

Riemann–Stieltjesov integral, prenovitvena mera, prenovitvena enačba, konvolucija

Martin Raič

Datum zadnjega popravka: 23. maj 2021

Lebesgue–Stieltjesov integral merljive funkcije $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ po funkciji $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki naj bo bodisi (ne nujno strogo) naraščajoča bodisi naj ima omejeno totalno variacijo, je integral funkcije h po Riemann–Stieltjesovi meri, ki pripada funkciji h :

$$\int_A h \, dF := \int_A h(x) \, dF(x) := \int_A h \, d\mu,$$

Pripadajoča (pozitivna ali predznačena) Riemann–Stieltjesova mera μ je določena z:

$$\mu((a, b]) = \lim_{x \downarrow b} F(x) - \lim_{x \downarrow a} F(x)$$

za vse $a \leq b$. Velja:

$$\mu(\{a\}) = \lim_{x \downarrow a} F(x) - \lim_{x \uparrow a} F(x) =: \delta F(a)$$

Če je h zvezna, F pa zvezno odvedljiva na intervalu (a, b) (ki je lahko tudi neskončen), se Lebesgue–Stieltjesov integral prevede na posplošenega Riemannovega:

$$\int_{(a,b)} h \, dF = \int_{(a,b)} h(x) \, dF(x) = \int_a^b h(x) F'(x) \, dx.$$

Velja tudi:

$$\int_{\{a\}} h \, dF = h(a) \delta F(a).$$

Poleg tega za vsako slučajno spremenljivko s kumulativno porazdelitveno funkcijo F velja:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h \, dF.$$

Prenovitvena mera $M(t) := \mathbb{E}(N_t)$ prenovitvenega procesa ustreza **prenovitveni enačbi**:

$$M(t) = F(t) + \int_{[0,t]} M(t-s) \, dF(s),$$

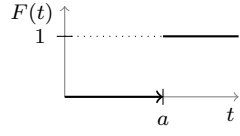
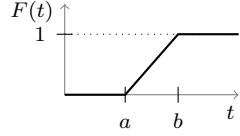
kjer je F kumulativna porazdelitvena funkcija medprihodne porazdelitve. Če ima le-ta gostoto f , lahko pišemo:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-s) f(s) \, ds.$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka funkcije $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcija, podana s predpisom:

$$\hat{F}(z) = \int_{[0,\infty)} e^{-zt} \, dF(t),$$

kjer za $t < 0$ predpišemo $F(t) = 0$. Osnovne Laplace–Stieltjesove transformiranke:

$F(t)$	$\hat{F}(z)$	$F(t)$	$\hat{F}(z)$
1	1		e^{-az}
t^r	$\frac{r!}{z^r}$		$\frac{e^{-az} - e^{-bz}}{(b-a)z}$
$t^r e^{\alpha t}$	$\frac{r! z}{(z - \alpha)^{r+1}}$	$G(t-a) \mathbf{1}(t \geq a) ; a \geq 0$	$e^{-az} \hat{G}(z)$
$\int_0^t s^r e^{\alpha s} ds$	$\frac{r!}{(z - \alpha)^{r+1}}$		
$\int_{[0,t]} e^{\alpha s} dG(s)$	$\hat{G}(z - \alpha)$		

Laplaceova transformiranka (porazdelitve) slučajne spremenljivke X z vrednostmi v $[0, \infty)$ je Laplace–Stieltjesova transformiranka njene kumulativne porazdelitvene funkcije. To je tudi funkcija, ki z preslika v $\mathbb{E}[e^{-zX}]$.

Stieltjesova konvolucija funkcij F in G : $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana kot:

$$(F \star G)(t) := \int_{[0,t]} F(t-u) dG(u) = \int_{[0,t]} G(t-u) dF(u) = (G \star F)(t),$$

kjer za $t < 0$ spet predpišemo $F(t) = G(t) = 0$. Tako lahko prenovitveno enačbo za prenovitveno mero zapišemo tudi takole:

$$M = F + M \star F.$$

Stieltjesova konvolucija je komutativna, asociativna in bilinearna.

Če sta F in G kumulativni porazdelitveni funkciji neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, je $F \star G$ kumulativna porazdelitvena funkcija njune vsote.

Laplace–Stieltjesova transformiranka Stieltjesove konvolucije je produkt

Laplace–Stieltjesovih transformirank posameznih funkcij:

$$\widehat{F \star G} = \hat{F} \hat{G}.$$

Posledično je Laplaceova transformiranka vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk produkt transformirank.

Laplace–Stieltjesova transformiranka $\hat{M}$ prenovitvene mere M torej zadošča enačbi $\hat{M} = \hat{F} + \hat{M}\hat{F}$ in je zato enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{F}(z)}{1 - \hat{F}(z)}.$$