REŠENE NALOGE IZ SLUČAJNIH PROCESOV

Martin Raič

RAIČ, Martin
Rešene naloge iz slučajnih procesov

© 2015 Martin Raič
Samozaložil avtor.
Prva izdaja
Ljubljana, 2015
Elektronska knjiga, dostopna na
`http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~raicm/Poucevanje/SPI/SPI_vaje_2015.pdf`
ISBN 978-961-283-343-5 (pdf)

CIP – kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

519.21(076.2)(0.034.2)

RAIČ, Martin
Rešene naloge iz slučajnih procesov [Elektronski vir] / Martin Raič – 1. izd. – El. knjiga. – Ljubljana: samozal. avtor, 2015

Način dostopa (URL):
`http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~raicm/Poucevanje/SPI/SPI_vaje_2015.pdf`

ISBN 978-961-283-343-5 (pdf)

280007936

Predgovor

Ta zbirka je nastala po vajah iz slučajnih procesov, ki sem jih izvajal na prvi stopnji bolonjskega študija finančne matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Vaje sem prevzel od Aleša Tomana. Kar nekaj nalog iz te zbirke je njegovih, za kar sem mu globoko hvaležen.

Snov nalog se omejuje na procese štetja v času in njena glavnina je zajeta v [4], v pomoč pa so lahko tudi ostale knjige s seznama literature. Pred posameznim sklopom nalog je navadno okvir, v katerem je povzetek potrebne snovi, prav tako pa so tudi definirane oznake pojmov. Vse naloge so rešene, nekatere celo na več načinov. Bralec pa naj ne bo presenečen, če najde še kakšno svojo rešitev.

V Ljubljani, junija 2015

Martin Raič
`martin.raic@fmf.uni-lj.si`

Kazalo

1. Ponovitev izbranih tem iz teorije verjetnosti

Pogojne porazdelitve. Časi ustavljanja. Izračun matematičnega upanja s pomočjo preživetvene funkcije. Waldova identiteta. Rangi, vrstilne statistike.

1. Naj bo T slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$.

   a) Dokažite formulo:
   $$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)\,.$$

   b) Izračunajte $\mathbb{E}(T)$ za primer, ko je $\mathbb{P}(T > n) = \dfrac{2}{(n+2)(n+3)}$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Naj bo poljubna T nenegativna slučajna spremenljivka.

   a) Dokažite formulo:
   $$\mathbb{E}(T) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > t)\,.$$

   b) Izračunajte $\mathbb{E}(T)$ za primer, ko je $\mathbb{P}(T > t) = \dfrac{1}{(1+t)^3}$ za $t \geq 0$.

3. Andrej meče pošten kovanec, Brina pa standardno kocko. Vsakič vržeta oba hkrati in meti so med seboj neodvisni, mečeta pa, dokler Andrej ne vrže cifre ali pa vržeta vsak trikrat (kar pride prej). Izračunajte verjetnost, da ne pade nobena šestica, in še pričakovano število šestic.

Čas ustavljanja

Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk. Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $\{0, 1, 2, \ldots\}$ je **čas ustavljanja** *glede na prej omenjeno zaporedje, če se za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ dogodek, da je $T = n$, deterministično izraža z $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$. To je ekvivalentno zahtevi, da se za vsak n dogodek, da je $T \leq n$, deterministično izraža z $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$.*

4. Andrej spet meče pošten kovanec, Brina pa standardno kocko. Vsakič vržeta oba hkrati in meti so med seboj neodvisni. Mečeta ob časih $0, 1, 2, \ldots$. Slučajna spremenljivka Z_n naj pove stanje obeh metov ob času n (ima torej 12 možnih vrednosti). Določite, katere slučajne spremenljivke so časi ustavljanja:

   a) čas, ob katerem Brina vrže prvo šestico;

   b) čas, ob katerem Brina vrže drugo šestico;

   c) čas, ob katerem Brina vrže prvo šestico, če jo je vrgla do časa 100, sicer 100;

   d) čas, ob katerem Brina vrže prvo šestico, če jo je vrgla do časa 100, sicer 1;

   e) čas, ob katerem Brina vrže prvo šestico po času 100;

f) čas, ob katerem Brina vrže drugo šestico, ki mu prištejemo 1;

g) čas, ob katerem Brina vrže drugo šestico, ki mu odštejemo 1;

h) čas, ob katerem Brina vrže prvo šestico po tistem, ko je Andrej že vrgel deset grbov;

i) čas, ob katerem skupno število Brininih pik prvič preseže 42;

j) čas, ob katerem Brina prvič vrže najvišje število pik med meti ob časih od 0 do 10.

5. Naj bodo:

- $X_1, X_2, \ldots$ enako porazdeljene slučajne spremenljivke;
- $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ take slučajne spremenljivke, da je X_n neodvisna od $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$;
- T čas ustavljanja glede na $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$.

Pomemben poseben primer je, ko so $T, X_1, X_2, \ldots$ neodvisne: v tem primeru lahko postavimo kar $Z_0 = T, Z_1 = X_1, Z_2 = X_2, \ldots$. V splošnem pa $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ interpretiramo kot 'vse, kar vemo do vključno n-tega koraka'. Definirajmo:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_T \,.$$

(za $T = 0$ postavimo $S = 0$). Izračunajte:

a) matematično upanje $\mathbb{E}(S)$, če privzamemo, da obstaja $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ in tudi $\mathbb{E}(T)$ (rezultat se imenuje *Waldova identiteta*);

b) varianco $\mathrm{var}(S)$, če privzamemo, da obstajata $\mathbb{E}(T)$ in $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_i)$, da je $\mu = 0$ in da je X_n funkcija slučajnih spremenljivk $Z_0, \ldots, Z_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ (od tod sledi, da so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne).

Ali rezultat za varianco velja tudi, če izpustimo predpostavko, da je $\mu = 0$?

6. Pošten kovanec spet mečemo, dokler ne pade cifra. Izračunajte pričakovano število metov in pričakovano število grbov.

7. Mečemo pošten kovanec in meti so neodvisni. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo z S_n število cifer v prvih n metih. Naj bo N število metov pred drugo cifro (le-te ne štejemo). Koliko je $\mathbb{E}(S_N)$? Ali v tem primeru velja Waldova identiteta? Komentirajte!

8. Pošten kovanec mečemo, dokler dvakrat *zapored* ne pade cifra. Izračunajte pričakovano število vseh metov in pričakovano število vseh cifer.

9. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke in naj bo še T slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, neodvisna od $X_1, X_2, \ldots$. Definirajmo:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_T \,.$$

(za $T = 0$ postavimo $S = 0$). Izračunajte:

a) varianco $\mathrm{var}(S)$; privzamemo, da obstaja $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_i)$ in še $\mathrm{var}(T)$ (namig: če je $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, lahko s pomočjo 5. naloge izračunate $\mathbb{E}\big[(S-\mu T)^2\big]$, t. j. varianco, nepojasnjeno s T) – rezultat se imenuje *Blackwell–Girshickova identiteta*;

b) rodovno funkcijo $G_S(z) = \mathbb{E}(z^S)$, kjer privzamemo, da je $z > 0$, da je $\mathbb{E}(z^S) < \infty$ in da za vse $w > 0$ velja $G_T(w) = \mathbb{E}(w^T) < \infty$.

Ali dobljena rezultata veljata tudi, če predpostavko, da je T neodvisna od zaporedja $X_1, X_2, \ldots$, zamenjamo s šibkejšo predpostavko, da je T čas ustavljanja glede na $0, X_1, X_2, \ldots$?

10. Naj bodo $X_1, X_2, X_3, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene *zvezne* slučajne spremenljivke. Pravimo, da se v času $t \in \mathbb{N}$ zgodi *rekord*, ki ima vrednost X_t, če je $X_t > \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}\}$. Privzamemo, da je maksimum prazne množice $-\infty$, torej je v času 1 vedno dosežen rekord. Tako dobimo proces štetja, pri katerem se prihodi (rekordi) zgodijo le ob časih iz $\mathbb{N}$.

a) Izračunajte verjetnost, da se ob posameznem času t zgodi rekord. *Namig*: vpeljite *range* spremenljivk.

b) Dokažite, da so dogodki, da se ob posameznem času zgodi rekord, neodvisni.

c) Naj N_t kot ponavadi označuje število rekordov, ki so se zgodili do vključno časa t. Izračunajte $\mathbb{E}(N_t)$ in $\mathrm{var}(N_t)$ ter določite še asimptotično obnašanje teh dveh karakteristik.

d) Naj bo S prvi čas od 2 naprej, ob katerem se zgodi rekord (t. j. drugi prihodni čas našega procesa štetja). Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke. Posebej dokažite še, da je $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$, a $\mathbb{E}(S) = \infty$.

e) Naj $S^{(y)}$ označuje čas prvega rekorda, večjega od y, se pravi:

$$S^{(y)} := \min\{t\,;\, X_t > y\}\,.$$

Dokažite, da je slučajna spremenljivka $S^{(y)}$ neodvisna od $X_{S^{(y)}}$. Z drugimi besedami, vrednost prvega rekorda, večjega od y, je neodvisna od časa, ko se to zgodi.

2. Procesi štetja

Osnovni pojmi, osnovna ekvivalenca. Bernoullijevo zaporedje kot proces štetja. Binomski proces. Pozabljivost geometrijske porazdelitve.

Proces štetja *opisuje stvari, ki so slučajno razporejene v času, rekli jim bomo* **prihodi**. *Gledamo le, ob katerih trenutkih iz* $[0, \infty)$ *je prišlo do prihoda, poleg tega pa je lahko v končnem časovnem intervalu le končno mnogo prihodov. Toda navadno je na celi pozitivni polosi neskončno mnogo prihodov. Tak proces lahko opišemo na več ekvivalentnih načinov:*

- *s slučajno lokalno končno podmnožico intervala* $[0, \infty)$*;*
- *s slučajnimi spremenljivkami* N_t, $t \in [0, \infty)$*, ki označujejo število prihodov do vključno časa* t*;*
- *s trenutki prihodov, urejenimi po velikosti:* $S_1 \le S_2 \le S_2 \ldots$. *Slučajni spremenljivki* S_n *pravimo* n**-ti prihodni čas**. *Velja* **osnovna ekvivalenca***:*

$$N_t \ge n \Longleftrightarrow S_n \le t$$

1. Preprost primer procesa štetja je **Bernoullijevo zaporedje poskusov**, t. j. zaporedje neodvisnih slučajnih poskusov, pri katerih vsak *uspe* z enako verjetnostjo. V pripadajočem procesu štetja se lahko prihodi zgodijo le ob časih iz $\mathbb{N}$, do prihoda ob času t pa pride, če je t-ti poskus uspešen.

   a) Določite porazdelitev števila prihodov N_t do vključno časa t ($t \in \mathbb{N}$) in število prihodov med časoma s in t, t. j. $N_t - N_s$ ($s < t$). Formulirajte to kot porazdelitev vsote določenih slučajnih spremenljivk.

   b) Naj bodo $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \cdots \in \mathbb{N}$. Kakšna zveza velja za slučajne spremenljivke $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \ldots$?

   c) Določite porazdelitev prvega prihodnega časa S_1.

   d) Določite porazdelitev nadaljnjih prihodnih časov S_n.

2. Dan je proces štetja, kjer je $N_t + 1 \sim \mathrm{Geom}(e^{-t})$. Izračunajte pričakovani čas prvega in drugega prihoda.

3. *Binomski proces.* Na zabavo, ki se začne ob določeni uri, je povabljenih n gostov. Vsak malo zamudi, zamuda vsakega je porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$ in zamude so med seboj neodvisne. Prihodi gostov tvorijo proces štetja v zveznem času. Določite porazdelitev slučajnih spremenljivk N_t, $0 \le t \le 1$, in S_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. Dano naj bo Bernoullijevo zaporedje poskusov in naj bo $\mathcal{P}$ množica časov iz $\mathbb{N}$, ob katerih se zgodi uspel poskus. Nadalje za $t \in \mathbb{N}$ označimo z $\mathcal{P}^{\rightarrow\!\!|t}$ prihode do vključno časa t, z $\mathcal{P}^{t\rightarrow}$ pa prihode do časa t, premaknjene tako, da se štejejo od začetka:

$$\mathcal{P}^{\rightarrow\!\!|t} := \mathcal{P} \cap (0, t] \,, \qquad \mathcal{P}^{t\rightarrow} := \mathcal{P} \cap (t, \infty) - t \,.$$

a) Dokažite, da je $\mathcal{P}^{t\to}$ neodvisen od $\mathcal{P}^{\nrightarrow t}$ in porazdeljen enako kot $\mathcal{P}$. Pravimo, da ima $\mathcal{P}$ *časovno homogeno lastnost Markova.*

b) Naj bo zdaj T čas ustavljanja, ki pripada zaporedju $0, Z_1, Z_2, \ldots$, kjer za $t \in \mathbb{N}$ definiramo $Z_t = 1$, če je poskus ob času t uspel, in $Z_t = 0$, če ni uspel. Dokažite, da je proces $\mathcal{P}^{T\to}$ neodvisen od $\big(T, \mathcal{P}^{\nrightarrow T}\big)$ in porazdeljen enako kot $\mathcal{P}$. Pravimo, da ima $\mathcal{P}$ *krepko časovno homogeno lastnost Markova.*

5. Dokažite, da je geometrijska porazdelitev *pozabljiva* (angl. *memoryless*): če je $T \sim \mathrm{Geom}(p)$, za vse $t \in \mathbb{N}_0$ in vse $s \in \mathbb{N}$ velja:

$$\mathbb{P}(T = t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T = s)\,. \tag{$*$}$$

Nadalje dokažite še, da je geometrijska porazdelitev edina pozabljiva porazdelitev z zalogo vrednosti na $\mathbb{N}$. Privzamemo, da mora imeti pogojna verjetnost v $(*)$ smisel, t. j. da je $\mathbb{P}(T > t) > 0$ za vse $t \in \mathbb{N}_0$.

Medprihodni časi

Proces štetja lahko predstavimo tudi z medprihodnimi časi, ki so časi med dvema zaporednima prihodoma:

$$T_1 = S_1\,,\ T_2 = S_2 - S_1\,,\ T_3 = S_3 - S_2\,, \ldots$$

6. Dano je Bernoullijevo zaporedje poskusov.

a) Dokažite, da so S_n časi ustavljanja. Kaj sledi v kombinaciji z 4. nalogo?

b) Določite porazdelitev vseh medprihodnih časov T_n in dokažite, da so med seboj neodvisni. Nato zapišite ustrezno posledico, ki govori o vsoti neodvisnih slučajnih spremenljivk.

c) Določite še porazdelitev razlik $S_n - S_m$, kjer je $m < n$.

3. Homogeni Poissonov proces

Motivacija in definicija homogenega Poissonovega procesa. Spremljajoče porazdelitve.

Homogeni Poissonov proces

Homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda > 0$ *dobimo kot določeno limito procesov, ki izhajajo iz Bernoullijevih zaporedij poskusov. Karakteriziran je z naslednjima dvema lastnostma:*

- *Velja* $N_0 = 0$ *in za poljubna* $0 \le s \le t$ *je* $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}\big(\lambda(s-t)\big)$ *(torej je tudi* $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$*).*
- *Za poljubno zaporedje* $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \cdots$ *so slučajne spremenljivke* $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \ldots$ *neodvisne.*

Še nekaj drugih lastnosti:

- *Medprihodni časi* $T_1, T_2, T_3, \ldots$ *so neodvisni in porazdeljeni eksponentno* $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- *Za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *velja* $S_n \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$. *Splošneje, za poljubna* $m \le n$ *velja* $S_n - S_m \sim \mathrm{Gama}(n-m, \lambda)$.
- *Za poljubno zaporedje* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *so slučajne spremenljivke* $S_{n_1}, S_{n_2} - S_{n_1}, S_{n_3} - S_{n_2}, \ldots$ *neodvisne.*
- *Če dobljeni proces spet predstavimo kot slučajno množico* $\mathcal{P}$*, se ohrani* **krepka časovno homogena lastnost Markova***: za vsak čas ustavljanja* T *je proces* $\mathcal{P}^{T\rightarrow}$ *neodvisen od* $\big(T, \mathcal{P}^{\rightarrow\!|T}\big)$ *in porazdeljen enako kot* $\mathcal{P}$.

1. Pacienti prihajajo v ambulanto v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 6 pacientov na uro. Zdravnik začne sprejemati paciente, šele ko v čakalnico vstopi tretji pacient.

   a) Izračunajte pričakovani čas, ki preteče od odprtja ambulante do sprejema prvega pacienta.

   b) Izračunajte verjetnost, da zdravnik v prvi uri po odprtju ambulante ne sprejme nobenega pacienta.

2. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ.

   a) Izračunajte avtokovariančno funkcijo družine slučajnih spremenljivk N_t, t. j. vse kovariance $\mathrm{cov}(N_t, N_s)$.

   b) Izračunajte avtokorelacijsko funkcijo družine slučajnih spremenljivk N_t, t. j. vse korelacije $\mathrm{corr}(N_t, N_s)$.

   c) Za $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$ zapišite kovariančno matriko slučajnega vektorja $(N_{t_1}, N_{t_2}, \ldots, N_{t_n})$.

3. *Casinò Poisson.* V igralnici od časa do časa zazvoni zvonec. Vsakič, ko zazvoni zvonec, lahko igralec pritisne na gumb. Igralec dobi igro, če prvič pritisne na gumb

ob zadnjem zvonjenju pred časom 1. Privzamemo, da zvonjenja tvorijo Poissonov proces z intenzivnostjo λ.

Igralec igra tako, da prvič pritisne na gumb ob prvem zvonjenju od časa s naprej (če seveda do njega pride).

a) Kolikšna je verjetnost, da igralec dobi igro (v odvisnosti od s)?
b) Kolikšna je optimalna vrednost za s in kolikšna je pri tej izbiri verjetnost, da igralec dobi igro?

4. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ in $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$. Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na $Z := X + Y$.

5. Naj bo N število prihodov, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}(\lambda)$. Vsak prihod naj bo uspešen z verjetnostjo p, pri čemer naj bo uspešnost posameznih prihodov neodvisna, prav tako tudi neodvisna od samega števila prihodov. Označimo z S število uspešnih, s T pa število neuspešnih prihodov, t. j. $T = N - S$.

   a) Določite porazdelitev slučajnih spremenljivk S in T.
   b) Dokažite, da sta slučajni spremenljivki S in T neodvisni.
   c) Dokažite, da, če spremenimo porazdelitev slučajne spremenljivke N, ni več nujno, da sta S in T neodvisni.

   Opomba. Transformaciji, pri katerih iz slučajne spremenljivke N nastane slučajna spremenljivka S, pravimo *redčenje* (angl. *thinning*).

6. Dokažite, da je tudi eksponentna porazdelitev pozabljiva: če je $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, za vse $t, s \geq 0$ velja:
$$\mathbb{P}(T \leq t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T \leq s)\,.$$
   (zgornji pogoj pomeni tudi, da mora imeti pogojna verjetnost smisel, t. j. $\mathbb{P}(T > t) > 0$ za vse $t > 0$) Nadalje dokažite še, da je eksponentna porazdelitev edina pozabljiva porazdelitev, ki je zvezna in katere gostota je na intervalu $(0, \infty)$ zvezna, drugje pa je enaka nič.

7. Naj bosta $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ in $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk $U := \min\{X, Y\}$ in $V := \max\{X, Y\}$.

8. Gasilska postaja prejema klice v sili v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo pol klica na uro. Gasilci vsakič za odziv na klic, vrnitev na postajo in pripravo na naslednji klic potrebujejo slučajno mnogo časa, ki je porazdeljen enakomerno na intervalu od pol ure do ene ure. Vsemu temu času skupaj bomo rekli *intervencija*. Med intervencijo se klici preusmerjajo na sosedne gasilske postaje. Privzamemo, da so časi intervencij neodvisni tako med seboj kot tudi od klicev, ki prihajajo.

   Privzemite, da so gasilci trenutno pripravljeni na sprejem klica (da torej ni intervencije). Določite porazdelitev števila klicev, na katere se odzovejo gasilci, preden je potrebno kakšen klic preusmeriti.

9. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ.

    a) Privzemimo, da se je do trenutka t zgodil le en prihod. Določite pogojno porazdelitev časa tega prihoda glede na ta dogodek.

    b) Privzemimo, da sta se zgodila dva prihoda. Izračunajte pogojna pričakovana časa obeh prihodov.

Pogojevanje na število prihodov

Pogojno na dogodek, da se je v homogenem Poissonovem procesu na danem časovnem intervalu zgodilo natanko n prihodov, je zožitev procesa na ta interval, gledana kot slučajna množica, porazdeljena enako kot množica $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, kjer so $U_1, \ldots, U_n$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na tem intervalu.

Če je dani časovni interval $[0, t]$, je pogojno na dogodek, da se je zgodilo natanko n prihodov, slučajni vektor iz časov prihodov $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ porazdeljen enako kot vektor $(U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$ iz ustreznih vrstilnih statistik.

10. Potniki prihajajo na železniško postajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda > 0$. Na začetku opazovanja (čas 0) na postaji ni nobenih potnikov, vlak pa odpelje ob času t. Naj bo W vsota čakalnih časov vseh potnikov, prispelih do odhoda vlaka. Izračunajte $\mathbb{E}(W)$.

11. *Poissonovi šoki.* Vsak prihod v homogenem Poissonovem procesu z intenzivnostjo λ povzroči *šok*, ki ima s časovnih enot kasneje, kot se zgodi, učinek $e^{-\theta s}$. Označimo z $X(t)$ skupni učinek vseh šokov z intervala $[0, t]$ ob času t. Izračunajte pričakovano vrednost $\mathbb{E}\big[X(t)\big]$.

12. Kokoška želi prečkati enosmerno cesto, po kateri vozijo avtomobili v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ vozil na časovno enoto, vsi enako hitro. Za prečkanje ceste kokoška potrebuje c časovnih enot. Privzamemo, da kokoška začne prečkati cesto, brž ko ima možnost, da to stori, ne da bi bila povožena. Izračunajte pričakovani čas, ki ga kokoška potrebuje za čakanje in prečkanje skupaj.

13. Na sejmu na določenem mestu občasno delijo nagrade. Nagrado dobijo vsi, ki so ob tem času tam. Delitve tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Ob času nič Tonček ravno vidi, da delijo nagrade, prihiti, a je prepozen. Nato čaka, da vnovič delijo nagrade, a največ čas δ: po tem času se naveliča in gre drugam. Brž ko začnejo deliti nagrade, spet prihiti, a je za tedanjo delitev prepozen in spet čaka ponovno delitev nagrad, a največ δ. Tako ponavlja, dokler ne dobi nagrade. Označimo s T čas, ob katerem Tonček končno dobi nagrado. Izračunajte $\mathbb{E}(T)$. Privzamemo, da je sejem odprt v nedogled.

14. Pri procesu štetja na $(0, \infty)$:

- z A_t označimo *starost* procesa (angl. *age*) ob času t, t. j. čas, ki je minil od zadnjega prihoda do časa t, če je pred t bil kakšen prihod, sicer pa je starost ob času t enaka kar t (če predpišemo $S_0 := 0$, torej velja $A_t = t - S_{N_t}$);
- z E_t označimo *presežek* procesa (angl. *exceedance*) ob času t, t. j. čas, ki mine od t do naslednjega prihoda (torej je $E_t = S_{N_t+1} - t$).

Pri homogenem Poissonovem procesu z intenzivnostjo λ:

a) Določite porazdelitev slučajnih spremenljivk A_t in E_t.

b) Dokažite, da sta slučajni spremenljivki A_t in E_t neodvisni.

c) Določite porazdelitev vsote A_t in E_t (t. j. vrzeli med prihodoma, ki obdajata čas t).

4. Markiranje, redčenje, superpozicija

Homogen Poissonov proces z diskretnimi označbami

Homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ, pri katerem vsak prihod **označimo** *(markiramo) z označbo, pri čemer so označbe posameznih prihodov neodvisne tako med seboj kot tudi od procesa in porazdeljene po shemi:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{pmatrix},$$

je enako porazdeljen kot unija r neodvisnih homogenih Poissonovih procesov z intenzivnostmi $p_1\lambda, p_2\lambda, \ldots, p_r\lambda$, kjer vse prihode v i-tem procesu označimo z a_i.

1. Privzemimo, da lahko nočni promet na Jadranski cesti v Ljubljani modeliramo s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 40 vozil na uro. 10% teh vozil je tovornjakov, 90% pa osebnih avtomobilov. Privzamemo, da so tipi posameznih vozil med seboj neodvisni.

   a) Kolikšna je verjetnost, da v prvi uri mimo FMF pelje vsaj en tovornjak?

   b) Recimo, da je v prvi uri mimo FMF peljalo 10 tovornjakov. Kolikšno je pogojno pričakovano število osebnih vozil, ki so se v prvi uri peljali mimo FMF?

   c) Recimo, da je v prvi uri mimo FMF peljalo 50 vozil. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bilo med temi vozili natanko 5 tovornjakov in 45 osebnih vozil?

2. Življenjska doba žarnice je porazdeljena eksponentno s pričakovano vrednostjo 200 dni. Ko žarnica pregori, jo vzdrževalec nemudoma zamenja. Poleg tega drugi vzdrževalec kar preventivno menja žarnice v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 0'01 menjave na dan. Seveda privzamemo, da so žarnice oz. njihove življenjske dobe med seboj neodvisne.

   a) Kako pogosto je zamenjana posamezna žarnica?

   b) Za daljše obdobje izračunajte, kolikšen delež žarnic je zamenjan zaradi pregoretja in kolikšen delež kar preventivno.

3. Režiser išče tri igralce, enega moškega in dve ženski. Moški se prijavljajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 na dan, ženske pa z intenzivnostjo 1 na dan, neodvisno od moških. Izračunajte pričakovani čas, ki je potreben, da režiser dobi tako moškega kot obe ženski. Privzamemo, da so vsi kandidati ustrezni.

4. Žena in mož iščeta rabljen avtomobil. Vsak gledata oglase za svojo priljubljeno znamko avtomobilov. Primerni oglasi za ženino znamko prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ, primerni oglasi za moževo znamko

pa v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo μ. Žena je pripravljena iti v nakup, ko naleti na tretji primeren oglas za svojo znamko, mož pa, ko naleti na drugi primeren oglas za svojo znamko. Zakonca kupita avto, brž ko je eden od njiju pripravljen iti v nakup. Privzamemo, da sta procesa prihajanja primernih oglasov za obe znamki neodvisna.

a) Kolikšna je verjetnost, da zakonca kupita avto, ki ga najde žena?
b) Določite pričakovani čas, ob katerem zakonca kupita avto.

5. Vzporedno potekata dva neodvisna Poissonova procesa z intenzivnostma λ in μ. Izračunajte verjetnost, da se je pred prvim prihodom v prvem procesu zgodil natanko en prihod v drugem procesu, in še pričakovano število prihodov v drugem procesu pred prvim prihodom v prvem procesu.

6. Na ogled kolokvijev, ki se začne ob določeni uri, prihajajo tako študenti finančne kot študenti splošne matematike. Študenti finančne matematike prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 4 študenti na uro, študenti splošne matematike pa v skladu z homogenim Poissonovi procesom z intenzivnostjo 2 študenta na uro. Privzamemo, da so študenti finančne matematike neodvisni od študentov splošne matematike.

   Recimo, da je bil v prve pol ure natanko en ogled. Izračunajte pogojni pričakovani čas ogleda prvega študenta finančne matematike, ki pride. Gledamo vse od začetka ogledov in privzamemo, da študenti od začetka hodijo na ogled v nedogled.

7. Dana sta neodvisna Poissonova procesa z intenzivnostma λ in μ. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Določite porazdelitev števila prihodov v prvem procesu pred n-tim prihodom v drugem procesu.

8. Dana sta neodvisna homogena Poissonova procesa z intenzivnostma λ in μ. Označimo z $N_t^{(1)}$ število prihodov do časa t v prvem, z $N_t^{(2)}$ pa v drugem procesu. Kolikšna je verjetnost, da dvorazsežni sprehod $\left(N_t^{(1)}, N_t^{(2)}\right)$ kdaj obišče točko (i, j)?

Homogen Poissonov proces s splošnimi označbami

Če vsak prihod v homogenem Poissonovem procesu z intenzivnostjo λ označimo z označbo iz množice M, ki ima dano porazdelitev μ, pri čemer so označbe posameznih prihodov neodvisne tako med seboj kot tudi od procesa, je število označenih prihodov, ki pripadajo množici $A \subseteq [0, \infty) \times M$, porazdeljeno po Poissonu s parametrom $\theta = (\lambda m \otimes \mu)(A)$, kjer je m Lebesgueova mera.

Če je torej $\mu = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$, je:

$$\theta = \lambda \sum_i p_i \, m(\{t \,;\, (t, a_i) \in A\}) \,.$$

Če pa je μ zvezna porazdelitev z gostoto f, je:

$$\theta = \lambda \iint_A f(s) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \,.$$

9. Kapital banke se povečuje premo sorazmerno s časom: ob času t ima banka at kapitala. Stresni testi prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Banka prestane posamezen test, če ima takrat vsaj določen znesek kapitala, ki je slučajen in porazdeljen zvezno z gostoto:

$$f(s) = \frac{4}{\pi(1 + s^2)^2} \,.$$

Privzamemo, da so zahtevane količine kapitala v posameznih testih neodvisne. Kolikšna je verjetnost, da bo banka uspešno prestala vse stresne teste?

5. Splošni Poissonov proces

Funkcija intenzivnosti. Pogojevanje na število prihodov. Dogajanje glede na čas ustavljanja.

Naj bo ρ funkcija iz $(0,\infty)$ v $[0,\infty)$. **Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti** *ρ je proces štetja, karakteriziran z naslednjima lastnostma:*

- *Za $a \le b$ je $N_b - N_a \sim \mathrm{Pois}\left(\int_a^b \rho(t)\,\mathrm{d}t\right)$. Posledično je $N_t \sim \mathrm{Pois}\big(R(t)\big)$, kjer je $R(t) = \int_0^t \rho(s)\,\mathrm{d}s$.*
- *Dogajanji v disjunktnih časovnih intervalih sta neodvisni.*

1. Trgovina je odprta vsak dan od 10. do 18. ure. Privzemite, da stranke prihajajo v skladu s Poissonovim procesom s funkcijo intenzivosti, ki od odprtja do 12. ure naraste z 0 na uro na 4 na uro in do 14. ure naraste še na 6 na uro. Nato do 16. ure pade na 2 na uro in nadalje do zaprtja na 0 na uro. Naraščanje in padanje v vseh omenjenih časovnih intervalih je linearno.

   a) Določite porazdelitev števila strank v posameznem dnevu.

   b) Kolikšna je verjetnost, da na izbrani dan do 12. ure v trgovino ne vstopi nobena stranka?

   c) Privzemite, da sta v prvih dveh urah po odprtju prišli natanko dve stranki. Izračunajte pričakovana časa njunih prihodov.

Pogojevanje na število prihodov

Pogojno na dogodek, da se je v Poissonovem procesu s funkcijo intenzivnosti na časovnem intervalu od a do b zgodilo natanko n prihodov, je zožitev procesa na ta interval, gledana kot slučajna množica, porazdeljena enako kot množica $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, kjer so $U_1, \ldots, U_n$ neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto:

$$f(t) = \frac{\rho(t)}{\displaystyle\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

Če je dani časovni interval $[0,t]$, je pogojno na dogodek, da se je zgodilo natanko n prihodov, slučajni vektor iz časov prihodov $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ porazdeljen enako kot vektor $(U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$ iz ustreznih vrstilnih statistik.

2. Dan je Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = a/(1+t)$. Določite porazdelitev prvega prihodnega časa skupaj s pričakovano vrednostjo, kjer le-ta obstaja.

3. Zamudniki prihajajo v skladu s Poissonovim procesom s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = e^{-t}$, kjer je t zamuda v mesecih.

a) Kolikšna je verjetnost, da je prišel *natanko* en zamudnik in da je le-ta zamudil več kot dva meseca?

b) Recimo, da je res prišel natanko en zamudnik in zamudil več kot dva meseca. Izračunajte pogojni pričakovani čas njegove zamude.

4. Naj bo $a, \lambda, \delta > 0$. Izračunajte pričakovano število prihodov v Poissonovem procesu s funkcijo intenzivnosti $t \mapsto a\,e^{-\lambda t}$, ki jim v časovnem intervalu dolžine δ ne sledi noben drug prihod.

Splošni Poissonov proces in čas ustavljanja

Če je T čas ustavljanja, je proces $\mathcal{P}^{T\rightarrow}$ pogojno na $\left(T, \mathcal{P}^{\rightarrow\!\shortmid T}\right)$ Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $s \mapsto \rho(s + T)$.
Ekvivalentno, proces $\mathcal{P} \cap (T, \infty)$ je pogojno na $\left(T, \mathcal{P}^{\rightarrow\!\shortmid T}\right)$ Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $t \mapsto \rho(t)\,\mathbb{1}(t > T)$.

5. Dan je Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti:

$$\rho(t) = \frac{1}{1+t}\,.$$

Določite porazdelitev časa prvega prihoda T_1 in medprihodnega časa T_2.

6. Prenovitveni procesi

Osnovni pojmi, asimptotično obnašanje. Prenovitveni procesi z nagradami. Prenovitvena enačba. Prenovitveni procesi z zaostankom.

Prenovitveni proces *je posplošen proces štetja, pri katerem so medprihodni časi* $T_1, T_2, T_3, \ldots$ *neodvisni in enako porazdeljeni. Njihovi porazdelitvi pravimo* **medprihodna porazdelitev**. *Dopuščamo tudi možnost* $T_i = 0$*: v tem primeru je ob ustreznem času več kot en prihod.*
Prenovitveni procesi, katerih medprihodni časi imajo končno matematično upanje, zadoščajo **krepkemu zakonu velikih števil***:*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s.g.}} \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} .$$

1. Od Deviške plaže do hotela vozi avtobus. Zaradi nepredvidljivih prometnih razmer so časi povratka avtobusa porazdeljeni enakomerno na intervalu od 20 minut do 1 ure, so pa med seboj neodvisni. Čas postanka avtobusa na Deviški plaži (vključno s časom vkrcavanja in izkrcavanja potnikov) zanemarimo.

   a) Izračunajte asimptotično dolgoročno število prihodov avtobusa na uro.

   b) Peteršiljčkovim je avtobus ravno ušel, zato se gredo še malo kopat in pridejo čez 40 minut spet na postajo. Kolikšna je verjetnost, da bodo čakali manj kot 20 minut?

2. Spet gledamo gasilsko postajo tako kot v 8. nalogi iz 3. razdelka: postaja prejema klice v sili v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo pol klica na uro. Gasilci vsakič za odziv na klic, vrnitev na postajo in pripravo na naslednji klic potrebujejo slučajno mnogo časa, ki je porazdeljen enakomerno na intervalu od pol ure do ene ure. Med tem časom se klici preusmerjajo na sosedne gasilske postaje. Privzamemo, da so časi intervencij neodvisni tako med seboj kot tudi od klicev, ki prihajajo. Za daljše časovno obdobje izračunajte, kolikšen delež klicev se mora preusmeriti.

Prenovitveni proces z nagradami *je prenovitveni proces, pri katerem vsakemu prihodu pripada nagrada. Nagrado, ki pripada i-temu prihodu po vrsti, navadno označimo z R_i in je lahko tudi negativna. Nagrada, ki pripada i-temu prihodu, pride enkrat v i-tem medprihodnem intervalu, t. j. med časoma S_{i-1} in S_i. V tem intervalu lahko prihaja tudi postopoma in ne nujno monotono. Bolj formalno, če z W_t označimo skupni znesek nagrad do časa t, velja:*

$$W_{S_i} - W_{S_{i-1}} = R_t \,.$$

Privzamemo, da so dinamike prihajanj nagrad skupaj s T_i neodvisne in enako porazdeljene. Označimo z R_i^+ maksimalno absolutno vrednost deloma prispele nagrade, ki pripada i-temu prihodu, torej $R_i = \sup_{S_{i-1} \le t \le S_i} |W_t - W_{S_{i-1}}|$; velja torej $|R_i| \le R_i^+$. Če je $\mathbb{E}(T_1) < \infty$ in $\mathbb{E}(R_1^+) < \infty$, velja krepki zakon velikih števil:

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{\text{s.g.}} \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} \,.$$

3. Bine ima plinsko peč, ki jo hodijo pregledovat dimnikarji v skladu s prenovitvenim procesom, katerega medprihodni čas je porazdeljen enakomerno na intervalu od enega do dveh let in pol. Če peč več kot leto dni ni bila servisirana, Bine plača globo v višini 105 evrov. Bine se odloči, da peč servisira vsakič natanko eno leto po zadnjem prihodu dimnikarjev. Izračunajte dolgoročni *letni* znesek globe, ki jo mora Bine plačati dimnikarjem.

4. *Alternirajoči prenovitveni proces* skače iz stanja 1 v stanje 2 in nazaj. Dolžine posameznih bivanj v posameznem stanju so med seboj neodvisne. Dolžine bivanj v stanju 1 so enako porazdeljene in imajo matematično upanje μ_1, dolžine bivanj v stanju 2 pa so prav tako enako porazdeljene in imajo matematično upanje μ_2. Izračunajte dolgoročni delež časa, ki ga proces prebije v stanju 1.

5. Manja po telefonu prodaja določen izdelek. Verjetnost, da bo stranko uspela prepričati do časa t, je enaka $3(t - t^2)$, če je $t \le 1/2$, in $3/4$, če je $t \ge 1/2$ (vsakršno prepričevanje, ki gre čez $1/2$ časovne enote, je torej zaman). Če stranko prepriča, pogovor takoj konča in pokliče naslednjo stranko. To pa naredi tudi, če ji stranke po času τ še ni uspelo prepričati.

   Kako naj izbere čas τ, da bo dolgoročno gledano prodala čimveč izdelkov?

6. Na sejmu na določenem mestu občasno delijo nagrade. Nagrado dobijo vsi, ki so ob tem času tam. Delitve tvorijo prenovitveni proces, čigar medprihodna porazdelitev je enakomerna na intervalu od 20 do 40 minut. Ob času nič Tonček ravno vidi, da delijo nagrade, prihiti, a je prepozen. Nato čaka, da vnovič delijo nagrade, a največ 30 minut: po tem času se naveliča in gre drugam. Brž ko začnejo deliti nagrade, spet prihiti, a je za tedanjo delitev prepozen in spet čaka ponovno delitev nagrad, a največ 30 minut. Tako ponavlja, dokler ne dobi nagrade. Označimo s T čas, ob katerem Tonček končno dobi nagrado. Izračunajte $\mathbb{E}(T)$. Privzamemo, da je sejem odprt v nedogled.

Lebesgue–Stieltjesov integral *merljive funkcije* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *po funkciji* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, ki naj bo bodisi (ne nujno strogo) naraščajoča bodisi naj ima omejeno totalno variacijo, je integral funkcije* h *po Lebesgue–Stieltjesovi meri, ki pripada funkciji* h*:*

$$\int h \,\mathrm{d}F := \int_{(a,b)} h(x)\,\mathrm{d}F(x) := \int h \,\mathrm{d}\mu\,,$$

kjer je (pozitivna ali predznačena) mera μ *definirana po predpisu:*

$$\mu\big((a,b)\big) = \lim_{x\uparrow b} F(x) - \lim_{x\downarrow a} F(x)\,,$$

iz katerega sledi tudi:

$$\mu(\{a\}) = \lim_{x\downarrow a} F(x) - \lim_{x\uparrow a} F(x) =: \delta F(a)$$

in $\mu\big([a,b]\big) = \lim_{x\downarrow b} F(x) - \lim_{x\uparrow a} F(x)$.
Če je h *zvezna,* F *pa zvezno odvedljiva na intervalu* (a,b) *(ki je lahko tudi neskončen), se Lebesgue–Stieltjesov integral prevede na posplošenega Riemannovega:*

$$\int_{(a,b)} h\,\mathrm{d}F = \int_{(a,b)} h(x)\,\mathrm{d}F(x) = \int_a^b h(x)\,F'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Velja tudi:

$$\int_{\{a\}} h\,\mathrm{d}F = h(a)\,\delta F(a)\,.$$

Poleg tega za vsako slučajno spremenljivko s kumulativno porazdelitveno funkcijo F *velja:*

$$\mathbb{E}\big[h(X)\big] = \int_{\mathbb{R}} h\,\mathrm{d}F\,.$$

Prenovitvena mera $M(t) := \mathbb{E}(N_t)$ *prenovitvenega procesa ustreza* **prenovitveni enačbi**:

$$M(t) = F(t) + \int_{[0,t]} M(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\,,$$

kjer je F *kumulativna porazdelitvena funkcija medprihodne porazdelitve. Če ima le-ta gostoto* f*, lahko pišemo:*

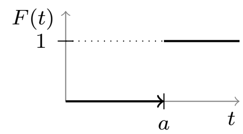
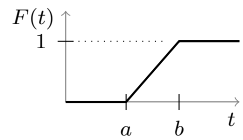
$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka *funkcije* $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *je funkcija, podana s predpisom:*

$$\hat{F}(z) = \int_{[0,\infty)} e^{-zt}\, \mathrm{d}F(t)\,,$$

kjer za $t < 0$ *predpišemo* $F(t) = 0$. *Osnovne Laplace–Stieltjesove transformiranke:*

$F(t)$	$\hat{F}(z)$
1	1
t^r	$\dfrac{r!}{z^r}$
$t^r\, e^{\alpha t}$	$\dfrac{r!\, z}{(z-\alpha)^{r+1}}$
$\displaystyle\int_0^t s^r\, e^{\alpha s}\, \mathrm{d}s$	$\dfrac{r!}{(z-\alpha)^{r+1}}$
$\displaystyle\int_{[0,t]} e^{\alpha s}\, \mathrm{d}G(s)$	$\hat{G}(z-\alpha)$

$F(t)$	$\hat{F}(z)$
	e^{-az}
	$\dfrac{e^{-az} - e^{-bz}}{(b-a)z}$
$G(t-a)\,\mathbb{1}(t \ge a)\,;\;\; a \ge 0$	$e^{-az}\,\hat{G}(z)$

Laplaceova transformiranka (porazdelitve) slučajne spremenljivke X *z vrednostmi v* $[0,\infty)$ *je Laplace–Stieltjesova transformiranka njene kumulativne porazdelitvene funkcije. To je tudi funkcija, ki* z *preslika v* $\mathbb{E}\left[e^{-zX}\right]$.

Stieltjesova konvolucija *funkcij F in $G\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definirana kot:*

$$(F \star G)(t) := \int_{[0,t]} F(t-u)\,\mathrm{d}G(u) = \int_{[0,t]} G(t-u)\,\mathrm{d}F(u) = (G \star F)(t)\,,$$

kjer za $t < 0$ spet predpišemo $F(t) = G(t) = 0$. Tako lahko prenovitveno enačbo za prenovitveno mero zapišemo tudi takole:

$$M = F + M \star F\,,$$

Stieltjesova konvolucija je komutativna, asociativna in bilinearna.
Če sta F in G kumulativni porazdelitveni funkciji neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0,\infty)$, je $F \star G$ kumulativna porazdelitvena funkcija njune vsote.

Laplace–Stieltjesova transformiranka Stieltjesove konvolucije je produkt Laplace–Stieltjesovih transformirank posameznih funkcij:

$$\widehat{F \star G} = \hat{F}\,\hat{G}\,.$$

Posledično je Laplaceova transformiranka vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk produkt transformirank.

Laplace–Stieltjesova transformiranka $\hat{M}$ prenovitvene mere M torej zadošča enačbi $\hat{M} = \hat{F} + \hat{M}\hat{F}$ in je zato enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{F}(z)}{1 - \hat{F}(z)}\,.$$

7. Določite prenovitveno mero prenovitvenega procesa, ki ga dobimo tako, da pri homogenem Poissonovem procesu z intenzivnostjo λ vzamemo vse sode prihode.

8. Določite prenovitveno mero prenovitvenega procesa, pri katerem je medprihodni čas z verjetnostjo p enak nič, z verjetnostjo $1-p$ pa je (pogojno) porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Prenovitveni procesi z zaostankom

Te procese dobimo, če pri prvem (med)prihodnem času T_1 prenovitvenega procesa opustimo predpostavko, da je porazdeljen enako kot ostali. Brž ko je prvi prihodni čas skoraj gotovo končen, ostali pa imajo končno matematično upanje, tudi tak proces zadošča krepkemu zakonu velikih števil:

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s.g.}} \frac{1}{\mathbb{E}(T_2)}\,.$$

9. Dokažite, da prenovitvena mera prenovitvenega procesa z zaostankom zadošča prenovitveni enačbi:
$$M(t) = G(t) + \int_{[0,t]} M(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\,,$$
kjer je G kumulativna porazdelitvena funkcija prvega, F pa kumulativna porazdelitvena funkcija ostalih medprihodnih časov. Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je torej enaka:
$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-\hat{F}(z)}\,.$$

10. V manjšem kraju stoji banka z le enim bančnim okencem. Stranke prihajajo *do banke* v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo μ. Potencialna stranka, ki pride do banke, pa *vstopi* vanjo, le če pred bančnim okencem ni nobene stranke; sicer se ne vrne več. Privzamemo, da je čas strežbe posamezne stranke porazdeljen eksponentno s parametrom λ ter da so časi strežbe neodvisni in neodvisni od procesa prihajanja strank.

    a) Ko banko odprejo, tam (še) ni nobene stranke. Tedaj prihodi strank *v banko* tvorijo prenovitveni proces z zaostankom. Določite njegovo prenovitveno mero.
    b) Določite dolgoročno intenzivnost vstopanja strank v banko.
    c) Določite dolgoročni delež strank, ki vstopijo v banko, med vsemi strankami, ki pridejo do banke.

11. Novopečeni policist lovi prekrškarje, ki prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Prvega spregleda, nadaljnje pa ujame. Označimo z N_t število prekrškarjev, ki jih je policist ujel do časa t. Izračunajte $\mathbb{E}(N_t)$.

    Namig: proces N_t lahko obravnavate kot prenovitveni proces z zaostankom – določite porazdelitve T_1 in T_n, $n > 1$.

12. Policist Rudi začne službovati v kraju A. Tja prihaja nadzornik v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 1 prihod na mesec. Vsakič, ko pride, z verjetnostjo $1/2$ premesti Rudija v kraj B. Tam pa prihaja nadzornik v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 1 prihod na 2 meseca in vsakič, ko pride, ga spet z verjetnostjo $1/2$ premesti v kraj A. Privzamemo, da so določitve o premestitvah neodvisne tako med seboj kot tudi od časov obiskov.

    Dokažite, da obiski nadzornikov, ki doletijo Rudija, tvorijo prenovitveni proces z zaostankom, in izračunajte njegovo prenovitveno mero.

13. Določite prenovitveno mero procesa, kjer je čas prvega prihoda porazdeljen enakomerno na intervalu od 0 do a, preostali medprihodni časi pa eksponentno s parametrom λ.

14. Proces štetja, ki ga ponazorimo z množico prihodov $\mathcal{P}$, je *stacionaren*, če je proces $\mathcal{P}^{t\rightarrow}$ za vse $t \geq 0$ porazdeljen enako kot $\mathcal{P}$. Denimo, da je prenovitveni proces z zaostankom stacionaren in da poznamo porazdelitev njegovih medprihodnih časov $T_2, T_3, \ldots$. Določite porazdelitev časa T_1.

REŠITVE

1. Ponovitev izbranih tem iz teorije verjetnosti

1. a) Če ima T vrednosti v $\mathbb{N}_0$, velja:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}(T > n)\,,$$

od koder sledi želeni rezultat.

b) Po prejšnji točki dobimo:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+3)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right] = 1\,.$$

Opomba. Izračun s pomočjo točkastih verjetnosti je precej bolj zapleten – za $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, torej bi morali izračunati $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2. a) Velja:

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{1}(t < T)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{1}(T > t)\,.$$

Želeni rezultat tako sledi iz Fubinijevega izreka.

b) Po prejšnji točki dobimo:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3} = -\left.\frac{1}{2(1+t)^2}\right|_0^\infty = \frac{1}{2}\,.$$

Opomba. Seveda gre tudi brez uporabe prejšnje točke – slučajna spremenljivka T je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_T(t) = \frac{3}{(1+t)^4}$$

in matematično upanje je tako enako:

$$\mathbb{E}(T) = 3\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+t)^3} - \frac{1}{(1+t)^4}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= -\left.\left(\frac{3}{2(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}\right)\right|_0^\infty = \frac{1}{2}\,.$$

Izračun je spet bolj zapleten.

3. Označimo z S število šestic, s T pa število metov. Pogojno na T je tedaj $S \sim \mathrm{Bin}(T, 1/6)$, torej je:

$$\mathbb{P}(S = 0 \mid T) = \left(\frac{5}{6}\right)^T \quad \text{in} \quad \mathbb{E}(S \mid T) = \frac{T}{6}\,.$$

Ker je:

$$T \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

končno velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = 0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{635}{864} \doteq 0{\cdot}735\,, \\ \mathbb{E}(S) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{24} \doteq 0{\cdot}292\,. \end{aligned}$$

4. Vsi časi razen tistih v točkah d), g) in j) so časi ustavljanja.

5. a) Pišimo:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \, \mathbb{1}(T \ge n)\,.$$

Ker je dogodek $\{T \ge n\} = \{T > n-1\}$ nasproten dogodku $\{T \le n-1\}$, se deterministično izraža z $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$, torej je neodvisen od X_n. Sledi:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)\, \mathbb{P}(T \ge n) = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \ge n) = \mu\, \mathbb{E}(T)\,.$$

(glej 1. nalogo).

b) Ker je $\mu = 0$, je po prejšnji točki tudi $\mathbb{E}(S) = 0$, torej je $\mathrm{var}(S) = \mathbb{E}(S^2)$. Pišimo:

$$S^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n^2 - S_{n-1}^2)\, \mathbb{1}(T \ge n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2X_n S_{n-1} + X_n^2)\, \mathbb{1}(T \ge n)\,,$$

kjer je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Torej zaradi neodvisnosti velja:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(S) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(2\, \mathbb{E}(X_n)\, \mathbb{E}\big[S_{n-1}\, \mathbb{1}(T \ge n)\big] + \mathbb{E}(X_n^2)\, \mathbb{P}(T \ge n) \Big) = \\ &= \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \ge n) = \\ &= \sigma^2\, \mathbb{E}(T)\,. \end{aligned}$$

Če izpustimo predpostavko, da je $\mu = 0$, rezultat ne velja več nujno: recimo, da pošten kovanec mečemo, dokler ne pade cifra, pri čemer so meti neodvisni. Označimo s T število potrebnih metov. Naj bo $X_n = 1$, če v n-tem metu pade cifra, sicer pa naj bo $X_n = 0$. Tedaj je $S = 1$ ter velja $\mathrm{var}(S) = 0$, $\mathbb{E}(T) = 2$ in $\sigma^2 = 1/4$, torej enakost ne velja.

6. Pričakovano število metov: 2

Pričakovano število grbov: 1 (lahko rešimo z Waldovo identiteto ali pa s pomočjo (pričakovanega) števila cifer).

7. Velja $S_N = 1$ (deterministično), zato je tudi $\mathbb{E}(S_N) = 1$. Toda ker je $N + 1 \sim \mathrm{Geom}\big(\frac{1}{2}\big)$, je $\mathbb{E}(N) = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} - 1 = 3$. Nadalje je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, kjer je X_i indikator dogodka, da je v i-tem metu padla cifra. Ker je $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$, Waldova identiteta ne velja. Slučajna spremenljivka N namreč ni čas ustavljanja.

8. *Prvi način.* Označimo z N število vseh metov in definirajmo naslednje tri hipoteze:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{v prvem metu pade grb}\}\,. \\ H_2 &= \{\text{v prvem metu pade cifra, v drugem pa grb}\}\,. \\ H_3 &= \{\text{v prvih dveh metih pade cifra}\}\,. \end{aligned}$$

Če se zgodi H_3, je očitno $N = 2$ in torej tudi $\mathbb{E}(N \mid H_3) = 2$. Če pa se zgodita H_1 ali H_2, je nadaljnje dogajanje spet zaporedje neodvisnih metov kovanca, zato je $\mathbb{E}(N \mid H_1) = 1 + \mathbb{E}(N)$ in $\mathbb{E}(N \mid H_2) = 2 + \mathbb{E}(N)$. Sledi:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2}\big(1 + \mathbb{E}(N)\big) + \frac{1}{4}\big(2 + \mathbb{E}(N)\big) + \frac{1}{4} \cdot 2\,,$$

od koder sledi $\mathbb{E}(N) = 6$.

Pričakovano število cifer podobno kot v 6. nalogi dobimo iz Waldove identitete, saj je N čas ustavljanja. Enako je $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Drugi način.[1] Rekli bomo, da pade *osnovna cifra*, če pade cifra, ki bodisi izvira iz prvega meta bodisi sledi grbu. Tedaj je število cifer, ki padejo, dokler ne padeta dve zaporedni cifri, enako številu osnovnih cifer, ki padejo, dokler osnovni cifri ne sledi cifra, plus ena. Iz krepke časovno homogene lastnosti Markova za osnovno Bernoullijevo zaporedje metov kovanca (glej 4. nalogo v 2. razdelku) sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da n-ti osnovni cifri z verjetnostjo $1/2$ sledi grb, z verjetnostjo $1/2$ pa cifra (število metov do vključno n-te osnovne cifre je čas ustavljanja). To velja tudi pogojno glede na dogajanje pred n-to osnovno cifro. Če so osnovne cifre poskusi, osnovne cifre, ki jim sledijo cifre, pa uspešni poskusi, dobimo Bernoullijevo zaporedje poskusov, v katerem vsak uspe z verjetnostjo $1/2$. Zato je število osnovnih cifer do vključno tiste, ki ji sledi cifra, porazdeljeno geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/2)$, torej je matematično upanje tega števila enako 2. Matematično upanje števila cifer, ki padejo, dokler ne padeta dve zaporedni cifri, pa je enako $2 + 1 = 3$.

Za izračun matematičnega upanja *vseh* metov, dokler ne padeta dve zaporedni cifri, pa lahko uporabimo Waldovo identiteto v nasprotno smer kot pri prvem načinu. Tako dobimo $\mathbb{E}(N) = 3/(1/2) = 6$.

9. a) Če uporabimo 5. nalogo za slučajne spremenljivke $Y_i := X_i - \mu$ in označimo $U := Y_1 + \cdots + Y_T = S - \mu T$, dobimo $\mathrm{var}(U) = \mathbb{E}(U^2) = \sigma^2\,\mathbb{E}(T)$. Torej je:

$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}(U^2) + 2\mu\,\mathbb{E}(UT) + \mu^2\,\mathbb{E}(T^2)\,.$$

Nadalje velja $\mathbb{E}(UT) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(UT \mid T)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(U \mid T)T\big]$. Ker so slučajne spremenljivke $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne od T, je $\mathbb{E}(Y_n \mid T) = \mathbb{E}(Y_n) = 0$ za vse n in posledično

[1] Idejo dal Timotej Akrapovič.

tudi $\mathbb{E}(U \mid T) = 0$, zato je tudi $\mathbb{E}(UT) = 0$. Ko vstavimo še rezultat za $\mathbb{E}(U^2)$, dobimo:

$$\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2\,\mathbb{E}(T) + \mu^2\,\mathbb{E}(T^2)$$

in končno:

$$\operatorname{var}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mu^2\big(\mathbb{E}(T)\big)^2 = \sigma^2\,\mathbb{E}(T) + \mu^2\operatorname{var}(T)\,.$$

Opomba: prvi člen predstavlja varianco, nepojasnjeno s T, t. j. $\mathbb{E}\big[\operatorname{var}(S \mid T)\big]$, drugi člen pa je varianca, pojasnjena s T, t. j. $\operatorname{var}\big[\mathbb{E}(S \mid T)\big]$.

b) Velja:

$$\mathbb{E}\big[z^S \bigm| T = n\big] = \mathbb{E}(z^{S_n}) = \big[G_X(z)\big]^n\,,$$

torej $\mathbb{E}(z^S \mid T) = \big[G_X(z)\big]^T$, od koder dobimo:

$$\mathbb{E}(z^S) = G_T\big(G_X(z)\big)\,.$$

Če predpostavko, da je T neodvisna od $X_1, X_2, \ldots$, zamenjamo s šibkejšo predpostavko, da je T čas ustavljanja glede na $0, X_1, X_2, \ldots$, nobena od enakosti ne velja več nujno. Kot protiprimer lahko tako kot v 5. nalogi vzamemo pošten kovanec, ki ga mečemo, dokler ne pade cifra, pri čemer so meti neodvisni. Spet naj bo T število potrebnih metov ter $X_n = 1$, če v n-tem metu pade cifra, sicer pa naj bo $X_n = 0$ (torej je $S = 1$). Ni se težko prepričati, da nobena od prej dokazanih zvez ne velja.

10. a) Označimo z R_t dogodek, da se ob času t zgodi rekord. Opazimo, da je ta dogodek odvisen le od vrstnega reda slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Ker so te slučajne spremenljivke izmenljive, je vseh $t!$ vrstnih redov enako verjetnih; ker je porazdelitev slučajnih spremenljivk zvezna, so z verjetnostjo 1 vse vrednosti različne. Ker se dogodek R_t zgodi pri $(t-1)!$ vrstnih redih, mora biti $\mathbb{P}(R_t) = 1/t$.

Bolj formalno, slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_t$ uredimo po velikosti: $X^{(t)}_{(1)} < X^{(t)}_{(2)} < \cdots < X^{(t)}_{(n)}$. Slučajni spremenljivki $X^{(t)}_{(i)}$ pravimo *i-ta vrstilna statistika* (to je tudi i-ti prihodni čas v procesu štetja z množico prihodov $M = \{X_1, \ldots, X_t\}$). Nadalje z $\rho^{(t)}_j$ označimo *rang* j-te slučajne spremenljivke med prvimi t, to je njen položaj v lestvici. Natančneje, $\rho^{(t)}_j = i$, če je $X_j = X^{(t)}_{(i)}$.

Zaradi izmenljivosti slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ je porazdelitev vektorja rangov $\rho^{(t)}_1, \rho^{(t)}_2, \ldots, \rho^{(t)}_t$ enakomerna na množici vseh permutacij t elementov. Torej je tudi rang $\rho^{(t)}_t$ porazdeljen enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, t\}$. Sledi $\mathbb{P}(R_t) = \mathbb{P}\big(\rho^{(t)}_t = t\big) = 1/t$.

b) Ugotovili smo že, da je dogodek R_t natančno določen z vrstnim redom slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_t$. Če predpišemo vrstni red slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$, lahko le tega razširimo v t možnih redov slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_t$, od katerih se pri natanko enem zgodi dogodek R_t. Torej je *pogojna* verjetnost dogodka R_t glede na vrstni red slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_{t-1}$ enaka $1/t$, neodvisno od dejanskega vrstnega reda. To pa pomeni, da je dogodek R_t neodvisen od tega vrstnega reda in zato tudi od $R_1, \ldots, R_{t-1}$.

Bolj formalno, ker je porazdelitev vektorja rangov $\rho_1^{(t)}, \rho_2^{(t)}, \ldots, \rho_t^{(t)}$ enakomerna na množici vseh permutacij t elementov, je tudi *pogojna* porazdelitev ranga $\rho_t^{(t)}$ glede na $\rho_1^{(t-1)}, \rho_2^{(t-1)}, \ldots, \rho_{t-1}^{(t-1)}$ enakomerna na množici $\{1, 2, \ldots, t\}$, zato je pogojna verjetnost dogodka R_t glede na $\rho_1^{(t-1)}, \ldots, \rho_{t-1}^{(t-1)}$ (in zato glede na $R_1, \ldots, R_{t-1}$) enaka $1/t$.

Opomba. Dogodek R_t je resda neodvisen od $\rho_1^{(t-1)}, \rho_2^{(t-1)}, \ldots, \rho_{t-1}^{(t-1)}$, ni pa neodvisen tudi od $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}$.

c) Če z I_t označimo *indikator* dogodka R_t, t. j.:

$$I_t = \mathbb{1}(R_t) = \begin{cases} 1 & ; \text{ob času } t \text{ se zgodi rekord} \\ 0 & ; \text{ob času } t \text{ se ne zgodi rekord} \end{cases},$$

velja $N_t = I_1 + I_2 + \cdots + I_t$ ter nadalje $\mathbb{E}(I_t) = 1/t$ in $\mathrm{var}(I_t) = (t-1)/t^2$. Torej je:

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(I_2) + \cdots + \mathbb{E}(I_t) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{t} \sim \ln t$$

in zaradi neodvisnosti še:

$$\mathrm{var}(N_t) = \mathrm{var}(I_1) + \mathrm{var}(I_2) + \cdots + \mathrm{var}(I_t) = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{t-1}{t^2} \sim \ln t\,.$$

d) Dogodek $\{S > t\}$ je ekvivalenten dogodku, da je X_1 najvišja izmed vrednosti $X_1, X_2, \ldots, X_t$, torej dogodku, da je $\rho_1^{(t)} = t$. Verjetnost tega dogodka je $1/t$. Torej je $\mathbb{P}(S = \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(S > t) = 0$. Za $t = 2, 3, 4, \ldots$ pa velja:

$$\mathbb{P}(S = t) = \mathbb{P}(S > t-1) - \mathbb{P}(S > t) = \frac{1}{t(t-1)}\,.$$

Torej je $\mathbb{E}(S) = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t-1} = \infty$.

Opomba. Čeprav je matematično upanje neskončno, pa so je pogojno matematično upanje glede na vrednost prve meritve X_1 končno – velja:

$$\mathbb{E}(S \mid X_1) = 1 + \frac{1}{1 - F(X_1)}\,,$$

kjer je F kumulativna porazdelitvena funkcija slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ (pogojno glede na X_1 je namreč število nadaljnjih poskusov, ki so potrebni, da presežemo vrednost X_1, porazdeljeno geometrijsko $\mathrm{Geom}(1 - F(X_1))$). Toda integracija v brezpogojno matematično upanje da neskončen rezultat: če z $f = F'$ označimo gostoto, dobimo:

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(S \mid X_1)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - F(x)}\, f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

in substitucija $t = F(x)$ nam da:

$$\mathbb{E}(S) = \int_0^1 \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \infty\,.$$

e) Pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $X_{S^{(y)}}$ glede na dogodek $\{S^{(y)} = t\}$ je enaka pogojni porazdelitvi slučajne spremenljivke X_t glede na dogodek $\{X_1 \le y, X_2 \le y, \dots, X_{t-1} \le y, X_t > y\}$, ta pa zaradi neodvisnosti sovpada s pogojno porazdelitvijo glede na dogodek $\{X_t > y\}$. Sledenja pa je neodvisna od t.

2. Procesi štetja

1. a) Če s p označimo verjetnost, da ob danem času pride do prihoda, velja $N_t \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ in $N_t - N_s \sim \mathrm{Bin}(t - s, p)$. Sledi:

- Če so $I_1, I_2, \ldots, I_t$ neodvisne Bernoullijeve slučajne spremenljivke s $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p$, je $I_1 + I_2 + \cdots + I_t \sim \mathrm{Bin}(t, p)$.
- Če sta $X \sim \mathrm{Bin}(k, p)$ in $Y \sim \mathrm{Bin}(l, p)$ neodvisni, je $X + Y \sim \mathrm{Bin}(k + l, p)$.

b) Te slučajne spremenljivke so neodvisne.

c) Iz osnovne ekvivalence dobimo:

$$\mathbb{P}(S_1 \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - (1 - p)^t \,.$$

Formula je pravilna za $t = 0, 1, 2, \ldots$, torej za $t \in \mathbb{N}$ velja:

$$\mathbb{P}(S_1 = t) = \mathbb{P}(S_1 \le t) - \mathbb{P}(S_1 \le t - 1) = p(1 - p)^{t-1} \,,$$

torej je $S_1 \sim \mathrm{Geom}(p)$.

d) Splošneje velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = t) &= \mathbb{P}(S_n \le t, S_n > t - 1) = \mathbb{P}(N_t \ge n, N_{t-1} < n) = \\ &= \mathbb{P}(N_{t-1} = n - 1, \text{ob času } t \text{ se zgodi prihod}) = \\ &= \mathbb{P}(N_{t-1} = n - 1)\,\mathbb{P}(\text{ob času } t \text{ se zgodi prihod}) = \\ &= \binom{t-1}{n-1} p^n (1 - p)^{t-n} \,,\end{aligned}$$

torej je $S_n \sim \mathrm{NegBin}(n, p)$.

2. Za n-ti prihod po osnovni ekvivalenci velja:

$$F_{S_n}(t) = \mathbb{P}(S_n \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge n) = \mathbb{P}(N_t + 1 > n) = \left(1 - e^{-t}\right)^n \,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_1) &= \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 \,, \\ \mathbb{E}(S_2) &= \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-t}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(2\,e^{-t} - e^{-2t}\right) \mathrm{d}t = \frac{3}{2} \,.\end{aligned}$$

3. *Prvi način.* Velja $N_t \sim \mathrm{Bin}(n, t)$. Iz osnovne ekvivalence $\{S_k \le t\} = \{N_t \ge k\}$ dobimo kumulativno porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke S_k:

$$F_{S_k}(t) = \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} t^l (1 - t)^{n-l} \,; \quad 0 \le t \le 1 \,.$$

Z odvajanjem dobimo še porazdelitveno gostoto (pazimo na zadnji člen):

$$\begin{aligned} f_{S_k}(t) &= \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} \Big[l\, t^{l-1} (1-t)^{n-l} - (n-l) t^l (1-t)^{n-l-1} \Big] = \\ &= \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} l\, t^{l-1}(1-t)^{n-l} - \sum_{l=k}^{n-1} \binom{n}{l} (n-l) t^l (1-t)^{n-l-1} = \\ &= \sum_{l=k}^{n} \frac{n!}{(l-1)!\,(n-l)!}\, t^{l-1}(1-t)^{n-l} - \sum_{l=k}^{n-1} \frac{n!}{l!\,(n-l-1)!}\, t^l (1-t)^{n-l-1} = \\ &= \sum_{l=k}^{n} \frac{n!}{(l-1)!\,(n-l)!}\, t^{l-1}(1-t)^{n-l} - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!}\, t^{j-1}(1-t)^{n-j} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,. \end{aligned}$$

Dobili smo *porazdelitev beta*: $S_k \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1)$.

Drugi način. Gostoto zlahka dobimo z naslednjim fizikalnim, a matematično ne ravno korektnim premislekom: dogodek $\{S_k \in [t, t+\mathrm{d}t]\}$ pomeni, da je do časa t prišlo $k-1$ gostov, en gost je prišel v infinitezimalnem časovnem intervalu od t do $t+\mathrm{d}t$, preostalih $n-k$ gostov pa je prišlo od časa $t+\mathrm{d}t$ naprej. Torej je:

$$\mathbb{P}(S_k \in [t, t+\mathrm{d}t]) = \frac{n!}{(k-1)!\,1!\,(n-k)!} t^{k-1}\,\mathrm{d}t\,(1-t)^{n-k}\,,$$

od koder sledi:

$$f_{S_k}(t) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,,$$

kar je isto kot prej. Korektna izpeljava pa je naslednja: za $0 \le t < t+h \le 1$ iz osnovne ekvivalence sledi:

$$F_{S_k}(t+h) - F_{S_k}(t) = \mathbb{P}(N_{t+h} \ge k) - \mathbb{P}(N_t \ge k)\,.$$

Ker je $\{N_t \ge k\} \subseteq \{N_{t+h} \ge k\}$, je tudi:

$$\begin{aligned} F_{S_k}(t+h) - F_{S_k}(t) &= \mathbb{P}(N_t < k, N_{t+h} \ge k) = \\ &= \mathbb{P}(N_t < k, N_1 - N_{t+h} \le n-k) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} \mathbb{P}(N_t = i, N_{t+h} - N_t = n-i-j, N_1 - N_{t+h} = j) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{i!\,(n-i-j)!\,j!}\, t^i h^{n-i-j} (1-t-h)^j\,. \end{aligned}$$

Opazimo, da je eksponent pri h vselej najmanj 1. Če delimo s h in naredimo limito, ko gre h proti nič, na levi strani dobimo natanko *desni* odvod funkcije F_{S_k} v točki

t. Na desni strani pa ostanejo le členi s h^1, to pa je le člen z $i = k-1$ in $j = n-k$. Torej je prej omenjeni desni odvod enak:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,,$$

kar je spet isto kot prej. Dokazati moramo le še, da enako velja tudi za *levi* odvod. Za $0 \le t-h < t \le 1$ podobno kot prej izračunamo:

$$F_{S_k}(t) - F_{S_k}(t-h) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{i!\,(n-i-j)!\,j!}\,(t-h)^i h^{n-i-j}(1-t)^j\,.$$

in limita, ko gre h proti nič, je ista kot prej. To pomeni, da je F_{S_k} na celotnem intervalu $(0,1)$ odvedljiva, in ni se težko prepričati, da je odvod zvezen. Poleg tega je F_{S_k} povsod zvezna. Sledi:

$$f_{S_k}(t) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,.$$

4. a) Da je $\mathcal{P}^{t\rightarrow}$ neodvisen od $\mathcal{P}^{\not\rightarrow t}$, sledi iz neodvisnosti dogodkov, da se ob določenem času zgodi prihod (in izreka o neodvisnosti izpeljanih dogodkov). Da pa je porazdeljen enako kot $\mathcal{P}$, sledi iz tega, da ima lastnosti, ki določajo $\mathcal{P}$, in da te lastnosti natančno določajo porazdelitev.

b) Proces $\mathcal{P}^{T\rightarrow}$ zavzame vrednosti v množici $\wp(\mathbb{N})$, potenčni množici množice naravnih števil. Proces $\mathcal{P}^{\not\rightarrow T}$ pa zavzame vrednosti v množici $\wp_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, množici vseh končnih podmnožic množice naravnih števil. Vzemimo poljubni merljivi množici $A \subseteq \wp_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ in $B \subseteq \wp(\mathbb{N})$ ter poljuben $t \in \mathbb{N}$. Oglejmo si naslednjo pogojno verjetnost:

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{P}^{T\rightarrow} \in B \bigm| T = t, \mathcal{P}^{\not\rightarrow T} \in A\big) = \mathbb{P}\big(\mathcal{P}^{t\rightarrow} \in B \bigm| T = t, \mathcal{P}^{\not\rightarrow t} \in A\big)$$

(ki ima smisel, če je $\mathbb{P}\big(T = t, \mathcal{P}^{\not\rightarrow t} \in A\big) > 0$). Toda dogodek $\{T = t\}$ je deterministično določen z $\mathcal{P}^{\not\rightarrow t}$. To pa pomeni, da obstaja taka množica $C_t \subseteq \wp(\{1,\ldots,t\})$, da je $\{T = t\} = \{\mathcal{P}^{\not\rightarrow t} \in C_t\}$. Iz običajne časovno homogene lastnosti Markova zdaj sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\mathcal{P}^{T\rightarrow} \in B \bigm| T = t, \mathcal{P}^{\not\rightarrow T} \in A\big) &= \mathbb{P}\big(\mathcal{P}^{t\rightarrow} = B \bigm| \mathcal{P}^{\not\rightarrow t} = A \cap C_t\big) = \\
&= \mathbb{P}\big(\mathcal{P}^{t\rightarrow} = B\big) = \\
&= \mathbb{P}\big(\mathcal{P} = B\big)\,,
\end{aligned}$$

od koder sledi želeno.

5. Prvi del (pozabljivost) lahko preverimo na vsaj dva načina.

Prvi način. Z neposrednim izračunom preverimo:

$$\mathbb{P}(T = t+s \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T = t+s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{p(1-p)^{t+s-1}}{(1-p)^t} = p(1-p)^{s-1} = \mathbb{P}(T = s)\,.$$

Drugi način. Oglejmo si Bernoullijevo zaporedje poskusov, kjer vsak poskus uspe z verjetnostjo p, in ga obravnavajmo kot proces štetja. Če je $T = S_1$ čas prvega prihoda, iz točke b) 1. naloge vemo, da je le-ta porazdeljen geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$. Dogodek $\{T > t\}$ se ujema z dogodkom, da do vključno časa t še ni prišlo do prihoda. Če spet z $\mathcal{P}$ označimo množico prihodnih časov in s T' prvi (med)prihodni čas v procesu $\mathcal{P}^{t\to}$, na dogodku $\{T > t\}$ velja $T' = T - t$, torej se na tem dogodku dogodka $\{T = t + s\}$ in $\{T' = s\}$ ujemata. Ker je dogodek $\{T > t\}$ možno deterministično opisati z množico $\mathcal{P}^{\to\mid t}$, je T' neodvisen od $\{T > t\}$ in porazdeljen tako kot T, se pravi, da je pogojno glede na $\{T > t\}$ porazdeljen tako kot T. Od tod pa že sledi zahtevana enakost.

Naj bo zdaj T pozabljiva slučajna spremenljivka. Iz pozabljivosti sledi tudi:

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$$

za vse $s \in \mathbb{N}_0$ in tudi za vse $t \in \mathbb{N}_0$. Z drugimi besedami:

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t)\,\mathbb{P}(T > s)\,.$$

Torej velja tudi:

$$\mathbb{P}(T > t + 1) = \mathbb{P}(T > t)\,\mathbb{P}(T > 1)$$

in če označimo $q := \mathbb{P}(T > 1)$, sledi:

$$\mathbb{P}(T > t) = q^t\,.$$

Tu mora biti $0 < q < 1$: možnost $q = 0$ odpade, ker mora imeti pogojna verjetnost v $(*)$ smisel, možnost $q = 1$ pa, ker bi v tem primeru iz verjetnosti števnega preseka naraščajočega zaporedja dogodkov dobili, da je $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}) = 0$. Končno dobimo:

$$\mathbb{P}(T = t) = \mathbb{P}(T > t - 1) - \mathbb{P}(T > t) = (1 - q)q^{t-1}\,,$$

kar pomeni, da je T res porazdeljena geometrijsko.

6. a) Sledi iz osnovne ekvivalence $\{S_n \le t\} = \{N_t \ge n\}$. Tako dobimo, da je proces $\mathcal{P}^{S_n\to}$ neodvisen od $\left(S_n, \mathcal{P}^{\to\mid S_n}\right)$ in porazdeljen enako kot $\mathcal{P}$.

b) n-ti medprihodni čas procesa $\mathcal{P}$ ustreza prvemu medprihodnemu času procesa $\mathcal{P}^{S_{n-1}\to}$. Iz prejšnje točke sledi, da je potem T_n porazdeljen enako kot T_1 in neodvisen od $(S_{n-1}, \mathcal{P}^{S_{n-1}\to})$, torej tudi od $(T_1, \ldots, T_{n-1})$. Torej so vsi medprihodni časi T_n neodvisni in porazdeljeni geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$. Sledi:

- Če so $T_1, T_2, \ldots, T_n$ neodvisne in porazdeljene geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$, je $T_1 + T_2 + \cdots + T_n \sim \mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Če sta $X \sim \mathrm{NegBin}(k, p)$ in $Y \sim \mathrm{NegBin}(l, p)$ neodvisni, je $X + Y \sim \mathrm{NegBin}(k + l, p)$.

c) Razlika $S_n - S_m$ ustreza $(n - m)$-temu medprihodnemu času procesa $\mathcal{P}^{S_m\to}$, torej je porazdeljena enako kot S_{n-m}, se pravi negativno binomsko $\mathrm{NegBin}(n - m, p)$.

3. Homogeni Poissonov proces

1. a) Čas od odprtja ambulante do sprejema prvega pacienta je tretji prihodni čas S_3, ki ima porazdelitev Gama$(3, 6)$, njegova pričakovana vrednost pa je $3 \cdot 1/6 = 1/2$, torej pol ure.

b) $\mathbb{P}(N_1 < 3) = \mathrm{Pois}(6)\{0, 1, 2\} = \sum_{k=0}^{2} \frac{6^k e^{-6}}{k!} = 25\, e^{-6} \doteq 0{,}0620.$

2. a) Naj bo najprej $s > t$. Tedaj je $N_s - N_t$ neodvisna od N_t, zato velja:

$$\mathrm{cov}(N_t, N_s) = \mathrm{cov}(N_t, N_t) + \mathrm{cov}(N_t, N_s - N_t) = \mathrm{var}(N_t) = \lambda t\,.$$

V splošnem torej velja $\mathrm{cov}(N_t, N_s) = \lambda \min\{t, s\}$.

b) $\mathrm{corr}(N_t, N_s) = \dfrac{\min\{t, s\}}{\sqrt{ts}}$.

c) $\lambda \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$.

3. a) Igralec dobi igro, če pride med časoma s in 1 do natanko enega zvonjenja. Ker je število zvonjenj v tem časovnem intervalu porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(\lambda(1-s)\big)$, je verjetnost dogodka, da igralec dobi igro, enaka:

$$\lambda(1-s)\, e^{-\lambda(1-s)}\,.$$

b) Funkcija $t \mapsto t\, e^{-t}$ na intervalu $[0, 1]$ narašča, pri $t = 1$ doseže maksimum e^{-1}, na intervalu $[1, \infty)$ pa pada. Namesto t zdaj vstavimo izraz $\lambda(1-s)$, ki lahko preteče interval od 0 do λ. Če je $\lambda < 1$, torej ta izraz ne more doseči 1 in maksimalna verjetnost, da igralec dobi igro, je dosežena pri $s = 0$, enaka pa je $\lambda\, e^{-\lambda}$. Pri $\lambda \geq 1$ pa izraz $\lambda(1-s)$ doseže vrednost 1 pri $s = (\lambda - 1)/\lambda$ in maksimalna verjetnost, da igralec dobi igro, je e^{-1}.

4. Računamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k \mid Z = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, Z = n)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n} = \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

torej je iskana pogojna porazdelitev binomska $\mathrm{Bin}\left(Z, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

5. a) Pogojno na N je $S \sim \mathrm{Bin}(N, p)$, t. j.:

$$\mathbb{P}(S = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,; \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Po izreku o polni verjetnosti izračunamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}(S = k \mid N = n) = \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n\, e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \frac{\lambda^n p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \\
&= \frac{(p\lambda)^k\, e^{-p\lambda}}{k!}\,.
\end{aligned}$$

Torej je $S \sim \mathrm{Pois}(p\lambda)$. Podobno je tudi $T \sim \mathrm{Pois}((1-p)\lambda)$.

b) Velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k, T = l) = \mathbb{P}(S = k, N = k + l) = \mathbb{P}(N = k + l)\,\mathbb{P}(S = k \mid N = k + l) = \\
= \frac{\lambda^{k+l}\, e^{-\lambda}}{(k+l)!} \binom{k+l}{k} p^k (1-p)^l = \frac{\lambda^{k+l}\, p^k (1-p)^l\, e^{-\lambda}}{k!\, l!} = \\
= \mathbb{P}(S = k)\,\mathbb{P}(T = l)\,,
\end{aligned}$$

torej sta S in T res neodvisni.

c) Če je $N = n$ kar konstanta, sta S in T odvisni, brž ko je $n \geq 1$ in $0 < p < 1$: v tem primeru namreč S in T zavzameta vsaj dve vrednosti (s pozitivno verjetnostjo), a če je $S = k$, je nujno $T = n - k$.

6. Glede na to, da se pri eksponentni porazdelitvi najlepše izraža *funkcija preživetja*:

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}\,; \quad t \geq 0\,,$$

je pozabljivost prikladneje zapisati v naslednji obliki:

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$$

in jo lahko preverimo na vsaj dva načina.

Prvi način. Z neposrednim izračunom preverimo:

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s)\,.$$

Drugi način. Gledamo homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo λ in sklepamo tako kot pri 5. nalogi iz 2. razdelka.

Naj bo zdaj T pozabljiva slučajna spremenljivka. Če z $G(t) := \mathbb{P}(T > t)$ označimo funkcijo preživetja, tedaj za vse $t, s \geq 0$ velja:

$$G(t+s) = G(t)\,G(s)\,.$$

Ker je gostota zvezna na $(0, \infty)$, je funkcija preživetja tam zvezno odvedljiva, v 0 pa ima desni odvod. Z odvajanjem po s dobimo diferencialno enačbo:

$$G'(t) = G(t)\,G'(0)\,.$$

Poleg tega iz dejstva, da je gostota zunaj intervala $(0, \infty)$ enaka nič, sledi začetni pogoj $G(0) = 1$. Tako dobimo enolično določeno rešitev:

$$G(t) = e^{G'(0)\,t}\,; \quad t \geq 0\,,$$

kar pomeni, da je T res porazdeljena eksponentno.

7. Pri minimumu si pomagamo s funkcijo preživetja:

$$\mathbb{P}(U > u) = \mathbb{P}(X > u, Y > u) = \mathbb{P}(X > u)\,\mathbb{P}(Y > u) = e^{-(\lambda+\mu)u}\,.$$

To pomeni, da je $U \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \mu)$.

Pri maksimumu pa se opremo na kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(X \leq v, Y \leq v) = \mathbb{P}(X \leq v)\,\mathbb{P}(Y \leq v) = \left(1 - e^{-\lambda v}\right)\left(1 - e^{-\mu v}\right).$$

Slučajna spremenljivka V je torej porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_V(v) = \begin{cases} \lambda\,e^{-\lambda v} + \mu\,e^{-\mu v} - (\lambda+\mu)\,e^{-(\lambda+\mu)v} & ;\ v > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

8. Za n-ti klic, na katerega se gasilci lahko odzovejo, naj bo R_n dogodek, da se bodo lahko odzvali na *naslednji* klic, ki ga bodo prejeli. Tedaj se število klicev, na katere se odzovejo gasilci, preden je potrebno kakšen klic preusmeriti, ujema s prvim indeksom n, za katerega se dogodek R_n ne zgodi.

Po *krepki časovno homogeni lastnosti Markova* se proces od zaključka n-te intervencije naprej obnaša tako kot od začetka. Od tod sledi, da so dogodki $R_1, R_2, \ldots$ neodvisni in enako porazdeljeni. Verjetnost, da se posamezen dogodek zgodi, pa dobimo tako, da vzamemo kar neodvisni slučajni spremenljivki T in U, kjer je $T \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$ in $U \sim \mathrm{Unif}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)$. Velja:

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(T_2 > U_1) = \int_{1/2}^{1} \int_{u}^{\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = 4\left(e^{-1/4} - e^{-1/2}\right) \doteq 0{\cdot}689\,,$$

torej ima iskano število klicev porazelitev $\mathrm{Geom}\left(1 - 4e^{-1/4} + 4e^{-1/2}\right) \doteq \mathrm{Geom}(0{\cdot}311)$.

9. a) Za $0 \le s \le t$ velja:

$$\begin{aligned}
F_{S_1 \mid N_t = 1}(s) &= \mathbb{P}(S_1 \le s \mid N_t = 1) = \\
&= \mathbb{P}(N_s \ge 1 \mid N_t = 1) = \\
&= \mathbb{P}(N_s = 1 \mid N_t = 1) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1)\, \mathbb{P}(N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \\
&= \frac{\lambda s\, e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t\, e^{-\lambda t}} = \\
&= \frac{s}{t}\,,
\end{aligned}$$

od koder sledi, da gre za enakomerno porazdelitev na intervalu $(0, t)$.

b) Podobno kot prej za $0 \le s \le t$ izračunamo:

$$\begin{aligned}
F_{S_2 \mid N_t = 2}(s) &= \mathbb{P}(N_s \ge 2 \mid N_t = 2) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 2, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 2)} = \\
&= \frac{s^2}{t^2}\,,
\end{aligned}$$

od koder dobimo $f_{S_2 \mid N_t = 2}(s) = \dfrac{2s}{t^2}$ in $\mathbb{E}(S_2 \mid N_t = 2) = \dfrac{2t}{3}$.

Nadalje je:

$$\begin{aligned}
F_{S_1 \mid N_t = 2}(s) &= \mathbb{P}(N_s \ge 1 \mid N_t = 2) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t - N_s = 1) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 2)} = \\
&= \frac{2st - s^2}{t^2}\,,
\end{aligned}$$

od koder dobimo $f_{S_1 \mid N_t = 2}(s) = \dfrac{2(t-s)}{t^2}$ in $\mathbb{E}(S_1 \mid N_t = 2) = \dfrac{t}{3}$.

10. *Prvi način.* Pišemo lahko:

$$W = (t - S_1) + (t - S_2) + \cdots + (t - S_{N_t}) = t N_t - S_1 - S_2 - \cdots - S_{N_t}\,.$$

Po prejšnjem se pogojna porazdelitev vsote $S_1 + \cdots + S_{N_t}$ glede na $N_t = n$ ujema z brezpogojno porazdelitvijo vsote $U_{(1)} + \cdots + U_{(n)} = U_1 + \cdots + U_n$, kjer so $U_1, \ldots, U_n$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na $(0, t)$, $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ pa njihove vrstilne statistike. Torej lahko slučajne spremenljivke $S_1, S_2, \ldots$ zamenjamo s slučajnimi spremenljivkami $U_1, U_2, \ldots$, ki so porazdeljene enakomerno na $(0, t)$ in neodvisne tako med seboj kot tudi od N_t. Dobimo:

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}\big(tN_t - U_1 - U_2 - \cdots - U_{N_t}\big)\,.$$

Po Waldovi identiteti je:

$$\mathbb{E}(W) = t\,\mathbb{E}(N_t) - \mathbb{E}(U_1)\,\mathbb{E}(N_t) = t \cdot \lambda t - \frac{t}{2} \cdot \lambda t = \frac{\lambda t^2}{2}\,.$$

Drugi način. Opazimo, da je $W = \int_0^t N_s \,\mathrm{d}s$. Sledi:

$$\mathbb{E}(W) = \int_0^t \mathbb{E}(N_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \lambda s \,\mathrm{d}s = \frac{\lambda t^2}{2}\,.$$

11. *Prvi način.* Velja:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\theta(t-S_i)}\,,$$

kjer so $S_1, S_2, \ldots$ prihodni časi. Ali še drugače, če naš proces štetja ponazorimo s slučajno množico $\mathcal{P}$, velja:

$$X(t) = \sum_{s \in \mathcal{P}^{\to\!\!\!\shortmid t}} e^{-\theta(t-s)}\,,$$

Iz točke c) 9. naloge pa sledi:

$$\mathbb{E}\big[X(t) \mid N_t = n\big] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\theta(t-U_i)}\right)\,,$$

kjer so $U_1, U_2, \ldots, U_n$ neodvisne in enakomerno porazdeljene na intervalu $[0, t]$. Torej je:

$$\mathbb{E}\big[X(t) \mid N_t = n\big] = n\,\mathbb{E}\big(e^{-\theta(t-U_1)}\big) = n\,\frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta t}$$

oziroma:

$$\mathbb{E}\big[X(t) \mid N_t\big] = N_t\,\frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta t}$$

in končno:

$$\mathbb{E}\big[X(t)\big] = \frac{\lambda(1 - e^{-\theta t})}{\theta}\,.$$

Drugi način. Skupni učinek šokov zapišimo kot Riemann–Stieltjesov integral:

$$X(t) = \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\,\mathrm{d}N_s$$

in uporabimo integracijo po delih:

$$X(t) = N_t - \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\,N_s \,\mathrm{d}s$$

Sledi (upoštevamo $\int e^{\theta s}\,\mathrm{d}s = \left(\frac{s}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\right)e^{\theta s} + C$):

$$\mathbb{E}\big[X(t)\big] = \lambda t - \lambda\theta \int_0^t s\,e^{-\theta(t-s)}\,\mathrm{d}s = \frac{\lambda(1 - e^{-\theta t})}{\theta}\,.$$

12. *Prvi način.* Označimo iskani čas s T in, kot ponavadi, s T_1 prvi prihodni čas. Če je $T_1 \ge c$, je $T = c$. Sicer pa uporabimo krepko časovno homogeno lastnost Markova za čas ustavljanja T_1: od takrat naprej se začne vse dogajati na novo. Torej velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T \mid T_1) &= \begin{cases} c & ;\ T_1 \ge c \\ T_1 + \mathbb{E}(T) & ;\ T_1 < c \end{cases} = \\ &= c\,\mathbb{1}(T_1 \ge c) + \big(T_1 + \mathbb{E}(T)\big)\,\mathbb{1}(T_1 < c)\,.\end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= c\,\mathbb{P}(T_1 \ge c) + \mathbb{E}\big[T_1\,\mathbb{1}(T_1 < c)\big] + \mathbb{E}(T)\,\mathbb{P}(T_1 < c) = \\ &= c\lambda \int_c^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + \lambda\int_0^c t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + \mathbb{E}(T)\int_0^c e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda c}}{\lambda} + \mathbb{E}(T)\big(1 - e^{-\lambda c}\big)\end{aligned}$$

in končno:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{e^{\lambda c} - 1}{\lambda}\,.$$

Drugi način. Če z N označimo zaporedno številko avtomobila, pred katerim lahko varno prečka cesto, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ velja:

$$\{N = n\} = \{T_1 < c,\ T_2 < c, \ldots, T_{n-1} < c,\ T_n \ge c\}\,. \qquad (*)$$

Na dogodku $\{N = n\}$ velja $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + c$. Nadalje za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ zaradi neodvisnosti velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_i \mid N = n) &= \mathbb{E}(T_i \mid T_i < c) = \frac{\mathbb{E}\big[T_i\,\mathbb{1}(T_i < c)\big]}{\mathbb{P}(T_i < c)} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda c}}\int_0^c \lambda t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{c\,e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}}\,.\end{aligned}$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = (N-1)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{c\,e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}}\right) + c\,.$$

Ker je N porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}\big(\mathbb{P}(T_1 \ge c)\big) = \mathrm{Geom}\big(e^{-\lambda c}\big)$, je $\mathbb{E}(N) = e^{\lambda c}$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \big(\mathbb{E}(N) - 1\big)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{c\,e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}}\right) + c = \frac{e^{\lambda c} - 1}{\lambda}\,.$$

Tretji način. Držimo se oznak iz drugega načina in iz izražave $(*)$ razberemo, da je N čas ustavljanja. Pišimo:

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N + c - T_N\,.$$

Po Waldovi identiteti velja:

$$\mathbb{E}(T_1 + T_2 + \cdots + T_N) = \mathbb{E}(T_1)\,\mathbb{E}(N) = \frac{e^{\lambda c}}{\lambda}\,.$$

Nadalje iz (∗), neodvisnosti in pozabljivosti eksponentne porazdelitve dobimo:

$$\mathbb{E}(T_N \mid N = n) = \mathbb{E}(T_n \mid T_n \geq c) = c + \frac{1}{\lambda}\,,$$

torej je tudi $\mathbb{E}(T_N) = c + \frac{1}{\lambda}$. Ko vse skupaj seštejemo, dobimo $\mathbb{E}(T) = \frac{e^{\lambda c}-1}{\lambda}$, kar je seveda isto kot prej.

13. *Prvi način.* Postavimo se v trenutek, ko prvič naslednjič delijo nagrade, in ga označimo s T_1. Če je $T_1 \leq \delta$, Tonček takrat dobi nagrado, zato je tedaj $T = T_1$. Sicer pa se vse začne na novo: Tonček mora od tega trenutka naprej čakati še čas T', ki je pogojno na zgodovino porazdeljen enako kot T. Torej velja:

$$T = T_1 + T'\,\mathbb{1}(T_1 > \delta)\,,$$

od koder sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T)\,\mathbb{P}(T_1 > \delta)\,.$$

Ker je $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, je $\mathbb{E}(T_1) = 1/\lambda$ in $\mathbb{P}(T_1 > \delta) = e^{-\lambda\delta}$, torej je:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\delta}\,\mathbb{E}(T)$$

oziroma:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)}\,.$$

Drugi način. Označimo z N delitev, pri kateri Tonček dobi nagrado, pri čemer izvzamemo delitev ob času nič, ki jo Tonček v vsakem primeru zamudi. Če s $T_1, T_2, \ldots$ označimo medprihodne čase v procesu deljenja nagrad, velja:

$$\{N = n\} = \{T_1 > \delta,\ T_2 > \delta, \ldots, T_{n-1} > \delta,\ T_n \leq \delta\}\,.$$

Na dogodku $\{N = n\}$ je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Nadalje za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ velja:

$$\mathbb{E}(T_i \mid N = n) = \mathbb{E}(T_i \mid T_i > \delta) = \frac{\mathbb{E}\bigl[T_i\,\mathbb{1}(T_i > \delta)\bigr]}{\mathbb{P}(T_i > \delta)} = \frac{1}{e^{-\lambda\delta}} \int_\delta^\infty \lambda t\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} + \delta$$

(to sledi tudi iz pozabljivosti eksponentne porazdelitve), medtem ko je:

$$\mathbb{E}(T_n \mid N = n) = \mathbb{E}(T_n \mid T_n \leq \delta) = \frac{\mathbb{E}\bigl[T_i\,\mathbb{1}(T_i < \delta)\bigr]}{\mathbb{P}(T_i \leq \delta)} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda\delta}} \int_0^\delta \lambda t\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{\lambda} - \frac{\delta\, e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = \frac{N}{\lambda} + (N-1)\delta - \frac{\delta\, e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}} = N\left(\frac{1}{\lambda} + \delta\right) - \frac{\delta}{1 - e^{-\lambda\delta}}\,.$$

Ker je N porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}\big(\mathbb{P}(T_1 < \delta)\big) = \mathrm{Geom}\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)$, je $\mathbb{E}(N) = 1 \,/\, \big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\frac{1}{\lambda} + \delta}{1 - e^{-\lambda\delta}} - \frac{\delta}{1 - e^{-\lambda\delta}} = \frac{1}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

Tretji način. Z oznakami iz drugega načina je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$. Opazimo, da je N čas ustavljanja, saj je dogodek $\{N = n\}$ enolično določen s $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (glej zgoraj). Po Waldovi identiteti je potem:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{\lambda\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

14. Če proces predstavimo s slučajno množico $\mathcal{P}$, je starost natančno določena z $\mathcal{P}^{\to\!\!\!\shortmid t}$, presežek pa z $\mathcal{P}^{t\to}$. Ker vemo, da sta ti slučajni množici neodvisni, mora to veljati tudi za starost in presežek. Poleg tega E_t ustreza prvemu prihodnemu času v procesu $\mathcal{P}^{t\to}$, ki je porazdeljen enako kot $\mathcal{P}$. Zato je $E_t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Nadalje za $0 \le s \le t$ velja:

$$\mathbb{P}(A_t < s) = \mathbb{P}(N_t - N_{t-s} \ge 1) = 1 - e^{-\lambda s}\,,$$

torej tudi za $0 \le s < t$ velja:

$$F_{A_t}(s) = \mathbb{P}(A_t \le s) = 1 - e^{-\lambda s}\,.$$

Ker je A_t navzgor omejena s t, za $s \ge t$ velja $F_{A_t}(s) = 1$. Tako slučajna spremenljivka A_t ni niti diskretna niti zvezna. Pač pa se njena porazdelitev ujema s porazdelitvijo slučajne spremenljivke $\min\{\tilde{A}_t, t\}$, kjer je $\tilde{A}_t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ (mislimo si, da dani homogeni Poissonov proces nadaljujemo še za negativne čase).

Porazdelitev vsote lahko izpeljemo na vsaj dva načina.

Prvi način. Porazdelitev vsote $A_t + E_t$ se ujema s porazdelitvijo vsote $\min\{\tilde{A}_t, t\} + E_t$ kjer sta $\tilde{A}_t$ in E_t neodvisni in porazdeljeni eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Za $0 \le s < t$ velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t + E_t \le s) &= \mathbb{P}(\tilde{A}_t + E_t \le s) = \\
&= \int_0^s \int_0^{s-x} f_{\tilde{A}_t}(x)\, f_{E_t}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \lambda^2 \int_0^s e^{-\lambda x} \int_0^{s-x} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \lambda \int_0^s \big(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda s}\big)\,\mathrm{d}x = \\
&= 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s\, e^{-\lambda s}\,.
\end{aligned}$$

Za $s \geq t$ pa velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t + E_t \leq s) &= \mathbb{P}(A_t < t, A_t + E_t \leq s) + \mathbb{P}(A_t = t, E_t \leq s - t) = \\
&= \mathbb{P}(\tilde{A}_t < t, \tilde{A}_t + E_t \leq s) + \mathbb{P}(\tilde{A}_t \geq t, E_t \leq s - t) = \\
&= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda x} \int_0^{s-x} e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y + \lambda^2 \int_t^\infty e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \int_0^{s-t} e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y = \\
&= \lambda \int_0^t e^{-\lambda x} \bigl(1 - e^{-\lambda(s-x)}\bigr) \, \mathrm{d}x + e^{-\lambda t} \bigl(1 - e^{-\lambda(s-t)}\bigr) = \\
&= \lambda \int_0^t \bigl(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda s}\bigr) \, \mathrm{d}x + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s} = \\
&= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \, e^{-\lambda s} + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s} = \\
&= 1 - e^{-\lambda s} - \lambda t \, e^{-\lambda s} \,.
\end{aligned}$$

Torej je:

$$F_{A_t+E_t}(s) = \begin{cases} 0 & ; \ s \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s \, e^{-\lambda s} & ; \ 0 \leq s < t \\ 1 - e^{-\lambda s} - \lambda t \, e^{-\lambda s} & ; \ s \geq t \end{cases}$$

Drugi način. Izhajamo iz pogojne kumulativne funkcije glede na E_t:

$$\begin{aligned}
F_{A_t+E_t \mid E_t}(s \mid y) &= \mathbb{P}(A_t + E_t \leq s \mid E_t = y) = \mathbb{P}(A_t \leq s - y \mid E_t = y) = \\
&= \mathbb{P}(A_t \leq s - y) \,.
\end{aligned}$$

Iz F_{A_t} dobimo:

$$\begin{aligned}
F_{A_t+E_t \mid E_t}(s \mid y) &= \begin{cases} 0 & ; \ s \leq y \\ 1 - e^{-\lambda(s-y)} & ; \ y \leq s \leq y + t \\ 1 & ; \ s \geq y + t \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 1 & ; \ y \leq s - t \\ 1 - e^{-\lambda(s-y)} & ; \ s - t \leq y \leq s \\ 0 & ; \ y \geq s \end{cases} .
\end{aligned}$$

Velja $F_{A_t+E_t}(s) = \lambda \int_0^\infty F_{A_t+E_t \mid E_t}(s \mid y) \, e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y$. Za $0 \leq s \leq t$ dobimo:

$$F_{A_t+E_t}(s) = \lambda \int_0^s \bigl(1 - e^{-\lambda(s-y)}\bigr) e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y = 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s \, e^{\lambda s} \,,$$

za $s \geq t$ pa:

$$F_{A_t+E_t}(s) = \lambda \int_0^{s-t} e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y + \lambda \int_{s-t}^s \bigl(1 - e^{-\lambda(s-y)}\bigr) e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y = 1 - e^{-\lambda s} - \lambda t \, e^{\lambda s} \,,$$

kar je isto kot prej.

Opazimo, da je kumulativna porazdelitvena funkcija vsote $A_t + E_t$ zvezna, še več, absolutno zvezna. Torej je slučajna spremenljivka $A_t + E_t$ porazdeljena zvezno in z odvajanjem dobimo njeno gostoto:

$$f_{A_t+E_t}(s) = \begin{cases} 0 & ;\ s < 0 \\ \lambda^2 s\, e^{-\lambda s} & ;\ 0 < s < t \\ (\lambda^2 t + \lambda)\, e^{-\lambda s} & ;\ s > t \end{cases} .$$

4. Markiranje, redčenje, superpozicija

1. Opisani proces je ekvivalenten uniji homogenega Poissonovega procesa tovornjakov z intenzivnostjo 4 vozila na uro in homogenega Poissonovega procesa osebnih vozil z intenzivnostjo 36 vozil na uro.

a) $1 - e^{-4} \doteq 0{\cdot}982$.

b) Ker sta procesa tovornjakov in osebnih vozil neodvisna, se pogojno pričakovano število ujema z brezpogojnim, to pa je 36.

c) Tu uporabimo prvotni opis. Zaradi neodvisnosti je verjetnost enaka $\binom{50}{5} \cdot 0{\cdot}1^5 \cdot 0{\cdot}9^{45} \doteq 0{\cdot}185$.

2. a) Oglejmo si združeni proces menjav in se postavimo v trenutek n-te menjave oz. na začetek, če je $n = 0$. Iz krepke časovno homogene lastnosti Markova sledi, da ima čas do naslednje menjave skupaj z vzdrževalcem, ki jo izvede, enako porazdelitev kot v naslednji situaciji:

- Naj bosta $U \sim \mathrm{Exp}(0{\cdot}005)$ in $V \sim \mathrm{Exp}(0{\cdot}01)$ neodvisni.
- Čas do naslednje menjave je $\min\{U, V\}$.
- Če je $U < V$, žarnico zamenja prvi, sicer pa drugi vzdrževalec.

To velja ne glede na to, ali je trenutno menjavo izvedel prvi ali drugi vzdrževalec ali pa, če smo na začetku.

Zgornji opis pa velja tudi za primer, pri katerem imamo dve luči, v katerih gorita dve žarnici, ki sta zamenjani, brž ko pregorita, in je življenjska doba žarnic za prvo luč porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(0{\cdot}005)$, za drugo luč pa eksponentno $\mathrm{Exp}(0{\cdot}01)$, ob predpostavki neodvisnosti vseh žarnic. Ta primer *ni isti* kot v nalogi, ima pa enako porazdelitev. Torej lahko sklepamo, da dejanske menjave tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $0{\cdot}015$ menjave na dan, se pravi, da je posamezna žarnica je torej v povprečju zamenjana na $1/0{\cdot}015 \doteq 67$ dni.

b) $\dfrac{0{\cdot}005}{0{\cdot}015} = \dfrac{1}{3}$.

3. *Prvi način.* Označimo z M čas, ko režiser dobi moškega, z Z čas, ko dobi obe ženski, s T pa čas, ko dobi vse potrebne igralce. Tedaj je $T = \max\{M, Z\}$. Velja $M \sim \mathrm{Exp}(2)$ in $Z \sim \mathrm{Gama}(2, 1)$, torej za $t > 0$ velja:

$$f_M(t) = 2\,e^{-2t}\,, \qquad F_M(t) = 1 - e^{-2t}\,,$$
$$f_Z(t) = t\,e^{-t}\,, \qquad F_Z(t) = 1 - (1+t)e^{-t}\,.$$

Zaradi neodvisnosti je:

$$F_T(t) = F_M(t)\,F_Z(t) = 1 - (1+t)e^{-t} - e^{-2t} + (1+t)e^{-3t}\,.$$

Pričakovano vrednost lahko izračunamo bodisi s pomočjo porazdelitvene gostote:

$$f_T(t) = t\,e^{-t} + 2\,e^{-2t} - (2+3t)\,e^{-3t}\,,$$
$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \Big(t^2\,e^{-t} + 2t\,e^{-2t} - (2t+3t^2)\,e^{-3t}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{37}{18}$$

bodisi s pomočjo preživetvene funkcije:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \big(1 - F_T(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \Big((1+t)e^{-t} + 2\,e^{-2t} - 3(1+t)\,e^{-3t}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{37}{18}\,.$$

Drugi način. Ogledamo si združeni proces prihajanja žensk in moških. To je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 3, v katerem posamezen prihod pomeni žensko z verjetnostjo $1/3$ in moškega z verjetnostjo $2/3$. Naj bo N prvi prihod, po katerem je izpolnjeno, da sta prišla tako vsaj dve ženski kot tudi vsaj en moški. Če so $T_1, T_2, \ldots$ medprihodni časi v združenem procesu, velja $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, torej po Waldovi identiteti velja:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{3}\,\mathbb{E}(N)\,.$$

Problem smo torej prevedli na izračun matematičnega upanja:

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > n)\,.$$

Velja $\mathbb{P}(N > 0) = \mathbb{P}(N > 1) = \mathbb{P}(N > 2) = 1$. Za $n \ge 2$ pa je $\{N > n\}$ dogodek, da so do vključno n-tega prihoda prišle bodisi same ženske bodisi sami moški bodisi ena ženska in $n-1$ moških. Sledi:

$$\mathbb{P}(N > n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

(za $n = 0$ in $n = 1$ izračun ni pravilen, ker ustrezni poddogodki niso paroma nezdružljivi). Torej velja:

$$\mathbb{E}(N) = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right].$$

Z uporabo formul:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}\,; \qquad -1 < q < 1$$

dobimo $\mathbb{E}(N) = 37/6$ in posledično $\mathbb{E}(T) = 37/18$, kar je isto kot prej.

4. *Prvi način.* Označimo z Z_3 čas, ob katerem je žena pripravljena iti v nakup, z M_2 pa čas, ob katerem je mož pripravljen iti v nakup. Ti slučajni spremenljivki sta neodvisni ter velja $Z_3 \sim \mathrm{Gama}(3, \lambda)$ in $M_2 \sim \mathrm{Gama}(2, \mu)$.

a) Iskana verjetnost je enaka:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_3 < M_2) &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_{Z_3}(x) f_{M_2}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\lambda^3\mu^2}{2}\int_0^\infty x^2\,e^{-\lambda x}\int_x^\infty y\,e^{-\mu y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\lambda^3}{2}\int_0^\infty x^2(\mu x+1)\,e^{-(\lambda+\mu)x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\lambda^3(\lambda+4\mu)}{(\lambda+\mu)^4}\,.\end{aligned}$$

b) Čas, ob katerem zakonca kupita avto, je minimum slučajnih spremenljivk Z_3 in M_2. Pomagamo si s preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(M_2 > t) = (\mu t+1)e^{-\mu t}\,, \qquad \mathbb{P}(Z_3 > t) = \frac{1}{2}\,(\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 2)e^{-\lambda t}\,,$$

od koder izračunamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(Z_3 > t, M_2 > t) = \mathbb{P}(Z_3 > t)\,\mathbb{P}(M_2 > t) = \\ &= \frac{1}{2}\big(\lambda^2\mu t^3 + \lambda(\lambda+2\mu)t^2 + 2(\lambda+\mu)t + 2\big)e^{-(\lambda+\mu)t}\,.\end{aligned}$$

kar nam (glej 2. nalogo) da:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^4} + \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^3} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda+\mu} = \\ &= \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^4}\,.\end{aligned}$$

Drugi način. Uporabimo neodvisnost in enako porazdeljenost označb v združenem procesu prihajanja ponudb: vsaka ponudba je z verjetnostjo $\lambda/(\lambda+\mu)$ označena za ženo, z verjetnostjo $\mu/(\lambda+\mu)$ pa za moža.

a) Dogodek, da kupita avto, ki ga najde žena, lahko ponazorimo z naslednjimi začetki zaporedja označb:

$$\text{ŽŽŽ}\,,\ \text{MŽŽŽ}\,,\ \text{ŽMŽŽ}\,,\ \text{ŽŽMŽ}\,.$$

Verjetnost iskanega dogodka je torej enaka:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^3 + 3\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^3\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^3(\lambda+4\mu)}{(\lambda+\mu)^4}\,.$$

b) Uporabimo Waldovo identiteto, in sicer gledamo časovne intervale med posameznimi primernimi ponudbami (tako tistih, ki jih gleda žena, kot tistih, ki jih gleda mož). Kot ponavadi označimo njihove dolžine s $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Tedaj je

$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$, kjer je N zaporedna številka ponudbe, ob kateri pride do nakupa. Za vsak časovni interval vemo, koliko dolg je (T_n) in kdo je ob njegovem izteku našel ponudbo. Glede na to je N čas ustavljanja. Združene ponudbe tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda + \mu$, torej je $\mathbb{E}(T_n) = 1/(\lambda + \mu)$. Po Waldovi identiteti je dovolj izračunati $\mathbb{E}(N)$.

Možni poteki ponudb do nakupa skupaj z verjetnostmi in dolžinami (N) so zbrani v naslednji tabeli:

Potek	ŽŽŽ	MŽŽŽ	ŽMŽŽ	ŽŽMŽ
Dolžina	3	4	4	4
Verjetnost	$\frac{\lambda^3}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$

Potek	MM	ŽMM	MŽM	ŽŽMM	ŽMŽM	MŽŽM
Dolžina	2	3	3	4	4	4
Verjetnost	$\frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$	$\frac{\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$

Torej je $N \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} & \frac{\lambda^3+2\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3} & \frac{3\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^3} \end{pmatrix}$, od koder izračunamo najprej:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda + \mu)^3}$$

in nato po Waldovi identiteti še:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda + \mu)^4},$$

kar je seveda enako kot pri prvem načinu.

5. *Prvi način.* Dogodek, da se je pred prvim prihodom v prvem procesu zgodil natanko en prihod v drugem procesu, pomeni, da je bil med vsemi prihodi prvi prihod iz drugega, drugi prihod pa iz prvega procesa. Verjetnost tega dogodka je $\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}$.

Splošneje, vsi prihodi tvorijo Bernoullijevo zaporedje poskusov, če uspele poskuse identificiramo s prihodi iz prvega procesa. Če z X označimo število prihodov v drugem procesu pred prvim prihodom v prvem procesu, $X + 1$ pomeni število vseh poskusov do vključno prvega uspelega. Torej je $X + 1 \sim \text{Geom}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$, od koder sledi $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Drugi način. Če s T označimo prvi prihodni čas v prvem procesu, pogojno na T velja $X \sim \text{Pois}(\mu T)$, torej je:

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid T) = \mu T\, e^{-\mu T} \quad \text{in} \quad \mathbb{E}(X \mid T) = \mu T\,.$$

Iz dejstva, da je $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, zdaj dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{E}\big[\mu T\, e^{-\mu T}\big] = \mu \int_0^\infty t\, e^{-\mu t}\, \lambda e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\,,\\ \mathbb{E}(X) &= \mu\, \mathbb{E}(T) = \frac{\mu}{\lambda}\,.\end{aligned}$$

6. Označimo najprej s H dogodek, da je bil v prve pol ure natanko en ogled. Dogodek H je disjunktna unija dveh dogodkov: dogodka H_F, da edini študent, ki pride na ogled, študira finančno matematiko, in dogodka H_S, da ta edini študent študira splošno matematiko. Iz teorije markiranja sledi, da je:

$$\mathbb{P}(H_F \mid H) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(H_S \mid H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

Če s T_F označimo čas prihoda prvega študenta finančne matematike, ki pride, je ta slučajna spremenljivka pogojno na dogodek H_F porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do $1/2$ (merjeno v urah), pogojno na dogodek H_S pa je $T_F - 1/2$ porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(4)$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T_F \mid H_F) = \frac{1}{4} \quad \text{in} \quad \mathbb{E}(T_F \mid H_S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Željeni pogojni pričakovani čas je tako enak:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_F \mid H) &= \frac{\mathbb{E}\big(T_F\, \mathbb{1}(H)\big)}{\mathbb{P}(H)} = \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(T_F\, \mathbb{1}(H_F)\big) + \mathbb{E}\big(T_F\, \mathbb{1}(H_S)\big)}{\mathbb{P}(H)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_F)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_F) + \mathbb{P}(H_S)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_S)}{\mathbb{P}(H)} = \\ &= \mathbb{P}(H_F \mid H)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_F) + \mathbb{P}(H_S \mid H)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_S) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

oziroma 25 minut.

7. Če procesa združimo, posamezen prihod z verjetnostjo $\lambda/(\lambda+\mu)$ izvira iz prvega, z verjetnostjo $\mu/(\lambda+\mu)$ pa iz drugega procesa. Reči, da je bilo pred n-tim prihodom v drugem procesu natanko k prihodov iz prvega procesa, je isto kot reči, da je bilo med prvimi $n+k-1$ prihodi v združenem procesu natanko k prihodov iz prvega procesa in $n-1$ iz drugega procesa ter da je $(n+k)$-ti prihod v združenem procesu izhajal iz drugega procesa. Če torej z X označimo število prihodov v prvem procesu pred n-tim prihodom v drugem procesu, velja:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Z drugimi besedami, slučajna spremenljivka X ima negativno binomsko porazdelitev $\mathrm{NegBin}\bigl(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\bigr)$, pomaknjeno za n v levo.

8. Dani sprehod obišče točko (i, j) natanko tedaj, ko je med prvimi $i+j$ prihodi združenega procesa natanko i prihodov iz prvega, j pa iz drugega procesa. Verjetnost tega dogodka pa je enaka:

$$\frac{(i+j)!}{i!\,j!}\,\frac{\lambda^i \mu^j}{(\lambda+\mu)^{i+j}}\,.$$

9. Dogodek, da banka uspešno prestane vse stresne teste, zapišemo kot dogodek, da je število neprestanih stresnih testov enako nič. Neprestani stresni testi pa ustrezajo parom (t, s), kjer je $s > at$. Iskana verjetnost je tako enaka $e^{-\theta}$, kjer je:

$$\theta = \frac{4\lambda}{\pi} \iint_{0<at<s} \frac{1}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \frac{4\lambda}{\pi a} \int_0^\infty \frac{s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \frac{2\lambda}{\pi a}\,.$$

5. Splošni Poissonov proces

1. a) Pois(24)

b) $e^{-4} \doteq 0{\cdot}0183$.

c) Za $10 \le s \le 12$ izračunajmo:

$$\begin{aligned} F_{S_2 \mid N_{12}=2}(s) &= \mathbb{P}(N_s \ge 2 \mid N_{12} = 2) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_s = 2, N_{12} - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_{12} = 2)} = \\ &= \frac{(s-10)^4}{16} \,. \end{aligned}$$

Pri nadaljnjem računanju je lažje delati z $S_2 - 10$. Za $0 \le t \le 2$ velja:

$$F_{S_2 - 10 \mid N_{12}=2}(t) = \frac{t^2}{16} \,, \qquad f_{S_2 - 10 \mid N_2 = 2}(t) = \frac{t^3}{4} \,,$$

od koder dobimo $\mathbb{E}(S_2 - 10 \mid N_2 = 2) = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$, torej je $\mathbb{E}(S_2 \mid N_2 = 2) = 11{:}36$. Nadalje je:

$$\begin{aligned} F_{S_1 \mid N_{12}=2}(s) &= \mathbb{P}(N_s \ge 1 \mid N_{12} = 2) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_{12} - N_s = 1) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_{12} - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_{12} = 2)} = \\ &= \frac{(s-10)^2}{2} - \frac{(s-10)^4}{16} \,, \end{aligned}$$

od koder dobimo:

$$F_{S_1 - 10 \mid N_{12}=2}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{16} \,, \qquad f_{S_1 - 10 \mid N_{12}=2}(t) = t - \frac{t^3}{4}$$

in $\mathbb{E}(S_1 - 10 \mid N_2 = 2) = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$, torej je $\mathbb{E}(S_1 \mid N_2 = 2) = 11{:}04$.

2. Velja $N_t \sim \text{Pois}\left(\int_0^t \frac{a}{1+s}\, \mathrm{d}s\right) = \text{Pois}\big(a \ln(1+t)\big)$, torej je:

$$F_{T_1}(t) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - e^{-a \ln(1+t)} = 1 - \frac{1}{(1+t)^a} \,.$$

Pričakovano vrednost lahko izračunamo bodisi s pomočjo gostote:

$$f_{T_1}(t) = \frac{a}{(1+t)^{a+1}} \,, \qquad \mathbb{E}(T_1) = a \int_0^\infty \frac{t\, \mathrm{d}t}{(1+t)^{a+1}} = \frac{1}{a-1} \,; \qquad a > 1$$

bodisi s pomočjo preživetvene funkcije:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \big(1 - F_T(t)\big)\, \mathrm{d}t = a \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^{a+1}} = \frac{1}{a-1} \,; \qquad a > 1 \,.$$

3. a) Označimo z N_t število zamudnikov, ki pridejo do vključno časa t. Za $t \le s$ je torej $N_s - N_t$ število zamudnikov, ki pridejo z zamudo med t in s. Velja:

$$N_t \sim \mathrm{Exp}\left(\int_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Exp}\bigl(1 - e^{-t}\bigr)\,,$$
$$N_s - N_t \sim \mathrm{Exp}\left(\int_t^s e^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Exp}\bigl(e^{-t} - e^{-s}\bigr)\,,$$

poleg tega pa sta N_t in $N_s - N_t$ neodvisni. Če definicijo slučajnih spremenljivk N_s razširimo še na $s = \infty$ (to je število vseh zamudnikov, ki sploh pridejo), je $N_\infty - N_t$ število vseh zamudnikov, ki zamudijo več kot t, in velja $N_\infty - N_t \sim \mathrm{Exp}(e^{-t})$.

Dogodek, da pride natanko en zamudnik in zamudi več kot dva meseca, lahko zapišemo kot:

$$A := \{N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1\}\,.$$

Zaradi neodvisnosti je njegova verjetnost enaka:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_2 = 1) = e^{e^{-2}-1}\,e^{-2}\,e^{-e^{-2}} = e^{-3} \doteq 0{\cdot}0498\,.$$

b) Kar je potrebno izračunati, je $\mathbb{E}(S_1 \mid A)$.

Prvi način. Začnimo računati pogojno kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$\begin{aligned} F_{S_1|A}(t) &= \mathbb{P}(S_1 \le t \mid A) = \\ &= \mathbb{P}(N_t \ge 1 \mid A) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_t \ge 1, N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)}{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)}\,. \end{aligned}$$

Za $t \le 2$ je $F_{S_1|A}(t) = 0$, za $t \ge 2$ pa velja:

$$\begin{aligned} F_{S_1|A}(t) &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_t - N_2 = 1, N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_t - N_2 = 1)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_2 = 1)} = \\ &= 1 - e^{2-t}\,. \end{aligned}$$

Pričakovano vrednost izračunamo tako, da integriramo preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{E}(S_1 \mid A) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_{S_1|A}(t)\bigr)\,\mathrm{d}t = 2 + \int_2^\infty e^{2-t}\,\mathrm{d}t = 3\,.$$

Drugi način. Zaradi neodvisnosti dogajanj do in po času dveh mesecev je čas prihoda edinega zamudnika pogojno na dani dogodek porazdeljen enako kot čas prihoda edinega zamudnika, ki zamudi več kot dva meseca, pogojno na dogodek, da je takrat prišel natanko en zamudnik (ne glede na to, kaj se je dogajalo pred časom dveh mesecev). Z drugimi besedami, če z $S_{1;>2}$ označimo čas prihoda prvega zamudnika, ki je zamudil več kot dva meseca, se pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke S_1 glede na A ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $S_{1;>2}$ glede na A in zaradi neodvisnosti tudi kar glede na dogodek $\{N_\infty - N_2 = 1\}$. Za $t > 2$ je torej pogojna porazdelitvena gostota enaka:

$$f_{S_1|A}(t) = f_{S_{1;>2}|N_\infty - N_2 = 1} = \frac{e^{-t}}{\int_2^\infty e^{-s}\,\mathrm{d}s} = e^{2-t}$$

in z integriranjem dobimo:

$$\mathbb{E}(S_1 \mid A) = \int_2^\infty t\,e^{2-t}\,\mathrm{d}t = 3\,.$$

Lahko pa tudi opazimo, da se pogojna porazdelitev ujema z eksponentno porazdelitvijo $\mathrm{Exp}(1)$, pomaknjeno za 2 v desno, in prav tako dobimo pogojno pričakovano zamudo 3 mesece.

4. Označimo z X število prihodov z dano lastnostjo, z N pa skupno število prihodov. Vemo, da je pogojno na $\{N = n\}$ množica prihodov porazdeljena enako kot množica $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, kjer so $U_1, \ldots, U_n$ neodvisne in porazdeljene eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Torej se pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na $\{N = n\}$ ujema z brezpogojno porazdelitvijo vsote:

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\big(\{U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \cap (U_i, U_i + \delta] = \emptyset\big)\,,$$

kar pomeni, da je:

$$\mathbb{E}(X \mid N = n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\big(\{U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \cap (U_i, U_i + \delta] = \emptyset\big)\,.$$

Slednje verjetnosti izračunamo s pogojevanjem glede na U_i. Najprej za $j = 1, 2, \ldots, n$ in $u \ge 0$ izračunamo:

$$\mathbb{P}\big(U_j \notin (u, u+\delta]\big) = 1 - \lambda \int_u^{u+\delta} e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = 1 - e^{-\lambda u}\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)\,.$$

Iz neodvisnosti najprej dobimo:

$$\mathbb{P}\big(\{U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \cap (u, u + \delta] = \emptyset\big) = \Big(1 - e^{-\lambda u}\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)\Big)^{n-1}\,,$$

nato pa še:

$$\mathbb{P}\big(\{U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \cap (U_i, U_i + \delta] = \emptyset \mid U_i\big) = \Big(1 - e^{-\lambda U_i}\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)\Big)^{n-1}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \cap (U_i, U_i + \delta] = \emptyset\big) &= \\
&= \lambda \int_0^\infty \Big(1 - e^{-\lambda u}\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)\Big)^{n-1} e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1 - e^{-n\lambda\delta}}{n\big(1 - e^{-\lambda\delta}\big)}\,.
\end{aligned}$$

Torej je:

$$\mathbb{E}(X \mid N = n) = \frac{1 - e^{-n\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}} \,.$$

Ker je $N \sim \mathrm{Pois}\big(\frac{a}{\lambda}\big)$, končno velja:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{e^{-a/\lambda}}{1 - e^{-\lambda\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n \left(1 - e^{-n\lambda\delta}\right) = \frac{1 - e^{-a(1-e^{-\lambda\delta})/\lambda}}{1 - e^{-\lambda\delta}} \,.$$

5. Če z N_t označimo število prihodov do časa t, velja:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right) = \frac{1}{1+t} \,.$$

Po odvajanju dobimo porazdelitveno gostoto:

$$f_{T_1}(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \,.$$

Nadalje velja:

$$\mathbb{P}(T_2 > s \mid T_1) = \mathbb{P}(S_2 > T_1 + s \mid T_1) = \mathbb{P}(N_{T_1+s} < 2 \mid T_1) \,.$$

Ker je T_1 čas ustavljanja, lahko uporabimo zgoraj omenjeno karakterizacijo pogojne porazdelitve glede na T_1 (in $\mathcal{P}^{\to\!\!\!\!\!\!/ T_1}$). Toda za ta namen moramo dogodek $\{N_{T_1+s} < 2\}$ zapisati kot dogodek, ki se nanaša le na proces $\mathcal{P} \cap (T_1, \infty)$. Ustrezni zapis je $\{N_{T_1+s} - N_{T_1} = 0\}$. Ker je proces $\mathcal{P} \cap (T_1, \infty)$ pogojno na T_1 Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $t \mapsto \frac{1}{1+t} \mathbb{1}(t > T_1)$, je slučajna spremenljivka $N_{T_1+s} - N_{T_1}$ pogojno na T_1 porazdeljena po Poissonu s parametrom:

$$\int_{T_1}^{T_1+s} \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t = \ln \frac{1 + T_1 + s}{1 + T_1} \,.$$

Sledi:

$$\mathbb{P}(T_2 > s \mid T_1) = \mathbb{P}(N_{T_1+s} - N_{T_1} = 0 \mid T_1) = \exp\left(-\ln \frac{1 + T_1 + s}{1 + T_1}\right) = \frac{1 + T_1}{1 + T_1 + s} \,.$$

Z integracijo dobimo brezpogojno preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(T_2 > s) = \int_0^\infty \frac{1+t}{1+t+s} f_{T_1}(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+s)} = \frac{\ln(1+s)}{s}$$

in po odvajanju spet porazdelitveno gostoto:

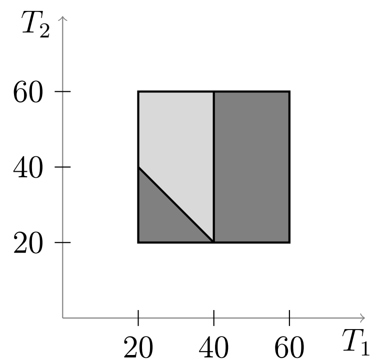
$$f_{T_2}(s) = \frac{(1+s)\ln(1+s) - s}{s^2(1+s)} \,.$$

6. Prenovitveni procesi

1. a) Prihodi avtobusa tvorijo prenovitveni proces. Če medprihodne čase označimo s $T_1, T_2, \ldots$, je asimptotično dolgoročno število prihodov na uro enako:

$$\frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{3}{2}\,.$$

b) Dogodek, da bodo Peteršiljčkovi čakali manj kot 20 minut, lahko zapišemo kot $\{T_1 \geq 40\,\mathrm{min}\} \cup \{T_1 + T_2 < 1\,\mathrm{h}\}$. To lahko prikažemo na naslednjem diagramu:



in iz razmerja ploščin razberemo, da je iskana verjetnost enaka 5/8.

2. Označimo z N_t število vseh klicev, ki jih gasilska postaja prejme do časa t, z $\tilde{N}_t$ pa število klicev, na katere se lahko odzove. Ker vsi klici tvorijo homogen Poissonov proces, zanje velja krepki zakon velikih števil:

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s.g.}} \frac{1}{2}\,.$$

Klici, na katere se postaja lahko odzove, pa tvorijo prenovitveni proces. Pričakovani medprihodni čas je enak $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{1/2} = \dfrac{11}{4}$. Po krepkem zakonu velikih števil za prenovitvene procese je:

$$\frac{\tilde{N}_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s.g.}} \frac{4}{11}\,.$$

Delež preusmerjenih klicev pa je:

$$1 - \frac{\tilde{N}_t}{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{s.g.}} 1 - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}\,.$$

3. Gre za prenovitveni proces z nagradami, ki so v tem primeru globe. Ker je verjetnost, da Bine v posameznem ciklu plača globo, točno 1/3, je njena pričakovana višina v posameznem ciklu 35 evrov. Nadalje je pričakovana dolžina cikla 7/4 leta, torej je dolgoročni letni znesek globe enak:

$$\frac{35}{7/4} = 20\ \text{evrov.}$$

4. To lahko interpretiramo kot prenovitveni proces z nagradami: za prihode postavimo recimo skoke iz stanja 1 v stanje 2, nagrada, ki pripada posameznemu prihodu (skoku), pa naj bo dolžina bivanja v stanju 1 v medprihodnem intervalu, ki se konča s tem skokom (če smo natančni, se mora potem proces začeti v stanju 2, a dolgoročno gledano to ni pomembno – rezultat je enak). Tedaj je W_t skupna dolžina bivanja v stanju 1, W_t/t pa je časovni delež bivanja v tem stanju. Iz $\mathbb{E}(T_1) = \mu_1+\mu_2$, $\mathbb{E}(R_1) = \mu_1$ in krepkega zakona velikih števil dobimo, da je dolgoročni delež bivanja v stanju 1 enak $\dfrac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$.

5. Gre za prenovitveni proces z nagradami, kjer so medprihodni časi $T_1, T_2, \ldots$ dolžine Manjinih telefonskih pogovorov s posameznimi strankami, nagrada R_i pa je enaka 1, če Manja izdelek proda, sicer pa 0. Očitno je $\tau \le 1/2$. Torej velja:

$$F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0 & ; t \le 0 \\ 3(t - t^2) & ; 0 \le t < \tau \\ 1 & ; t \ge \tau \end{cases} .$$

Torej slučajna spremenljivka T_i ni niti diskretna niti zvezna. Vseeno pa lahko izračunamo njeno matematično upanje.

Prvi način: s pomočjo Riemann–Stieltjesovega integrala, nakar razbijemo na zvezni in diskretni del:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_i) = \int_0^\infty t \, \mathrm{d}F_{T_i}(t) &= \int_0^\tau t \, F'_{T_i}(t) \, \mathrm{d}t + \tau\bigl(F_{T_i}(\tau) - F_{T_i}(\tau^-)\bigr) = \\
&= \int_0^\tau (3t - 6t^2) \, \mathrm{d}t + \tau(1 - 3\tau + 3\tau^2) = \\
&= \tau - \frac{3\tau^3}{2} + \tau^3 .
\end{aligned}$$

Drugi način: izberemo slučajno spremenljivko $\tilde{T}$, katere kumulativna porazdelitvena funkcija je absolutno zvezna in se na intervalu $[0, \tau)$ ujema s kumulativno porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T_i. Tedaj je T_i enako porazdeljena kot $\min\{\tilde{T}, \tau\}$, zato je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_i) &= \mathbb{E}\bigl[\min\{\tilde{T}, \tau\}\bigr] = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \min\{t, \tau\} \, f_{\tilde{T}}(t) \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^\tau t \, f_{\tilde{T}}(t) \, \mathrm{d}t + \tau \int_\tau^\infty f_{\tilde{T}}(t) \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\tau t \, F'_{\tilde{T}}(t) \, \mathrm{d}t + \tau\bigl(1 - F_{\tilde{T}}(\tau)\bigr) = \\
&= \int_0^\tau t \, F'_{T_i}(t) \, \mathrm{d}t + \tau\bigl(F_{T_i}(\tau) - F_{T_i}(\tau^-)\bigr) ,
\end{aligned}$$

kar je isto kot prej.

Tretji način: upoštevamo, da, ker je $T_i \geq 0$, velja:

$$\mathbb{E}(T_i) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_i > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau (1 - 3t + 3t^2)\,\mathrm{d}t = \tau - \frac{3\tau^3}{2} + \tau^3\,,$$

kar je spet isto kot prej.

Dogodek, da je $R_i = 1$, je enak dogodku, da Manji uspe prepričati kupca do časa τ. Torej je:

$$\mathbb{E}(R_i) = \mathbb{P}(R_i = 1) = 3(\tau - \tau^2)\,.$$

Če z W_t označimo število prodanih izdelkov do časa t, skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{6(1-\tau)}{2 - 3\tau + 2\tau^2} =: h(\tau)\,.$$

Iz:

$$h'(\tau) = \frac{6(2\tau^2 - 4\tau + 1)}{(\tau^2 - 3\tau + 2)^2}$$

dobimo, da funkcija h na intervalu $[0, 1/2]$ doseže maksimum pri $\tau = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{\cdot}293$. Če se čas meri v urah, to pomeni, da se Manji splača odložiti po 17 minutah in 34 sekundah.

6. *Prvi način.* Postavimo se v trenutek, ko prvič naslednjič delijo nagrade, in ga označimo s T_1. Če je $T_1 \leq 30$, Tonček takrat dobi nagrado, zato je tedaj $T = T_1$. Sicer pa se vse začne na novo: Tonček mora od tega trenutka naprej čakati še čas T', ki je pogojno na zgodovino porazdeljen enako kot T. Torej velja:

$$T = T_1 + T'\,\mathbb{1}(T_1 > 30)\,,$$

od koder sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T)\,\mathbb{P}(T_1 > 30) = 30 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(T)\,,$$

torej je $\mathbb{E}(T) = 60$. Drugače povedano, Tonček lahko pričakuje, da bo čakal eno uro.

Drugi način. Označimo z N delitev, pri kateri Tonček dobi nagrado, pri čemer izvzamemo delitev ob času nič, ki jo Tonček v vsakem primeru zamudi. Če s $T_1, T_2, \ldots$ označimo medprihodne čase v procesu deljenja nagrad, velja:

$$\{N = n\} = \{T_1 > 30, T_2 > 30, \ldots, T_{n-1} > 30, T_n \leq 30\}\,.$$

Na dogodku $\{N = n\}$ je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ in pogojno na $\{N = n\}$ so $T_1, \ldots, T_{n-1}$ porazdeljeni enakomerno na intervalu od 30 do 40 minut (torej za $k = 1, \ldots, n-1$ velja $\mathbb{E}(T_k \mid N = n) = 35$), T_n pa je porazdeljen enakomerno na intervalu od 20 do 30 minut (torej je $\mathbb{E}(T_n \mid N = n) = 25$). Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = 35(N-1) + 25\,.$$

Ker je N porazdeljena geometrijsko Geom(1/2), je $\mathbb{E}(N) = 2$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\big[35(N-1) + 25\big] = 60\,.$$

Tretji način. Z oznakami iz drugega načina je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$. Opazimo, da je N čas ustavljanja, saj je dogodek $\{N = n\}$ enolično določen s $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (glej zgoraj). Po Waldovi identiteti je potem $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(T_1) = 2 \cdot 30 = 60$.

Četrti način. Naj bodo tako kot prej $T_1, T_2, \ldots$ medprihodni časi v prenovitvenem procesu deljenja nagrad. Nadalje si zamislimo še, da Tonček v nedogled hodi po nagrade (pri čemer vsakič, ko dobi nagrado, ostane na prizorišču). Tedaj tudi te Tončkove nagrade tvorijo prenovitveni proces. Označimo njegove medprihodne čase s $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots$ (torej je $T = \tilde{T}_1$).

Označimo z W_t število nagrad, ki jih Tonček dobi do časa t. To lahko izrazimo na naslednja dva načina: s prenovitvenim procesom Tončkovih nagrad in s prenovitvenim procesom splošnega deljenja nagrad, ki mu pripišemo še nagrade $R_1, R_2, \ldots$, kjer je $R_n = 1$, če Tonček ob n-tem deljenju dobi nagrado, sicer pa je $R_n = 0$. Velja $\mathbb{P}(R_n = 0) = \mathbb{P}(R_n = 1) = 1/2$. Po krepkem zakonu velikih števil za oba prenovitvena procesa je skoraj gotovo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tilde{T}_1)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T)} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)}\,,$$

torej mora biti:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\mathbb{E}(T_1)}{\mathbb{E}(R_1)} = 60\,.$$

7. Medprihodna porazdelitev takega procesa je Gama$(2, \lambda)$, ki ima kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F(t) = \lambda^2 \int_0^t s\, e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s\,,$$

in Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^2}$$

(ki jo lahko prek konvolucije dobimo tudi iz Laplaceove transformiranke eksponentne porazdelitve). Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je torej:

$$\hat{M}(z) = \frac{\lambda^2}{z(z+2\lambda)} = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2\lambda}\right]$$

in prenovitvena mera je:

$$M(t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^t \big(1 - e^{-2\lambda s}\big)\, \mathrm{d}s = \frac{\lambda t}{2} - \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{4}\,.$$

8. Iz Laplaceove transformiranke medprihodne porazdelitve:

$$\hat{F}(z) = p + \frac{(1-p)\lambda}{\lambda + z}$$

dobimo Laplace–Stieltjesovo transformiranko prenovitvene mere:

$$\hat{M}(z) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{(1-p)z}\,.$$

Torej je prenovitvena mera enaka:

$$M(t) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{1-p}\,t\,.$$

9. *Prvi način.* Če iz procesa izločimo prvi (med)prihodni interval, dobimo običajen prenovitveni proces z medprihodnim časom, ki ima kumulativno porazdelitveno funkcijo F. Ta proces je neodvisen od T_1. Označimo z $\tilde{N}_t$ število prihodov v tem procesu do časa t, z $\tilde{M}$ pa njegovo prenovitveno mero. Opazimo:

- Če je $T_1 > t$, je $N_t = 0$.
- Če je $T_1 \le t$, je $N_t = 1 + \tilde{N}_{t-T_1}$.

Sledi $N_t = \mathbb{1}(T_1 \le t)\bigl(1 + \tilde{N}_{t-T_1}\bigr)$ in zaradi neodvisnosti:

$$\mathbb{E}(N_t \mid T_1) = \mathbb{1}(T_1 \le t) + \tilde{M}(t - T_1)\,\mathbb{1}(T_1 \le t)\,.$$

Zdaj pa izračunajmo brezpogojno matematično upanje. Ker velja $\mathbb{E}\bigl[h(T_1)\bigr] = \int_{[0,\infty)} h\,\mathrm{d}G$, sledi:

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = G(t) + \int_{[0,t]} \tilde{M}(t-s)\,\mathrm{d}G(s)$$

ali krajše:

$$M = G + \tilde{M} \star G\,.$$

Prenovitvena mera $\tilde{M}$ pa zadošča prenovitveni enačbi $\tilde{M} = F + \tilde{M} \star F$. Sledi:

$$M = G + F \star G + \tilde{M} \star F \star G = G + (G + \tilde{M} \star G) \star F = G + M \star F\,,$$

kar je ravno iskana prenovitvena enačba.

Drugi način. Glavna ideja izpeljave je, da iz procesa izločimo drugi medprihodni interval (tistega dolžine T_2). Dobljeni proces je porazdeljen enako kot prvotni in neodvisen od T_2. Označimo z $\tilde{N}_t$ število prihodov v tem procesu do časa t. Opazimo:

- Če je $T_1 > t$, je $N_t = 0$.
- Če je $T_1 \le t$ in $T_1 + T_2 > t$, je $N_t = 1$.
- Če je $T_1 + T_2 \le t$, je $N_t = 1 + \tilde{N}_{t-T_2}$.

Sledi:
$$N_t = \mathbb{1}(T_1 \le t, T_1 + T_2 > t) + \mathbb{1}(T_1 + T_2 \le t)\big(1 + \tilde{N}_{t-T_2}\big) .$$
Indikatorja $\mathbb{1}(T_1 \le t, T_1 + T_2 > t)$ in $\mathbb{1}(T_1 + T_2 \le t)$ se seštejeta v $\mathbb{1}(T_1 \le t)$, poleg tega pa je slučajna spremenljivka $\tilde{N}_{t-T_2}$ na dogodku $\{T_2 \le t\} \setminus \{T_1 + T_2 \le t\}$ enaka nič. Sledi:
$$N_t = \mathbb{1}(T_1 \le t) + \mathbb{1}(T_2 \le t)\tilde{N}_{t-T_2} .$$
Ker je proces z izločenim drugim medprihodnim intervalom pogojno na T_2 enako porazdeljen kot prvotni prenovitveni proces, velja:
$$\mathbb{E}(N_t \mid T_2) = \mathbb{P}(T_1 \le t) + M(t - T_2)\,\mathbb{1}(T_2 \le t) .$$
Prvi člen je natančno kumulativna porazdelitvena funkcija prvega (med)prihodnega časa, drugi člen pa je funkcija drugega medprihodnega časa T_2. Ker velja $\mathbb{E}\big[h(T_2)\big] = \int_{[0,\infty)} h\,\mathrm{d}F$, sledi:
$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = G(t) + \int_{[0,t]} M(t-s)\,\mathrm{d}F(s) ,$$
kar je ravno iskana prenovitvena enačba.

10. a) Prvi prihodni čas je porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\mu)$ in ima torej Laplaceovo transformiranko:
$$G(z) = \frac{\mu}{z+\mu} ,$$
ostali medprihodni časi pa so po krepki časovno homogeni lastnosti Markova vsote dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, od katerih je prva porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$ (čas strežbe), druga pa eksponentno $\mathrm{Exp}(\mu)$ (čas čakanja na prihod naslednje stranke). Nadaljnji medprihodni časi imajo torej Laplaceovo transformiranko:
$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda\mu}{(z+\lambda)(z+\mu)} .$$
Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je torej:
$$\hat{M}(z) = \frac{\mu(z+\lambda)}{z(z+\lambda+\mu)} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{z} + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{z+\lambda+\mu} .$$
Prenovitvena mera je torej enaka:
$$M(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\int_0^t \mathrm{d}s + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}\int_0^t e^{-(\lambda+\mu)s}\,\mathrm{d}s = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,t + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\big(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\big) .$$
b) *Prvi način.* Iz linearnosti matematičnega upanja sledi:
$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} ,$$
torej je intenzivnost po krepkem zakonu velikih števil enaka $\dfrac{1}{\mathbb{E}(T_2)} = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

Drugi način. Uporabimo konvergenco prenovitvene mere. Dobimo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,.$$

c) $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\Big/\mu = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

11. Označimo $M(t) := \mathbb{E}(N_t)$. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri čemer ima prvi (med)prihodni čas porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$, ki ima Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{G}(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^2}\,,$$

nadaljnji medprihodni časi pa imajo eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$ z Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda}{z+\lambda}\,.$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je torej enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-\hat{F}(z)} = \frac{\lambda^2}{z(z+\lambda)} = \frac{\lambda}{z} - \frac{\lambda}{z+\lambda}\,,$$

prenovitvena mera sama pa znaša:

$$M(t) = \lambda\int_0^t \mathrm{d}s - \lambda\int_0^s e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \lambda t - 1 + e^{-\lambda t}\,.$$

12. Najprej opazimo, da po Rudi vsakem obisku z verjetnostjo 1/2 nadaljuje z delom v kraju A, z verjetnostjo 1/2 pa v kraju B, in sicer neodvisno od prejšnjega dogajanja. Poleg tega iz krepke časovno homogene lastnosti Markova sledi, da so časi do naslednjega obiska nadzornika med seboj neodvisni. Porazdelitev prvega prihodnega časa T_1 je eksponentna $\mathrm{Exp}(1)$, porazdelitve vseh naslednjih pa so mešanice polovice $\mathrm{Exp}(1)$ in $\mathrm{Exp}(1/2)$. To pa pomeni, da obiski res tvorijo prenovitveni proces z zaostankom.

Če z G označimo kumulativno porazdelitveno funkcijo prvega, z F pa vseh ostalih medprihodnih časov, torej za $t \ge 0$ velja:

$$G(t) = 1 - e^{-t}\,, \qquad F(t) = \tfrac{1}{2}\bigl(1-e^{-t}\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(1-e^{-t/2}\bigr)\,.$$

Laplaceovi transformiranki časov sta torej enaki:

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{z+1}\,, \qquad \hat{F}(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{z+1}\right] = \frac{3z+2}{2(2z+1)(z+1)}$$

in Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{2(2z+1)}{z(4z+3)} = \frac{2}{3z} + \frac{4}{3(4z+3)}\,,$$

od koder dobimo prenovitveno mero:

$$M(t) = \frac{2t}{3} + \frac{4\bigl(1-e^{-3t/4}\bigr)}{9}\,.$$

13. *Prvi način*: s prenovitveno enačbo. Iz Laplaceovih transformirank obeh porazdelitev:

$$\hat{G}(z) = \frac{1 - e^{-az}}{az}\,, \qquad \hat{F}(z) = \frac{\lambda}{z + \lambda}$$

dobimo Laplace–Stieltjesovo transformiranko prenovitvene mere:

$$\hat{M}(z) = \frac{\big(1 - e^{-az}\big)(z + \lambda)}{az^2}\,.$$

Pišimo:

$$\hat{M}_1(z) := \frac{z + \lambda}{az^2}\,, \quad \hat{M}_2(z) := e^{-az}\hat{M}_1(z)\,, \quad \hat{M}(z) = \hat{M}_1(z) - \hat{M}_2(z)\,.$$

Funkciji $\hat{M}_1$ in $\hat{M}_2$ sta Laplace–Stieltjesovi transformiranki funkcij:

$$M_1(t) = \frac{t}{a} + \frac{\lambda t^2}{2a}\,, \quad M_2(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t < a \\ M_1(t - a) & ;\ t \ge a \end{cases}$$

in prenovitvena mera je enaka:

$$M(t) = M_1(t) - M_2(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} + \dfrac{\lambda t^2}{2a} & ;\ t \le a \\ 1 + \lambda t - \dfrac{\lambda a}{2} & ;\ t \ge a \end{cases}\,.$$

Drugi način: neposredno iz homogenega Poissonovega procesa s pogojevanjem na prvi prihod dobimo:

$$\mathbb{E}(N_t \mid T_1) = \big(1 + \lambda(t - T_1)\big)\,\mathbb{1}(t \ge T_1)\,.$$

Po integraciji za $t \ge a$ dobimo:

$$\mathbb{E}(N_t) = \frac{1}{a}\int_0^a \big(1 + \lambda(t - s)\big)\,\mathrm{d}s = 1 + \lambda t - \frac{\lambda a}{2}\,,$$

za $t \le a$ pa dobimo:

$$\mathbb{E}(N_t) = \frac{1}{a}\int_0^t \big(1 + \lambda(t - s)\big)\,\mathrm{d}s = \frac{t}{a} + \frac{\lambda t^2}{2a}\,,$$

kar je isto kot prej.

14. Oglejmo si število prihodov med časoma t in $t+s$. Pričakovana vrednost tega števila je očitno $M(t + s) - M(t)$. Toda to je tudi število prihodov do časa s v procesu $\mathcal{P}^{t\rightarrow}$. Zaradi stacionarnosti je le-to porazdeljeno enako kot število prihodov do časa s v izvirnem procesu, torej mora imeti pričakovano vrednost $M(s)$. Dobili smo, da je prenovitvena mera *aditivna*:

$$M(t + s) = M(t) + M(s)\,.$$

Ker je naraščajoča, ni druge možnosti, kot da je kar $M(t) = ct$ za neko konstanto $c \geq 0$ (podrobnosti bomo izpustili). Ko to vstavimo v prenovitveno enačbo, dobimo, da za $t \geq 0$ velja:

$$
\begin{aligned}
G(t) &= c\left[t - \int_{[0,t]} (t-s)\,\mathrm{d}F(s)\right] = \\
&= c\int_{[0,\infty)} \big(t - (t-s)\,\mathbb{1}(s \leq t)\big)\,\mathrm{d}F(s) = \\
&= c\int_{[0,\infty)} \min\{s,t\}\,\mathrm{d}F(s) = \\
&= c\,\mathbb{E}\big[\min\{T_2,t\}\big]\,,
\end{aligned}
$$

medtem ko je za $t < 0$ seveda $G(t) = 0$. Ko naredimo limito, ko gre t proti neskončno, dobimo $c = 1/\,\mathbb{E}(T_2)$. Torej je končno:

$$
G(t) = \frac{\mathbb{E}\big[\min\{T_2,t\}\big]}{\mathbb{E}(T_2)}\,.
$$

Lahko pa izraz, ki ga dobimo iz prenovitvene enačbe, tudi integriramo po delih. Strogo gledano moramo to storiti z uporabo Fubinijevega izreka. Natančneje, iz:

$$
\min\{s,t\} = \int_{\substack{u\geq 0\\ u<s\\ u\leq t}} \mathrm{d}u
$$

izpeljemo naslednjo alternativno obliko:

$$
\begin{aligned}
G(t) &= \frac{1}{\mathbb{E}(T_2)} \iint_{\substack{u\geq 0\\ u<s\\ u\leq t}} \mathrm{d}F(s)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}(T_2)} \int_{[0,t]} \int_{(u,\infty]} \mathrm{d}F(s)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}(T_2)} \int_0^t \big(1 - F(u)\big)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^t \big(1 - F(u)\big)\,\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_0^\infty \big(1 - F(u)\big)\,\mathrm{d}u}\,.
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] B. Fristedt, L. Gray: *A Modern Approach to Probability Theory*. Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] G. Grimmett, D. Stirzaker: *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 2009.

[3] G. Grimmett, D. Stirzaker: *Probability and Random Processes: Problems and Solutions*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[4] S. Resnick: *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, Boston, 1994.