drugi igralec pa popolnoma pozna stanje igre. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	5, 8	7, 1	3, 0	0, 3	2, 3	3, 2
B	3, 0	1, 3	0, 2	7, 5	1, 5	5, 3

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja.

4. Albert in Egon se potegujeta za torto. Najprej Albert ponudi Egonu kos torte, zase pa zadrži preostanek. Egon lahko sprejme ponujeni kos, v tem primeru ga seveda dobi, preostanek pa dobi Albert. Lahko pa Egon ponujeni kos zavrne: v tem primeru Egon ponujeni kos uniči in Albertu izpuli četrtno njegovega kosa. Modelirajte to kot ekstenzivno igro in poiščite vgnezdena Nasheva ravnovesja.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
30. avgust 2012

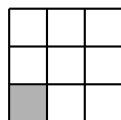
1. Iz spalnega naselja do poslovne četrti se mora vsak dan pripeljati v službo 5000 prebivalcev. Vsakemu je pomemben le čas potovanja: hitreje kot pride, bolje je. Vsak lahko izbere bodisi prevoz z osebnim avtomobilom bodisi prevoz z mestno železnico. Če z osebnim avtomobilom potuje x uslužbencev, je čas potovanja enak $25 + x/200$ minut. Nadalje, če z javnim prevozom potuje y uslužbencev, je čas potovanja enak $15 + y/200 + 12/v$ minut, kjer je v število vlakov, ki peljejo. Posamezen vlak sprejme 2000 uslužbencev, kar pomeni, da v primeru, ko vlak izbere od 1 do 2000 uslužbencev, pelje en vlak, če vlak izbere od 2001 do 4000 uslužbencev, peljeta dva vlaka, sicer pa peljejo trije vlaki.

Modelirajte to kot strateško igro in poiščite čista Nasheva ravnovesja.

2. Poiščite vrednost in vsa (mešana) Nasheva ravnovesja matrične igre $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$.

Namig: pomagajte si z dominacijami.

3. Dva igralca izmenoma lomita tablico kvadratkov velikosti 3×3 , ki ima en kvadratok v kotu označen. Igralec, ki je na potezi, prelomi tablico na dvoje po vodoravni ali navpični črti (glej sliko). Kos, ki ne vsebuje označenega kvadratika, je izločen iz igre, kos z označenim kvadratom pa dobi drugi igralec. Ko ostane le še označeni košček, je igre konec: zmaga tisti, ki je nazadnje lomil.



Modelirajte to kot ekstenzivno igro. Je bolje biti prvi ali drugi na potezi?

4. Kmet Ambrož ima odsluženega vola, ki je le še za zakol. V vasi sta dva mesarja, Boris in Cveto. Boris lahko od vola iztrži 90, Cveto pa 120 denarnih enot dobička. Glede na to, da Cveto iztrži več, je, če gledamo skupni dobiček, najbolj smiselno, da vola dobi on. A za koliko naj mu ga Ambrož proda? Si tudi Boris zasluži del dobička v zameno za izgubljeni posel?

Modelirajte to kot koalicijsko igro ter na zgornji dve vprašanji odgovorite s stališča jedra in s stališča Shapleyjevih vrednosti.

2010/11

1. kolokvij iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
14. april 2011

1. Dana je strateška igra za tri igralce, ki lahko izbirajo le med čistimi strategijami. Preferenčne funkcije so podane z naslednjimi tabelami:

Tretji igralec izbere C_1 : Tretji igralec izbere C_2 : Tretji igralec izbere C_3 :

	B_1	B_2
A_1	$3, a, b$	$1, 5, 4$
A_2	$2, 3, 5$	$2, 1, 3$

	B_1	B_2
A_1	$1, b, 1$	$a, 1, 3$
A_2	$3, 0, 3$	$2, 1, 1$

	B_1	B_2
A_1	$1, 0, 0$	$1, 1, a$
A_2	$2, 3, 0$	$2, 1, 1$

Določite Nasheva ravnovesja in raziščite, ali katera od strategij dominira drugo. Odgovor je seveda odvisen od parametrov a in b .

2. Poiščite Nasheva ravnovesja za modifikacijo Cournotovega modela duopola, kjer je, če proizvajalca proizvajata q_1 in q_2 določenega blaga, zaslužek i -tega enak:

$$u_i(q_1, q_2) = q_i \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c_i \right).$$

Privzamemo, da je $c_1, c_2 > 0$, in jemljemo le $q_1, q_2 > 0$.

3. Poiščite vsa mešana Nasheva ravnovesja igre za dva igralca s funkcijama koristnosti:

	X	Y	Z
A	$4, 1$	$0, 4$	$3, 1$
B	$3, 3$	$2, 1$	$7, 2$
C	$0, 5$	$3, 1$	$5, 3$

Namig: pomagajte si z dominacijo.

4. Poiščite nivo varnosti za prvega igralca pri naslednji igri:

	X	Y	Z
A	$3, ?$	$1, ?$	$2, ?$
B	$0, ?$	$4, ?$	$3, ?$

2. kolokvij in izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
13. junij 2011

1. Dana je igra s funkcijama koristnosti:

	L	M	R
A	$2, -1$	$4, 2$	$3, a$
B	$5, 5$	$1, -1$	$5, 2$
C	$b, 0$	$0, 0$	$c, -3$

Določite, za katere vrednosti parametrov a , b in c obstaja mešano Nashevo ravnovesje, pri katerem prvi igralec meša le A in B , drugi igralec pa le L in M . Določite to mešano Nashevo ravnovesje.

2. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec ve, v katerem stanju je igra, drugi igralec pa ne dobi nobene informacije o stanju, pač pa verjame v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

Stanje ω_1 :	Stanje ω_2 :	Stanje ω_3 :																											
<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">L</td><td style="text-align: center;">D</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">A</td><td style="text-align: center;">$3, 1$</td><td style="text-align: center;">$4, 2$</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">B</td><td style="text-align: center;">$2, 3$</td><td style="text-align: center;">$1, 4$</td></tr> </table>		L	D	A	$3, 1$	$4, 2$	B	$2, 3$	$1, 4$	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">L</td><td style="text-align: center;">D</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">A</td><td style="text-align: center;">$0, 2$</td><td style="text-align: center;">$4, 5$</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">B</td><td style="text-align: center;">$3, 4$</td><td style="text-align: center;">$1, -11$</td></tr> </table>		L	D	A	$0, 2$	$4, 5$	B	$3, 4$	$1, -11$	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">L</td><td style="text-align: center;">D</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">A</td><td style="text-align: center;">$0, 0$</td><td style="text-align: center;">$1, 1$</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">B</td><td style="text-align: center;">$2, 2$</td><td style="text-align: center;">$5, 3$</td></tr> </table>		L	D	A	$0, 0$	$1, 1$	B	$2, 2$	$5, 3$
	L	D																											
A	$3, 1$	$4, 2$																											
B	$2, 3$	$1, 4$																											
	L	D																											
A	$0, 2$	$4, 5$																											
B	$3, 4$	$1, -11$																											
	L	D																											
A	$0, 0$	$1, 1$																											
B	$2, 2$	$5, 3$																											

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre. *Namig:* pomagajte si z dominacijami.

3. Igralca si delita torto. Najprej prvi igralec razdeli torto na tri kose in enega izmed njih ponudi drugemu igralcu (dovoljeni so tudi "kosi" velikosti nič). Nato lahko drugi igralec ponudbo sprejme, v tem primeru dobi sprejeti kos, ali pa kos zavrne, v tem primeru ga ne dobi. Potem pa drugi igralec (ne glede na sprejetje ali zavrnitev kosa) na hitro zmakne še en kos izmed tistih dveh, ki mu nista bila ponujena. Kar ostane, dobi prvi igralec.

Poiščite vgnezdene Nasheve ravnovesja igre. Koliko dobi posamezen igralec, če igrata v skladu z njimi?

4. Kooperativna igra za tri igralce ima naslednjo karakteristično funkcijo:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 1, \quad v(\{3\}) = 1, \\ v(\{1, 2\}) = 2, \quad v(\{1, 3\}) = 1, \quad v(\{2, 3\}) = 2, \quad v(\{1, 2, 3\}) = a.$$

Določite Shapleyjeve vrednosti posameznih igralcev v odvisnosti od a .

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
13. junij 2011

1. [30] Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec dobi en signal od stanja ω_1 , drugega pa od stanj ω_2 in ω_3 . Drugi igralec pa dobi en signal od stanja ω_2 , drugega pa od stanj ω_1 in ω_3 . Na začetku oba igralca verjameta v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/2$. Prvi igralec lahko igra potezi A ali B , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	2, 0	3, 1	1, 1	1, 3	7, 0	1, 4
B	1, 5	0, 7	1, 2	1, 4	1, 3	4, 1

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre.

Namig: pomagajte si z dominacijami.

2. [30] Igralca igrata naslednjo igro: najprej prvi igralec izbere število $a \in [0, 1]$, nato pa drugi igralec izbere število $b \in [0, 1]$. Če a in b nista oba enaka nič, prvi igralec dobi znesek $\frac{a + 2b}{3(a + b)}$, drugi pa znesek $\frac{2a + b}{3(a + b)}$. Če pa sta a in b oba enaka nič, prvi igralec dobi znesek $p \in [0, 1]$, drugi igralec pa dobi znesek $1 - p$. Določite vgnezdene Nashove ravnovesja igre v odvisnosti od p (med drugim torej raziščite, za katere p le-ta sploh obstajajo).
3. [40] Amanda, Bojan in Ciril se odločajo, ali bodo sodelovali pri skupnem projektu, ki je izvedljiv, če sodeluje Amanda in vsaj še eden od igralcev. Če se skupni projekt izvede, si igralci, ki pri njem sodelujejo, razdelijo 120 evrov. Vsak igralec, ki ne dela pri skupnem projektu, pa dobi 50 evrov (in če se skupni projekt ne izvede, prav tako vsak dobi po 50 evrov).
- [20] Zapišite to kot strateško igro in poiščite čista Nashova ravnovesja.
 - [20] Zapišite koalicijsko igro, ki pripada strateški igri iz prejšnje točke, t. j. izračunajte karakteristično funkcijo, in izračunajte Shapleyjeve vrednosti igralcev.

Izpit iz teorije iger

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij
30. avgust 2011

1. Dva proizvajalca proizvajata isto blago, katerega proizvodnjo lahko poljubno prilagajata trgu. Vsak nastavi svojo ceno enote blaga. Trg je pripravljen kupiti $\max\{b - m, 0\}$ blaga, kjer je $b > 0$, m pa višja od cen. Kupci izbirajo proizvajalca na slepo. Modelirajte to kot strateško igro s funkcijami preferenc in določite vsa Nasheva ravnovesja.

2. Dana je matrična igra $\begin{bmatrix} 4 & 1 & a \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Določite, za katere vrednosti parametra a kakšna konveksna kombinacij dveh vrstic dominira preostalo vrstico. Za najmanjšo tako vrednost poiščite nivo varnosti za prvega igralca.

3. Bayesova igra za dva igralca ima tri stanja, ω_1 , ω_2 in ω_3 . Prvi igralec ne ve, v katerem stanju je igra, in verjame v verjetnosti stanj $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/4$, medtem ko drugi igralec pozna stanje igre. Prvi igralec lahko igra poteze A , B ali C , drugi pa potezi L ali D . Dobitki pri posameznih stanjih in potezah so prikazani spodaj:

	Stanje ω_1 :		Stanje ω_2 :		Stanje ω_3 :	
	L	D	L	D	L	D
A	2, 2	4, 3	4, 1	1, 2	2, 1	2, 0
B	6, 3	0, 4	3, 5	3, 4	8, 2	0, 1
C	5, 6	5, 7	2, 0	0, 7	1, 4	0, 0

Poiščite mešana Bayesova ravnovesja igre. *Namig*: pomagajte si z dominacijami.

4. Študent Aljaž je v Ljubljani najel stanovanje, ki ga ta hip, ko v njem živi sam, stane 650€ na mesec, zato išče sostanovalce. Stanovanje je primerno za največ tri osebe, vsak dodatni sostanovalec pa poveča stroške za 50€. Aljažu se oglasita dva interesenta, ki se dnevno vozita iz oddaljenih krajev: Bojan, ki ga vožnja stane 200€, in Cveto, ki ga stane 300€ na mesec (če smo natančni, pri obeh gledamo razliko med cenami vsakodnevnih voženj, če ne se preseli v Ljubljano, in cenami občasnih voženj, če se preseli v Ljubljano)
 - a) Formulirajte to kot igro v koalicijski obliki in preverite superaditivnost (za karakteristično funkcijo vzemite negativno predznačene skupne stroške bivanja oz. dodatnih voženj, ki jih imajo študentje v koaliciji).
 - b) Kako naj si v skladu Shapleyjevimi vrednostmi razdelijo stroške, če se Bojan in Cveto priselita k Aljažu?