KOLOKVIJI IN IZPITI IZ SLUČAJNIH PROCESOV 1

Finančna matematika

Zbral: Martin Raič

2020/21

IZPIT IZ SLUČAJNIH PROCESOV 1

Finančna matematika
3. junij 2021

1. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 1, recimo mu proces 0. Iz njega induktivno ustvarimo procese $1, 2, 3, \ldots$ z redčenjem: proces n nastane iz procesa $n-1$ tako, da vsak prihod v procesu $n-1$ z verjetnostjo $1/2$ ostane tudi v procesu n, sicer pa se zavrže. Vse tovrstne odločitve so neodvisne. Naj bo še D proces, v katerem se n-ti zaporedni prihod v D ujema s prvim prihodom v procesu n.
   a) Določite porazdelitve časov prihodov v procesu D.
   b) Naj bo N_t število prihodov v procesu D do vključno časa t. Določite porazdelitve teh slučajnih spremenljivk.
   c) Določite porazdelitev števila *prihodov*, ki pripadajo prvemu *skoku* v procesu D. Če je torej T_1 čas prvega prihoda oziroma skoka v procesu D, določite porazdelitev slučajne spremenljivke N_{T_1}.
   d) Določite porazdelitev časa med prvim in drugim prihodom v procesu D.

2. Ekstravagantnež Elon ima vili Alberta in Beverly. Ob slučajnih trenutkih, ki tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ, vrže poseben kovanec, ki ima na vsaki strani prikazano eno izmed njegovih dveh vil. Z verjetnostjo a se prikaže Alberta, z verjetnostjo $1-a$ pa Beverly. Tako kot se na kovancu prikaže, v tisti vili se odloči bivati (vsaj) do naslednjega meta.

   Recimo, da Elon trenutno biva v vili Alberti. Kolikšna je verjetnost, da bo po času $t > 0$ prav tako bival v tej vili?

   Namig: obrnite proces.

3. Dan je Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = e^{-t}$. Kot navadno označimo s T_1 čas prvega prihoda. Naj bo $\delta > 0$. Izračunajte pričakovano število prihodov v časovnem intervalu od $T_1 + \delta$ do neskončno.

4. Dana sta dva neodvisna slučajna procesa. Proces A je prenovitveni z medprihodnim časom, porazdeljenim enakomerno na intervalu $[a, b]$, kjer je $0 < a < b$, proces B pa je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Po vsakem prihodu v procesu A čakamo na prvi prihod v procesu A ali procesu B, ki sledi minulemu prihodu (torej čakamo na tisti prihod, ki pride prej). Izračunajte dolgoročni delež časa, ki mine v prej omenjenem čakanju.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Vsako nalogo rešujte na posebno stran in na vsaki strani mora biti jasno označeno, katera naloga se tam rešuje. Čas reševanja je **110 minut**. Veliko uspeha!

IZPIT IZ SLUČAJNIH PROCESOV 1

Finančna matematika
18. junij 2021

1. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ.
   a) Izračunajte pričakovano vrednost produkta vseh časov prihodov v časovnem intervalu od 0 do t. Upoštevamo dogovor, da je produkt po prazni množici enak 1.
   b) Za kateri t je ta pričakovana vrednost najmanjša? Za ta t izračunajte še varianco tega produkta.
2. Ribič v časovnem intervalu od 0 do t lovi ribe, in sicer klene in postrvi. Kleni prijemajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ, postrvi pa v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo μ, neodvisno drugi od drugih.
   a) Kolikšna je verjetnost, da je ribič ujel vsaj eno ribo in da je bila prva ujeta riba klen?
   b) Recimo, da se je res zgodilo tako kot v prejšnji točki. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila tudi zadnja ujeta riba klen?
3. Zamudniki prihajajo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom z intenziteto
$$\rho(t) = \frac{1}{1 + 2\,e^t}\,.$$
   a) Kolikšna je verjetnost, da je prišel vsaj en zamudnik?
   b) Recimo, da je res prišel vsaj en zamudnik. Izračunajte pogojni pričakovani čas prihoda zadnjega zamudnika.
   Namig: pomagajte si s kumulativno porazdelitveno funkcijo in izražavo matematičnega upanja s funkcijo preživetja:
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_X(x)\bigr)\,\mathrm{d}x\,.$$
4. Klici v centralo prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Telefonist je nezadovoljen s plačo, zato se odloči za belo stavko. Tako pri prvem klicu vrže pošten kovanec. Če pade grb, ga sprejme, če pade cifra, pa klic preskoči, nakar le odgovori na naslednji klic. Potem ko prvič sprejme klic (bodisi prvega bodisi drugega), pa nadaljuje tako kot od začetka, se pravi ob prvem še naslednjem klicu vrže kovanec. Izračunajte pričakovano število sprejetih klicev do časa t.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Vsako nalogo rešujte na posebno stran in na vsaki strani mora biti jasno označeno, katera naloga se tam rešuje. Čas reševanja je **110 minut**. Veliko uspeha!

2013/14

1. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
3. april 2014

1. Tine in Tone mečeta vsak svoj kovanec. Če Tine vrže cifro, Tone pa grb, Tine plača Tonetu en evro. Obratno, če Tone vrže cifro in Tine grb, Tone plača Tinetu en evro. Sicer nihče ne plača ničesar. Privzamemo, da sta kovanca poštena in da so vsi meti neodvisni. Igra se konča, ko eden od igralcev ostane brez denarja. Na začetku ima Tine 5, Tone pa 7 evrov. Kolikšna je verjetnost, da na koncu Tine ostane brez, Tone pa dobi vse?

   Namig: za primeren čas ustavljanja uporabite Waldovo identiteto. Končnosti matematičnega upanja ni potrebno preverjati.

2. Učiteljica potrebuje pomoč enega učenca, da ji pomaga obesiti sliko. Ko pokliče učence, je število učencev, ki jo slišijo, slučajno in porazdeljeno geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$. Vsak od učencev, ki sliši učiteljico, potrebuje slučajno mnogo časa, da pride, in sicer je verjetnost, da potrebuje več kot t časa, enaka $1/(1+t)$ (strogo gledano je to pogojna verjetnost glede na dogodek, da je učenec slišal učiteljico). Privzamemo, da so učenci, ki slišijo učiteljico, pogojno na to med seboj neodvisni.

   a) Izračunajte (brezpogojno) porazdelitev časa, ki mine od klica učiteljice do prihoda prvega učenca.

   b) Izračunajte pogojno porazdelitev in pogojno pričakovano vrednost časa iz prejšnje točke glede na dogodek, da sta učiteljico slišala vsaj dva učenca.

3. Dan je proces štetja, pri katerem je čas n-tega prihoda porazdeljen eksponentno s pričakovano vrednostjo n. Kot ponavadi z N_t označimo število prihodov do vključno časa t. Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk N_t, t. j. za vse $t > 0$ in vse $k = 0, 1, 2, \ldots$ izračunajte $\mathbb{P}(N_t = k)$.

4. V igralnici od časa do časa zazvoni zvonec. Zvonjenja tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Igra poteka tako, da igralec ob določenem času pritisne na gumb. Višina nagrade je premosorazmerna s časom, ob katerem igralec pritisne na gumb, a nagrada se dobi le v primeru, če igralec pritisne na gumb pred drugim zvonjenjem.

   Denimo, da igralec igra tako, da na gumb pritisne ob fiksnem času t. Določite čas t, pri katerem bo pričakovana višina nagrade maksimalna.

2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
17. junij 2014

1. Ob časih, ki tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $1/3$, vržemo kovanec, na katerem z verjetnostjo $3/10$ pade cifra, z verjetnostjo $7/10$ pa grb. Kaj pade ob posameznem metu, je neodvisno tako od preostalih metov kot tudi od časov metov. Izračunajte verjetnost, da dve časovni enoti ali manj pred prvim grbom ni bilo nobene cifre.

2. Potniki prihajajo na železniško postajo v skladu s Poissonovim procesom s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = t$. Na začetku opazovanja (čas 0) na postaji ni nobenih potnikov, vlak pa odpelje ob času 1. Naj bo W vsota čakalnih časov vseh potnikov, prispelih do odhoda vlaka. Izračunajte $\mathbb{E}(W)$.

3. Vozila se vozijo po enosmerni cesti. Med dvema zaporednima voziloma je najmanj dve sekundi presledka (varnostna razdalja), preostanek pa je porazdeljen eksponentno s pričakovano vrednostjo 3 sekunde. Cesta ima most, čez katerega posamezno vozilo vozi 4 sekunde. Izračunajte dolgoročni delež časa, ko sta na mostu dve vozili.

4. Dan je prenovitveni proces, pri katerem je posamezen medprihodni čas z verjetnostjo p enak nič, z verjetnostjo $1 - p$ pa je porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

   a) Določite njegovo prenovitveno mero.

   b) Kako je potrebno spremeniti porazdelitev časa prvega prihoda, da bo dobljeni prenovitveni proces z zaostankom stacionaren?

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
27. junij 2014

1. Dan je proces štetja, pri katerem je število prihodov do časa t porazdeljeno po naslednji shemi:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ h(t) & t\,h(t) & t^2\,h(t) & t^3\,h(t) \end{pmatrix},$$
kjer je $h(t) = \frac{1}{1+t+t^2+t^3}$. Izračunajte pričakovani čas drugega prihoda.

2. Mirko lovi ribe iz ribnika. V ribniku sta samo dve vrsti rib: krapi in postrvi. Krapi prijemljejo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 na uro, postrvi pa v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 6 na uro, neodvisno od krapov.

   V prvi uri je Mirko ujel natanko dve ribi. Izračunajte pričakovani čas, ko je ujel drugega krapa.

3. Dan je Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = \dfrac{2}{1+t}$. Izračunajte pričakovani čas prvega prihoda pogojno na dogodek, da se je drugi prihod zgodil kasneje kot dve časovni enoti od začetka.

4. Vzporedno potekata dva homogena Poissonova procesa, prvi ima intenzivnost 1, drugi pa intenzivnost 2. Najprej počakamo na prvi prihod v prvem procesu, ga zabeležimo, nato pa začnemo gledati prihode v drugem procesu in zabeležimo vse sode prihode v tem procesu od takrat naprej (kaj je bilo prej v drugem procesu, nas ne zanima). Izračunajte pričakovano število zabeleženih prihodov do časa t.

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
27. avgust 2014

1. Tovornjaki vozijo čez most v prvo smer v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo enega tovornjaka na 5 minut, v drugo smer pa z intenzivnostjo enega tovornjaka na 3 minute. Privzamemo, da sta procesa tovornjakov v eno in drugo smer neodvisna. Vsak tovornjak vozi čez most 1 minuto. V intervalu ene ure gledamo vse tovornjake, ki se peljejo v prvi smeri in v tem intervalu zapeljejo na most. Izračunajte pričakovano število srečanj teh tovornjakov z nasproti vozečimi tovornjaki na mostu.

2. Telefonski klici na določeno centralo prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 5 klicev na uro. Z verjetnostjo 80% gre za domač klic, z verjetnostjo 20% pa gre za klic iz tujine. Recimo, da je v prvi uri prišel natanko en klic iz tujine (o domačih ne vemo nič). Izračunajte pogojni pričakovani čas drugega klica (najsi bo domač ali pa iz tujine).

3. Dan je Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = t^2 e^{-t}$. Vsak prihod povzroči šok, katerega učinek ob času δ enot po tem prihodu je enak $e^{-\delta}$. Izračunajte pričakovani skupni učinek šokov ob času 1.

4. Dan je prenovitveni proces z zaostankom, pri katerem so medprihodni časi od drugega naprej porazdeljeni zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & ; t > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev prvega medprihodnega časa, tako da bo proces stacionaren.

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika

8. september 2014

1. Stanko kupi žarnico. Če le-ta traja več kot čas a, je zadovoljen in, ko se pokvari, kupi novo žarnico. Če pa žarnica traja manj kot čas a, najprej počaka do časa a po tistem, ko je kupil zadnjo žarnico, nakar kupi sijalko. Izračunajte pričakovani čas od začetka do trenutka, ko Stanko kupi sijalko, če veste, da so življenjske dobe žarnic neodvisne in porazdeljene eksponentno s pričakovano vrednostjo b.

2. V hišo letata dve vrsti žuželk: muhe z intenzivnostjo ena na 2 minuti in ose z intenzivnostjo ena na 5 minut, oboje v skladu s homogenim Poissonovim procesom in neodvisno druge od drugih. Recimo, da so v prvih 5 minutah v hišo priletele natanko tri muhe. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je v prvi minuti v hišo priletela največ ena žuželka?

3. *Starost* procesa štetja ob času t je definirana kot čas, ki je minil od zadnjega prihoda, če je le-ta sploh bil, sicer pa je starost enaka t. Izračunajte pričakovano starost nehomogenega Poissonovega procesa s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = 1/(1+t)$ ob času t.

4. Policist Rudi službuje zdaj v kraju A, zdaj v kraju B. Ko pride v kraj A, ga v pričakovanem času 2 in neodvisno od zgodovine premestijo v kraj B. Ko pa pride v kraj B, ga najprej pustijo pri miru toliko časa, kot je bil prej v kraju A, nato pa ga v pričakovanem času 1 spet neodvisno od zgodovine premestijo v kraj A.

   a) Izračunajte dolgoročni delež časa, ko Rudi službuje v kraju A.

   b) Pri katerem pogoju na porazdelitvi časa, ko je Rudi v kraju A in B, je v limiti, ko gre t proti neskončno, tudi verjetnost, da je Rudi ob času t v kraju A, enaka temu rezultatu?

2012/13

1. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
11. april 2013

1. Dan je proces štetja, kjer je $N_t + 1 \sim \text{Geom}(e^{-t})$; oznaka N_t kot ponavadi pomeni število prihodov do časa t. Izračunajte pričakovani čas prvega in drugega prihoda.

2. Standardno kocko mečemo, dokler ne pade najmanj pet pik (t. j. dokler se na zgornji strani kocke ne pokaže pet ali šest pik). Meti so neodvisni. Izračunajte pričakovano skupno število pik, ki padejo.

3. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Naj bo $a, b > 0$.

   a) Kolikšna je verjetnost, da se n-ti prihod zgodi do časa a in mu v naslednjih b časovnih enotah ne sledi noben prihod?

   b) Označimo z X število prihodov v časovnem intervalu $[0, a]$, ki jim v naslednjih b časovnih enotah ne sledi noben prihod. Izračunajte $\mathbb{E}(X)$.

4. Andraž in Bine prideta na obisk k neki družini, ki ima psa. Vsak prinese svoje brikete za priboljšek. Andraž jih deli psu v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 3, Bine pa jih deli z intenzivnostjo 1, neodvisno od Andraža. Pes požre vse dobljene brikete, vse dokler ne požre Binetovega: ta ga tako zasiti, da od takrat naprej ne požre nobenega več. Izračunajte pričakovano število briketov, ki jih pes požre do časa t.

2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
6. junij 2013

1. Podjetje išče sodelavca za določen projekt, ki pa ga mora najti najkasneje v mesecu dni, sicer projekt propade. Ponudbe prihajajo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom s trenutno intenzivnostjo e^{-t}, kjer je t čas v mesecih.

   a) Kolikšna je verjetnost, da se sploh kdaj pojavi kakšen kandidat?

   b) Kolikšna je verjetnost, da podjetje pravočasno najde sodelavca?

   c) Izračunajte pričakovano število ponudb, ki pridejo prepozno (t. j. za prvo ponudbo ali pa kasneje kot en mesec po razpisu).

2. Ionizirajoči žarki prihajajo v Geigerjev števec v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 50.000 na sekundo. Toda potem, ko Geigerjev števec zazna žarek, je onesposobljen za $6 \cdot 10^{-5}$ sekunde (*mrtvi čas*). Takrat ne zaznava nobenih žarkov, potem pa jih spet normalno zaznava. Izračunajte pričakovano dolžino mrtvega časa znotraj prve 10^{-4} sekunde. Privzamemo, da števec na začetku normalno zaznava žarke.

3. Gusti se vozi iz Ljubljane v Koper in nazaj. Tja gre vedno po avtocesti s hitrostjo 100 km/h. Nazaj pa gre po stari cesti, kjer je povprečna hitrost potovanja porazdeljena enakomerno na intervalu od 60 km/h do 80 km/h. Po avtocesti je do Kopra 100 km, po stari cesti pa 120 km. Izračunajte dolgoročni delež časa, ki ga Gusti prebije na stari cesti.

4. Življenjska doba na začetku brezhibnega releja je porazdeljena eksponentno s pričakovano vrednostjo t_0. Ko se izteče, serviser rele takoj zamenja. Vendar pa je zamenjani rele brezhiben le z verjetnostjo p. Če ni brezhiben, se to pokaže takoj in ga serviser nemudoma spet zamenja z novim.

   a) Predstavite menjave relejev kot prenovitveni proces z zaostankom.

   b) Izračunajte pričakovano število relejev, ki jih je moral serviser zamenjati do časa t, če privzamete, da na začetku rele deluje.

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
20. junij 2013

1. Pepi lovi ribe, ki prijemljejo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 3 ribe na uro. Brž ko ujame dve ribi, pa gre do sosednega ribnika, kjer ribe prijemljejo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 ribi na uro. Kolikšna je verjetnost, da je v prvi uri:

   a) ujel manj kot dve ribi?

   b) ujel več kot dve ribi?

2. Žena in mož iščeta rabljen avtomobil. Vsak gledata oglase za svojo priljubljeno znamko avtomobilov. Primerni oglasi za ženino znamko prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ, primerni oglasi za moževo znamko pa v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo μ. Žena je pripravljena iti v nakup, ko naleti na tretji primeren oglas za svojo znamko, mož pa, ko naleti na drugi primeren oglas za svojo znamko. Zakonca kupita avto, brž ko je eden od njiju pripravljen iti v nakup. Privzamemo, da sta procesa prihajanja primernih oglasov za obe znamki neodvisna. Določite pričakovani čas, ob katerem zakonca kupita avto.

3. Dan je nehomogen Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = 1/(1+t)$. Naj bo $W = N_3 - N_1$ število prihodov v časovnem intervalu od 1 do 3. Nadalje naj bo $A = \{N_2 = 2\}$ dogodek, da sta se do časa 2 zgodila natanko dva prihoda. Izračunajte $\mathbb{E}(W \mid A)$ in $\mathrm{var}(W \mid A)$.

4. Žena in mož iščeta zlata zrna v rečnem pesku. Da najde zrno, žena porabi v povprečju 20 minut, mož pa 30 minut; čas iskanja je v obeh primerih porazdeljen eksponentno. Zrna začne iskati mož, žena pa počiva. Ko mož najde zrno, žrebata, in sicer z verjetnostjo 2/3 nadaljuje z iskanjem žena, z verjetnostjo 1/3 pa mož, drugi pa počiva. Ko tisti, ki išče, najde zrno, spet na enak način (in neodvisno od zgodovine) ponovita žrebanje, ki odloča, kdo bo naprej iskal.

   a) Izračunajte pričakovano skupno stevilo zrn, ki jih bosta na ta način našla do časa t.

   b) Ali je proces, ki šteje najdena zrna, stacionaren?

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
26. avgust 2013

1. Francoska ruleta ima 37 zarez, od tega 18 rdečih. Lojze ima na začetku 100 evrov in dokler ima še kaj denarja, stavi en evro na rdečo. Če igro dobi, se njegovo premoženje poveča, če izgubi, pa zmanjša za en evro. Izračunajte pričakovano število iger, ki jih odigra Lojze. Ni potrebno posebej utemeljevati, da Lojze z verjetnostjo ena slej ko prej izgubi ves denar.

2. Na teraso letijo borove iglice v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 3 iglice na uro. Privzamemo, da so lokacije posameznih iglic neodvisne in porazdeljene enakomerno. Terasa je razdeljena na dva dela: levi del obsega dve tretjini, desni del pa eno tretjino terase.

   Recimo, da sta v prvi uri na celo teraso padli natanko dve iglici. Izračunajte pogojni pričakovani čas, ko na desni del terase pade druga iglica (seveda druga med tistimi, ki padejo na desni del).

3. Dan je nehomogen Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = e^t$. Izračunajte verjetnost, da v časovnem intervalu, ki sledi prvemu prihodu in je dolg eno enoto, ni nobenega prihoda.

4. Direktor zamenja tajnico, brž ko naredi dve veliki napaki. Tajnice delajo napake v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo ene napake na pol leta. Ko se direktor odloči zamenjati tajnico, da razpis, na katerega se vselej prijavi veliko kandidatk, nakar drugo za drugo kliče na razgovor. Z verjetnostjo $1/3$ se kandidatka na razgovoru dobro odreže in direktor jo zaposli. Sicer pa jo odslovi in takoj pokliče naslednjo kandidatko.

   Direktor je pravkar zaposlil novo tajnico. Izračunajte pričakovano število nadaljnjih kandidatk, ki se v t letih zvrstijo na razgovoru pri direktorju.

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
9. september 2013

1. Erazem odpre vrata v hišo, da prezrači, nakar začnejo vanjo leteti muhe v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 20 muh na uro (najprej v hiši ni muh). Brž ko prva muha prileti v hišo, jo Erazem začne loviti in jo po slučajnem času ujame. Ko ujame prvo muho oziroma ko v hišo prileti druga (kar se zgodi kasneje), zapre vrata, tako da v hišo ne prileti nobena muha več, in polovi vse muhe, ki so še v hiši. Čas, ki ga Erazem potrebuje, da ujame posamezno muho, je porazdeljen eksponentno s pričakovano vrednostjo 2 minuti. Privzamemo, da so časi lovljenja neodvisni tako med seboj kot tudi od procesa prihajanja muh v hišo.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je Erazem, ko je druga muha priletela v hišo, še vedno lovil prvo muho?

   b) Izračunajte pričakovano število muh, ki so priletele v hišo, medtem ko je Erazem lovil prvo muho.

   c) Izračunajte pričakovani čas, ki je minil od odprtja vrat do trenutka, ko je Erazem ujel zadnjo muho.

2. Ob časih, ki tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $1/3$, vržemo kovanec, na katerem z verjetnostjo $3/10$ pade cifra, z verjetnostjo $7/10$ pa grb. Kaj pade ob posameznem metu, je neodvisno tako od preostalih metov kot tudi od časov metov. Naj bo T čas, ko prvič vržemo kovanec, A pa dogodek, da 2 časovni enoti od začetka ni bilo nobenega grba. Izračunajte $\mathbb{E}(T \mid A)$.

3. Dan je nehomogen Poissonov proces s funkcijo intenzivnosti:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\,e^t - 1}\,.$$

   a) Kolikšna je verjetnost, da je bil v tem procesu sploh kakšen prihod?

   b) Izračunajte $\mathbb{E}(T)$, kjer je T čas *zadnjega* prihoda v tem procesu, če je bil kakšen prihod, sicer pa naj bo $T = 0$.

4. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Pogojno na celotno zgodovino do časa posameznega prihoda je le-ta z verjetnostjo $1 - e^{-\mu T}$ označen kot *sprejet*; tu je T čas, ki je minil od zadnjega prihoda. Izračunajte dolgoročno število sprejetih prihodov na časovno enoto.

2011/12

1. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
19. april 2012

1. Občasno merimo neko količino, pri čemer so izmerjene vrednosti neodvisne in imajo enako porazdelitev, ki je zvezna. Prvo meritev opravimo ob času nič, naslednje meritve pa opravljamo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Označimo s T čas meritve prve vrednosti, ki je višja od začetne izmerjene vrednosti. Določite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

   Namig: glejte preživetveno funkcijo in pri njenem izračunu pogojujte na število meritev do določenega časa.

2. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ, v katerem vsak prihod povzroči šok, katerega učinek po času s je enak $1 - s$, če je $s < 1$, sicer pa je učinek enak nič. Izračunajte pričakovani skupni učinek vseh šokov dotedanjih prihodov ob času $t \geq 1$.

3. Na nekem študiju so nehali izvajati program, iz katerega mora študent Zvone narediti še en izpit. Bodoči izpiti iz tega predmeta se razpisujejo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo λ. Zvone izpit naredi v K-tem poskusu, kjer je K slučajna spremenljivka, porazdeljena geometrijsko s parametrom p in neodvisna od razpisanih rokov. Naj bo T čas od ukinitve programa do trenutka, ko Zvone naredi izpit. Določite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

4. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ in naj bo T čas predzadnjega prihoda pred časom t, če ta obstaja; sicer naj bo $T = 0$. Izračunajte $\mathbb{E}(T)$.

2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
14. junij 2012

1. Odprla se je nova telefonska linija vedeževanja in klici nanjo prihajajo v skladu s nehomogenim Poissonovim procesom s funkcijo intenzivnosti:
$$\rho(t) = \frac{t}{1+t}\,.$$
Recimo, da je prvi klic na to linijo prišel pred časom 2. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je pred časom 2 prišel tudi drugi klic na to linijo?

2. Na sejmu na določenem mestu občasno delijo nagrade. Nagrado dobijo vsi, ki so ob tem času tam. Delitve tvorijo prenovitveni proces, čigar medprihodna porazdelitev je enakomerna na intervalu od 20 do 40 minut. Ob času nič Tonček ravno vidi, da delijo nagrade, prihiti, a je prepozen. Nato čaka, da vnovič delijo nagrade, a največ 30 minut: po tem času se naveliča in gre drugam. Brž ko začnejo deliti nagrade, spet prihiti, a je za tedanjo delitev prepozen in spet čaka ponovno delitev nagrad, a največ 30 minut. Tako ponavlja, dokler ne dobi nagrade. Označimo s T čas, ob katerem Tonček končno dobi nagrado. Izračunajte $\mathbb{E}(T)$. Privzamemo, da je sejem odprt v nedogled.

3. Življenjska doba avtomobila v letih (čas do prve resne okvare) je porazdeljena zvezno z gostoto:
$$f(t) = \begin{cases} t/50 & ;\ 0 < t < 10 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$
Avto uporabljamo, dokler ne pride do prve resne okvare ali pa dokler ne preteče t_1 let – kar pride prej. Nato avto zamenjamo za novega. Nov avto stane 10.000 evrov, a če ob menjavi še ni prišlo do resne okvare, lahko za starega iztržimo še 3.000 evrov, sicer pa nič.

   Kako naj nastavimo čas t_1, da bodo dolgoročni stroški z menjavo avtomobilov najnižji?

4. V homogenem Poissonovem procesu gledamo le *lihe* prihode (t. j. prvega, tretjega, petega, …). Naj bo $\tilde{N}_t$ število lihih prihodov do časa t. Izračunajte $\mathbb{E}(\tilde{N}_t)$.

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
20. junij 2012

1. V časovnem intervalu $[0, 1]$ opazujemo prihode, ki tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Prihod, ki se zgodi ob času t, povzroči šok, katerega učinek ob času 1 je enak $e^{-\alpha(1-t)}$ (za neki $\alpha > 0$, ki je enak za vse). Izračunajte pričakovano vrednost največjega učinka ob času 1 (če ni bilo nobenega prihoda, je ta učinek enak nič).

2. Na ogled kolokvijev, ki se začne ob določeni uri, prihajajo tako študenti finančne kot študenti splošne matematike. Študenti finančne matematike prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 4 študenti na uro, študenti splošne matematike pa v skladu z homogenim Poissonovi procesom z intenzivnostjo 2 študenta na uro. Privzamemo, da so študenti finančne matematike neodvisni od študentov splošne matematike.

   Recimo, da je bil v prve pol ure natanko en ogled. Izračunajte pogojni pričakovani čas ogleda prvega študenta finančne matematike, ki pride. Gledamo vse od začetka ogledov in privzamemo, da študenti od začetka hodijo na ogled v nedogled.

3. Zamudniki prihajajo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom z intenziteto $\rho(t) = e^{-t}$, kjer je t število mesecev zamude.

   a) Kolikšna je verjetnost, da natanko eden zamudi manj kot dva meseca?

   b) Recimo, da res natanko eden zamudi manj kot dva meseca. Kolikšna je pogojna verjetnost, da za njim ne bo nikogar?

4. Prenovitveni proces ima medprihodne čase, ki imajo porazdelitev, podano s kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2(1+t)^3} & ; t \geq 0 \end{cases} .$$

   Narišite graf te porazdelitvene funkcije in določite dolgoročno število prihodov na časovno enoto.

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
2. julij 2012

1. Opazujemo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ, dokler ne naletimo na dva zaporedna prihoda, med katerima mine manj kot δ časa (torej morata biti do konca opazovanja vsaj dva prihoda). Izračunajte pričakovani čas opazovanja.

2. Asistenti in študenti prihajajo poleti na FMF v skladu s homogenim Poissonovim procesom. Vsak od njih je z verjetnostjo 40% asistent, z verjetnostjo 60% pa študent. Prihode obojih opazujemo dve uri. Recimo, da v tem obdobju pridejo natanko trije vsega skupaj. Kolikšna je pogojna verjetnost, da pride prvi asistent na FMF prej kot v eni uri od začetka opazovanja?

3. Izračunajte pričakovani čas drugega prihoda v nehomogenem Poissonovem procesu s funkcijo intenzivnosti $\rho(t) = 1/\sqrt{t}$.

4. Nace igra na igralnem avtomatu, ki v vsaki rundi izvrže nagrado v slučajnem času, ki je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} 2(1-t) & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Takoj ko pride nagrada, je runde konec in vse se začne na novo, neodvisno od zgodovine. Nace pa ima tudi možnost predčasne prekinitve runde. V tem primeru sicer ostane brez nagrade, a prav tako se vse začne na novo.

   Nace igra tako, da vnaprej izbere čas x, po katerem prekine vsako rundo, ki traja dlje kot x. Nadalje Nace vsakič, ko se runda konča ali dobi nagrado, takoj začne igrati na novo. Kako naj izbere čas x, da bo dolgoročno gledano dobil čimveč nagrad na časovno enoto?

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
20. avgust 2012

1. Režiser išče tri igralce, enega moškega in dve ženski. Moški se prijavljajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 na dan, ženske pa z intenzivnostjo 1 na dan, neodvisno od moških. Izračunajte pričakovani čas, ki je potreben, da režiser dobi tako moškega kot obe ženski. Privzamemo, da so vsi kandidati ustrezni.

2. Lan in Žan ustanovita podjetje in postavita na facebook njegov profil. Všečkanja si sledijo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $2/(1+t)$, kjer je t čas v urah. Lan je za računalnikom do prvega všečkanja, a največ eno uro. Ko gre Lan od računalnika, sede za računalnik Žan, dokler ne pride do naslednjega všečkanja, pa naj traja, kolikor hoče. Zapišite porazdelitev časa, ki mine od trenutka, ko postavita profil, do trenutka, ko Žan za računalnikom naleti na prvo všečkanje.

3. Andraž in Bine prideta na obisk k neki družini, ki ima psa. Vsak prinese svoje brikete za priboljšek. Andraž jih deli psu v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2, Bine pa jih deli z intenzivnostjo 3, neodvisno od Andraža. Toda Andraževi briketi so bistveno boljši: pes požre le prvega Binetovega in vse Andraževe. Izračunajte pričakovano število briketov, ki jih pes požre do časa t.

4. Življenjska doba televizorja je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t & ; 0 < t < 5 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$

   kjer je t čas v letih. Ko preteče življenjska doba, ga je potrebno zamenjati. Vse druge okvare zanemarimo. Trgovina da na televizor eno leto garancije.

   Izračunajte dolgoročni letni prihodek trgovine s prodajo televizorjev na zvesto stranko, ki televizor takoj, ko mu poteče življenjska doba, zamenja z enakim novim: če je televizor še pod garancijo, dobi novega brezplačno, sicer pa ga kupi v isti trgovini. Cena televizorja v trgovini je 300 evrov, trgovina pa ga pri grosistu dobi za 200 evrov.

2010/11

1. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
22. april 2011

1. Tone ima službo, v kateri prve štiri ure dobiva naloge, ki tvorijo Poissonov tok z intenzivnostjo $1/2$ naloge na uro. Za vsako nalogo, ki jo dobi, potrebuje točno 4 ure, da jo opravi. Brž ko dobi prvo nalogo, začne opravljati naloge drugo za drugo in brez odmora. Ko opravi vse naloge, gre domov.

   a) Izračunajte matematično upanje časa, ki ga Tone prebije v službi.

   b) Kolikšna je verjetnost, da Tone prebije v službi več kot 17 ur?

2. Potniki od časa nič naprej prihajajo na postajo v skladu s Poissonovim tokom z intenzivnostjo λ, dokler ob času t ne odpelje vlak. Naj bo W vsota čakalnih časov vseh potnikov. Izračunajte $\mathrm{var}(W)$.

3. V igralnici od časa do časa zazvoni zvonec. Vsakič, ko zazvoni zvonec, lahko igralec pritisne na gumb. Igralec dobi igro, če prvič pritisne na gumb ob zadnjem zvonjenju pred časom 1. Privzamemo, da zvonjenja tvorijo Poissonov tok z intenzivnostjo λ.

   Igralec igra tako, da prvič pritisne na gumb ob prvem zvonjenju od časa s naprej (če seveda do njega pride).

   a) Kolikšna je verjetnost, da igralec dobi igro (v odvisnosti od s)?

   b) Kolikšna je optimalna vrednost za s in kolikšna je pri tej izbiri verjetnost, da igralec dobi igro?

4. Slikar je pravkar razstavil sliko za prodajo. Zbiratelju Francu je slika všeč, a potrebuje še dva namiga, da se jo res odloči kupiti. Namigi tvorijo Poissonov tok z intenzivnostjo λ. Ostali kupci, neodvisni od namigov, pa prihajajo v skladu s Poissonovim tokom z intenzivnostjo $\lambda/2$ (in ko tak kupec pride, tudi kupi, če le slika še ni bila prodana). Kolikšna je verjetnost, da Franc dobi sliko?

2. kolokvij iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
10. junij 2011

1. Zamudniki prihajajo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom z intenziteto $\rho(t) = e^{-t}$, kjer je t število mesecev zamude.

   a) Kolikšna je verjetnost, da nihče ne zamudi več kot tri mesece?

   b) Recimo, da zamudita natanko dva (ne glede na to, kdaj prideta, t. j. ali zamudita manj ali več kot tri mesece). Izračunajte pogojno pričakovano zamudo zadnjega zamudnika.

2. Lastnik restavracije bi moral, če bi hotel, da je njegov lokal vzdrževan po predpisih, za to nameniti 10 evrov na dan. Inšpekcija opravlja kontrolne preglede v skladu s prenovitvenim procesom s pričakovanim medprihodnim časom 60 dni. Pri pregledu z verjetnostjo $(10-c)_+/10$ odkrije napako. V tem primeru mora lastnik restavracije plačati globo v višini $100 \cdot (10-c)_+$ evrov, kjer je c dejanski dnevni znesek v evrih, ki ga lastnik namenja za vzdrževanje.

   Kolikšen dnevni znesek se lastniku dolgoročno najbolj splača namenjati za vzdrževanje restavracije?

3. Novopečeni policist lovi prekrškarje, ki prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim tokom z intenzivnostjo λ. Prvega spregleda, nadaljnje pa ujame. Označimo z N_t število prekrškarjev, ki jih je policist ujel do časa t. Izračunajte $\mathbb{E}(N_t)$.

   Namig: proces N_t lahko obravnavate kot prenovitveni proces z zaostankom – določite porazdelitve T_1 in T_n, $n > 1$.

4. Varnostnik varuje neko stavbo. Njegovi obhodi okoli sefa tvorijo prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo, ki je enakomerna na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, merjeno v urah. Najprej je pri sefu, med obhodi ga ni pri sefu, trajanje posameznega obhoda je zanemarljivo.

   a) Označimo z N_t število obhodov do časa t. Izračunajte $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t}$.

   b) Recimo, da je varnostnik do trenutka uro in pol od začetka varovanja sef obhodil natanko enkrat. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ga v naslednje pol ure ne bo?

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
1. julij 2011

1. Gasilska postaja dobiva klice na pomoč v skladu s Poissonovim procesom z intenzivnostjo enega klica na 4 ure.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo v prvih 12 urah prejela vsaj dva klica na pomoč?

   b) Recimo, da je v prvih 12 urah res prejela vsaj dva klica na pomoč. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je prvi klic na pomoč dobila v prvih 4 urah?

   Namig: glejte nasprotne dogodke.

2. Ribiča Pepe in Rudi lovita ribe, dokler Pepe ne ujame vsaj ene ribe, nato pa mora ribo ujeti še Rudi (ne glede na to, ali je pred Pepetovim prvim ulovom že kaj ujel). Obe lovita ribe neodvisno in v skladu s homogenim Poissonovim procesom, Pepe z intenzivnostjo 2 ribi na uro, Rudi pa z intenzivnostjo 3 ribe na uro. Označimo z S čas, ki ga prebijeta na ribolovu.

   a) Izračunajte $\mathbb{E}(S)$ in $\mathrm{var}(S)$.

   b) Kolikšna je verjetnost, da je Rudi ujel ribo že pred Pepetom?

3. Dan je nehomogen Poissonov proces z intenzivnostjo:

$$\rho(t) = \frac{1}{1+t}\,.$$

   Določite porazdelitev časa prvega prihoda T_1 in medprihodnega časa T_2.

4. Manja po telefonu prodaja določen izdelek. Verjetnost, da bo stranko uspela prepričati do časa t, je enaka $3(t - t^2)$, če je $t \le 1/2$, in $3/4$, če je $t \ge 1/2$ (vsakršno prepričevanje, ki gre čez $1/2$ časovne enote, je torej zaman). Če stranko prepriča, pogovor takoj konča in pokliče naslednjo stranko. To pa naredi tudi, če ji stranke po času τ še ni uspelo prepričati.

   Kako naj izbere čas τ, da bo dolgoročno gledano prodala čimveč izdelkov?

   Namig: pomagajte si z izražavo matematičnega upanja nenegativne slučajne spremenljivke s kumulativno porazdelitveno funkcijo oz. funkcijo preživetja:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_X(x)\bigr)\,\mathrm{d}x\,.$$

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
22. avgust 2011

1. Trava zraste 2 centimetra na dan. Franc jo hodi kosit v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo ene košnje na 5 dni. Ko pride, jo pokosi na dolžino nič.

   Franc je pravkar pokosil travo. Izračunajte njeno pričakovano višino čez 15 dni.

2. V hišici ob potoku na robu gozda stanujeta Stanka in Tone. Stanka se odpravi v gozd nabirat jurčke, Tone pa gre hkrati k potoku lovit postrvi. Stanka nabira jurčke v skladu s Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 jurčka na uro, Tone pa lovi postrvi v skladu s Poissonovim procesom z intenzivnostjo 1 postrvi na uro. Privzamemo, da lovita neodvisno.

   Stanka se vrne domov, brž ko nabere dva jurčka, Tone pa, brž ko ulovi eno postrv. Naj bo D čas, ko se oba vrneta domov. Izračunajte porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke D.

3. Zamudniki prihajajo v skladu z nehomogenim Poissonovim procesom z intenziteto $\rho(t) = e^{-t}$, kjer je t zamuda v mesecih.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je prišel *natanko* en zamudnik in da je le-ta zamudil več kot dva meseca?

   b) Recimo, da je res prišel natanko en zamudnik in zamudil več kot dva meseca. Izračunajte pogojni pričakovani čas njegove zamude.

      Namig: kumulativna porazdelitvena funkcija.

4. Od Deviške plaže do hotela vozi avtobus. Zaradi nepredvidljivih prometnih razmer so časi povratka avtobusa porazdeljeni enakomerno na intervalu od 20 minut do 1 ure, so pa med seboj neodvisni.

   a) Izračunajte asimptotično dolgoročno število prihodov avtobusa na uro.

   b) Peteršiljčkovim je avtobus ravno ušel, zato se gredo še malo kopat in pridejo čez 40 minut spet na postajo. Kolikšna je verjetnost, da bodo čakali manj kot 20 minut?

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
5. september 2011

1. V igralnici dobitki prihajajo v skladu s homogenim Poissonovom procesom z intenzivnostjo 1 dobitka na minuto. Igralec ob času, ki ga izbere sam, pritisne na gumb in dobi prvi dobitek, ki zatem prispe, a le, če se to zgodi v 3 minutah od začetka igranja. Če igralec pritisne na gumb ob času t od začetka igranja, je nagrada vredna $e^t - 1$. Kdaj naj igralec pritisne na gumb, če želi imeti največjo pričakovano vrednost dobitka?

2. Stranke prihajajo v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 stranki na uro. Tri četrtine strank je prijaznih, ena četrtina pa je neprijazna. Prijaznost posameznih strank je neodvisna. Kolikšna je verjetnost, da v eni uri poslovanja pride natanko ena neprijazna stranka, za njo pa ne pride nobena stranka več?

3. Dan je nehomogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\rho(t) = t$. Izračunajte $\mathbb{E}(N_1 N_2)$, kjer N_t kot običajno pomeni število prihodov do časa t.

4. H gospe Genovefi zahaja berač, ki vsakič izprosi nekaj miloščine. Če mu Genovefa da znesek a, je čas do njegovega naslednjega prihoda porazdeljen ekponentno $\text{Exp}\big(1 + a^{-2}\big)$ in neodvisen od prejšnjih prihodov. Gospa Genovefa beraču vsakič nameni isti znesek.

   a) Kolikšen naj bo, da bo dolgoročno gledano porabila čim manj denarja?

   b) Kolikšna je verjetnost, da bo pri tako določenem znesku a v eni časovni enoti izplačala strogo več kot $2a$?

Izpit iz Slučajnih procesov 1

Finančna matematika
1. marec 2012

1. Na obali je 10 učencev. Ob danem trenutku učitelj ukaže, naj vsi skočijo v vodo. Vendar pa se vsak malo obotavlja: čas skoka posameznega učenca je porazdeljen eksponentno s pričakovano vrednostjo 30 sekund. Izračunajte pričakovani čas skoka tistega učenca, ki skoči drugi.

2. Družba Zavgar d. o. o. da na trg nov ekskluzivni sesalnik. Prodaja sesalnikov teče v skladu s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2 sesalnika na leto. Od vsakega prodanega sesalnika ima družba 200 evrov dobička, povečanega za 5% letne obresti; zaradi enostavnosti privzememo linearni način obrestovanja. Kolikšna je verjetnost, da se jim po letu dni povrne začetni vložek 410 evrov?

3. Dan je nehomogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\rho(t) = t$. Kolikšna je verjetnost, da je razpon med prvim in drugim prihodom (drugi medprihodni čas) večji od časa prvega prihoda?

4. Bine ima plinsko peč, ki jo hodijo pregledovat dimnikarji v skladu s prenovitvenim procesom, katerega medprihodni čas je porazdeljen enakomerno na intervalu od enega do dveh let. Če peč več kot leto dni ni bila servisirana, Bine plača globo v višini 120 evrov. Bine se odloči, da peč servisira vsakič natanko pol leta po zadnjem prihodu dimnikarjev. Izračunajte dolgoročni *letni* znesek globe, ki jo mora Bine plačati dimnikarjem.