REŠITVE NOVEJŠIH KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ OSNOV VERJETNOSTI IN STATISTIKE

FRI, VSŠ – programska oprema

Zbral: Martin Raič

2009/10

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 19. 4. 2010

FRI – visoki strokovni program

1. $\dfrac{3!\,4!\,5!\,3!}{12!} = \dfrac{1}{4620} \doteq 2\dot{}16 \cdot 10^{-4}$.

2. a) Označimo z A iskani dogodek, da bo kocko potrebno metati največ dvakrat. Le-ta je unija naslednjih treh nezdružljivih dogodkov:

$$H_1 = \{\text{prvič vržemo dve piki}\}\,, \qquad P(H_1) = \frac{1}{6}$$

$$H_2 = \{\text{prvič in drugič vržemo 1 piko}\}\,, \qquad P(H_2) = \frac{1}{36}$$

$$H_3 = \{\text{prvič vržemo več kot 2 piki, drugič pa 2 piki}\}\,, \qquad P(H_3) = \frac{4}{36}$$

Torej je $P(A) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \dfrac{11}{36} \doteq 0\dot{}3056$.

b) $P(H_3 \mid A) = \dfrac{P(H_3 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(H_3)}{P(A)} = \dfrac{4}{11} \doteq 0\dot{}3636$.

3. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0\dot{}4 & 0\dot{}3 & 0\dot{}2 & 0\dot{}1 \end{pmatrix}$, $\quad E(X) = 2, \quad D(X) = 1$.

4. a) Porazdelitev je podana takrat, ko so vse verjetnosti večje ali enake nič, njihova vsota pa je 1. Ni se težko prepričati, da je slednje res za vsak t. Iz $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}t \geq 0$ dobimo $t \geq -1$, iz $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}t \geq 0$ dobimo $t \leq 1$, iz $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t^2 \geq 0$ dobimo $-\sqrt{3/2} \leq t \leq \sqrt{3/2}$, preostali elementi pa so vselej večji ali enaki nič. Tabela torej podaja porazdelitev natanko tedaj, ko je $-1 \leq t \leq 1$.

b) $E(X) = 1, \quad E(Y) = 1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^2, \quad E(XY) = 1 - \frac{2}{3}t^2, \quad K(X,Y) = \frac{1}{3}t(1-t)$. Slučajni spremenljivki bosta torej nekorelirani natanko tedaj, ko bo $t = 0$ ali $t = 1$.

c) Slučajni spremenljivki bosta neodvisni kvečjemu tedaj, ko bosta nekorelirani, torej za $t = 0$ ali $t = 1$. Pri $t = 0$ je $P(X = 2, Y = 2) = 0$, medtem ko je $P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = \frac{1}{12} \neq 0$, torej sta X in Y odvisni. Pri $t = 1$ pa sta obe vrstici enaki, od koder sledi, da sta X in Y neodvisni (lahko pa tudi preverimo vse navzkrižne verjetnosti).

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 4. 6. 2010

FRI – visoki strokovni program

1. Enakomerna porazdelitev na predpisanem intervalu pomeni, da so slučajne spremenljivke X_i porazdeljene zvezno z gostoto:

$$g(x) = \begin{cases} 1/2 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Sledi:

$$E(X_i) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 \,, \quad D(X_i) = E(X_i^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \,.$$

Sledi $E(\bar{X}) = 0$ in $D(\bar{X}) = 1/300$. Po centralnem limitnem izreku približno velja:

$$P(-0\text{˙}05 < \bar{X} < 0\text{˙}05) \approx \Phi\left(\frac{0\text{˙}05 - 0}{\sqrt{1/300}}\right) - \Phi\left(\frac{-0\text{˙}05 - 0}{\sqrt{1/300}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \doteq 0\text{˙}6135 \,.$$

Točen rezultat: 0˙612988.

2. a) Trditev sledi iz dejstva, da je $g(x) \geq 0$ za vsak x in še:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{1+x)^3} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{1}^{\infty} = 1 \,.$$

b) Če z F označimo pripadajočo kumulativno porazdelitveno funkcijo, za $x \geq 1$ velja:

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{2}{1+t)^3} \, \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \,.$$

95. percentil je tisto število x, ki reši enačbo $F(x) = 0\text{˙}95$, to pa je:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 - 0\text{˙}95}} - 1 \doteq 3\text{˙}472 \,.$$

3. $n = 30, \quad k = 6, \quad \hat{p} = k/n = 0\text{˙}2, \quad c = z_{0.95} = \Phi^{-1}(0\text{˙}45) \doteq 1\text{˙}645,$

$\Delta = \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \doteq 0\text{˙}121.$

Interval zaupanja: $(\hat{p} - \Delta, \hat{p} + \Delta) \subseteq (7\text{˙}9\%, 32\text{˙}1\%)$.

4. a) $P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X > 2) = 1 - \dfrac{5}{2e} \doteq 0\text{˙}0803.$

b) $\chi^2 \doteq 5\text{˙}67, \quad df = 3, \quad K_\alpha = [7.82, \infty).$

Hipoteze ne moremo zavrniti.

Rešitve izpita iz OVS z dne 9. 6. 2010

FRI – visoki strokovni program

1. a) $1 - 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}8 \cdot 0\text{˙}9 = 0\text{˙}6976$, b) $\dfrac{0\text{˙}1}{1 - 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}8 \cdot 0\text{˙}9} \doteq 0\text{˙}1433.$

2. Iz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 + c)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + cx\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + c = 1$$

dobimo $c = 2/3$. Nadalje velja:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2x}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{12} \doteq 0\text{˙}583\,,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{2x^2}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{9}\right)\Big|_0^1 = \frac{19}{45}\,,$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 19/45 - 49/144 = \frac{59}{720} \doteq 0\text{˙}08194\,.$$

3. Velja $E(\bar{X}) = 1$ in $\sigma(\bar{X}) = 2/\sqrt{n}$. Sledi:

$$P(\bar{X} \geq 0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0\text{˙}99$$

oziroma:

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0\text{˙}99\,,$$

kar je res približno pri $\sqrt{n}/2 \geq 2\text{˙}33$ oziroma $n \geq 21\text{˙}72$. Torej je najmanjši n, ki ustreza, enak 22.

4. $n = 10$, $s \doteq 2\text{˙}925$, $df = 9$, $\chi^2_{0.025} \doteq 2\text{˙}70$, $\chi^2_{0.975} \doteq 19\text{˙}02$.

Interval zaupanja: $\left(s\sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{0.975}}},\ s\sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{0.025}}}\right) \subseteq (2\text{˙}12, 5\text{˙}63).$

Rešitve izpita iz OVS z dne 29. 6. 2010

FRI – visoki strokovni program

1. a) $0\text{˙}3 \cdot 0\text{˙}3 + 0\text{˙}2 \cdot 0\text{˙}5 = 0\text{˙}19$,

b) $\dfrac{0\text{˙}2 \cdot 0\text{˙}5}{0\text{˙}3 \cdot 0\text{˙}3 + 0\text{˙}2 \cdot 0\text{˙}5} \doteq 0\text{˙}526$.

2. Iz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-x})\,\mathrm{d}x = \left(e^{-x} - \frac{e^{-ax}}{a}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{a} - 1 = 1$$

dobimo $a = 1/2$. Nadalje velja:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x\big(e^{-x/2} - e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = 3\,, \\ E(2X) &= 2\,E(X) = 6\,, \\ E\big(e^{-X}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \big(e^{-3x/2} - e^{-2x}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

3. Velja $E(X_i) = 1\text{˙}1$ in $D(X_i) = 2\text{˙}29$, torej $E(S) = 110$ in $D(S) = 229$. Iz centralnega limitnega izreka ob upoštevanju popravka s polovičko za celo število x dobimo:

$$P(S > x) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - 110}{\sqrt{229}}\right) \le 0\text{˙}05$$

oziroma:

$$\Phi\left(\frac{x - 109\text{˙}5}{\sqrt{229}}\right) \ge 0\text{˙}99$$

kar je res, približno če je $(x - 109\text{˙}5)/\sqrt{229} \ge 1\text{˙}645$ oziroma $x \ge 134\text{˙}39$. Najmanjši x, ki ustreza, naj bi bil torej 135.

Tudi v resnici je tako, saj je $P(S > 134) \doteq 0\text{˙}05610607$ in $P(S > 135) \doteq 0\text{˙}04940911$.

4. $n = 10$, $\quad \bar{X} = 20\text{˙}78$, $\quad s \doteq 2\text{˙}021$, $\quad df = 9$, $\quad t_{0.995} \doteq 3\text{˙}25$, $\quad \Delta \doteq 2\text{˙}08$.

Interval zaupanja: $(\bar{X} - \Delta, \bar{X} + \Delta) \subseteq (18\text{˙}70, 22\text{˙}86)$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 15. 9. 2010

FRI – visoki strokovni program

1. a) $0{\dot{}}7 \cdot (1 - 0{\dot{}}5) \cdot 0{\dot{}}4 + (1 - 0{\dot{}}7) \cdot 0{\dot{}}5 \cdot 0{\dot{}}4 + (1 - 0{\dot{}}7) \cdot (1 - 0{\dot{}}5) \cdot 1 = 0{\dot{}}35$,

b) $\dfrac{0{\dot{}}7 \cdot (1 - 0{\dot{}}5) \cdot 0{\dot{}}4}{0{\dot{}}35} = 0{\dot{}}4$.

2. $P(X > 2) = \dfrac{1}{36} \displaystyle\int_2^3 (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{36} \left(9x - \dfrac{x^3}{3} \right) \Bigg|_2^3 = \dfrac{2}{27} \doteq 0{\dot{}}0741$,

$$E(X) = \frac{1}{36} \int_{-3}^3 x(9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36} \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_{-3}^3 = 0,$$

$$D(X) = E(X^2) = \frac{1}{36} \int_{-3}^3 x^2(9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36} \left(3x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{-3}^3 = \frac{9}{5} = 1{\dot{}}8\,.$$

3. Velja $E(X_i) = 2$ in $D(X_i) = 1{\dot{}}6$, torej $E(S) = 2000$ in $D(S) = 1600$. Iz centralnega limitnega izreka ob upoštevanju popravka s polovičko dobimo:

$$P(S < 1950) = P(S < 1945{\dot{}}5) \approx \Phi\left(\frac{1949{\dot{}}5 - 2000}{\sqrt{1600}} \right) = 1 - \Phi(1{\dot{}}2625) \doteq$$
$$\doteq 0{\dot{}}10338\,.$$

Brez popravka s polovičko pride $1 - \Phi(1{\dot{}}25) \doteq 0{\dot{}}10565$.
Točen rezultat: 0.103733.

4. $\hat{p} = 0{\dot{}}55$, $\Delta \doteq 0{\dot{}}069$. Interval zaupanja: $48{\dot{}}1\% < p < 61{\dot{}}9\%$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 24. 6. 2011

FRI – VSP, stari program

1. $\dfrac{0{.}6 \cdot 0{.}6}{0{.}4 \cdot 0{.}4 + 0{.}6 \cdot 0{.}6} \doteq 0{.}692.$

2. Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (c + 2x^2)\,\mathrm{d}x = c + \frac{2}{3}$$

izračunamo $c = 1/3$. Nadalje velja:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 \left(\frac{x}{3} + 2x^3\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\,, \\ E(X^2) &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} + 2x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{9} + \frac{2}{5} = \frac{23}{45}\,, \\ D(X) &= \frac{23}{45} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{15}\,. \end{aligned}$$

3. Iz:

$$P(X > 0) = 1 - \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) = 0{.}95$$

oziroma $3/\sigma \doteq 1{.}645$ dobimo $\sigma \doteq 3/1{.}645 \doteq 1{.}82$.

4. $\chi^2 = 10{.}8$, $K_\alpha = (11{.}1,\ \infty)$. Hipoteze ne zavrnemo.

Rešitve izpita iz OVS z dne 20. 9. 2011

FRI – VSP, stari program

1. a) $1 - 0{\cdot}8^4 - 4 \cdot 0{\cdot}8^3 \cdot 0{\cdot}2 = 0{\cdot}1808$.

b) $\dfrac{2 \cdot 0{\cdot}2^2 - 0{\cdot}2^4}{0{\cdot}1808} \doteq 0{\cdot}4336$.

2. a) Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = c\int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x = c\left(ax - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^a\right) = \frac{ca^2}{2}$$

izračunamo $c = \dfrac{2}{a^2}$.

b) Če je $a \geq 1$, je $P(X < 1) = 1$, sicer pa je:

$$P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = c\int_0^1 (a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}\,.$$

Torej mora veljati $\dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{9}$. Po množenju z $9a^2$ in ureditvi dobimo $0 = 5a^2 - 18a + 9 = (a-3)(5a-3)$, kar ima dve rešitvi: $a = 3$ in $a = 3/5$. Toda druga rešitev ne izpolnjuje pogoja $a < 1$, zato ne pride v poštev. Iskana vrednost je torej $a = 3$.

3. Ekvivalentno se je vprašati po verjetnosti, da bomo dobili več kot 100 stav, le-ta pa je približno enaka:

$$1 - \Phi\left(\frac{100{\cdot}5 - 400\cdot 0{\cdot}2}{\sqrt{400\cdot 0{\cdot}2\cdot 0{\cdot}8}}\right) = 1 - \Phi(2{\cdot}5625) \doteq 0{\cdot}0052\,.$$

Točen rezultat (vse zapisane decimalke): $0{\cdot}00619$.

4. Tu je mogoče izvesti več testov, ki med seboj niso ekvivalentni. Videli pa bomo, da je za naše podatke statistični sklep v vseh primerih enak.

Prva možnost: test razlike sredin dveh spremenljivk na eni populaciji. Gledamo razlike, recimo drugi kolokvij minus prvi kolokvij:

$$-40,\ -25,\ -18,\ -11,\ 3,\ -6,\ 15,\ 23,\ -35,\ 0,\ 7$$

in testiramo, ali prihajajo iz populacije s sredino nič. Če jih označimo z $\Delta_1, \ldots \Delta_{11}$, dobimo:

$\bar{\Delta} \doteq -7{\cdot}91, \quad s \doteq 20{\cdot}14, \quad T \doteq -1{\cdot}30, \quad df = 10,$

$K_\alpha = (-\infty, -2{\cdot}23) \cup (2{\cdot}23, \infty)$.

Ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

Druga možnost: test razlike sredin dveh spremenljivk na dveh populacijah.

$\bar{X} \doteq 71{\cdot}91, \quad \bar{Y} = 64, \quad s \doteq 21{\cdot}73, \quad T \doteq -0{\cdot}85, \quad df = 20,$

$K_\alpha = (-\infty, -2\text{˙}09) \cup (2\text{˙}09, \infty)$.
Ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

Tretja možnost: test z znaki. V 4 primerih je bil rezultat na drugem kolokviju boljši, v 6 slabši, v enem primeru pa je bil enak. Dobimo $Z = \dfrac{4-6}{\sqrt{4+6}} \doteq -0\text{˙}63$.
Kritično območje iz normalne aproksimacije: $(-\infty, -1\text{˙}96) \cup (1\text{˙}96, \infty)$.
Točno kritično območje: $|S_+ - S_-| \geq 8$, v našem primeru je $S_+ - S_- = -2$.
Hipoteze ne moremo zavrniti.

Opomba. Če privzamemo normalnost, je najprimernejši prvi test, saj pri njem upoštevamo istoležnost rezultatov (lahko primerjamo rezultata obeh kolokvijev pri isti osebi). Pri drugem testu tega podatka ne moremo uporabiti, poleg tega pa je sporen privzetek, da so vsi rezultati neodvisni. Tretji test spet upošteva istoležnost, ni pa potreben privzetek o normalnosti.

2008/09

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 14. 4. 2009

FRI – visoki strokovni program

1. a) $2 \cdot 0{\dot{}}3 \cdot 0{\dot{}}7 \cdot 0{\dot{}}4^2 + 2 \cdot 0{\dot{}}7^2 \cdot 0{\dot{}}6 \cdot 0{\dot{}}4 = 0{\dot{}}3024$.

b) $\dfrac{2 \cdot 0{\dot{}}7^2 \cdot 0{\dot{}}6 \cdot 0{\dot{}}4}{0{\dot{}}3024} \doteq 0{\dot{}}778$.

2. Z verjetnostjo $\dfrac{19}{37}$ Janez že v prvi igri izgubi. Tedaj je $S = 0$.

Z verjetnostjo $\left(\dfrac{18}{37}\right)^2$ Janez v prvi igri dobi stavo, v drugi pa se izgubi. Tudi tedaj je $S = 0$.

Z verjetnostjo prav tako $\left(\dfrac{18}{37}\right)^2$ Janez v obeh igrah dobi *manque*. Po prvi igri ima dva evra. Evro, ki ga stavi na ničlo, izgubi, iz evra, ki ga stavi na *manque*, pa nastaneta dva. Torej je v tem primeru $S = 2$.

Z verjetnostjo $\dfrac{18}{37} \cdot \dfrac{1}{37}$ pa Janez v prvi igri dobi in v drugi zadene ničlo. Tedaj je $S = 36$.

Torej je:

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 36 \\ \frac{1027}{1369} & \frac{324}{1369} & \frac{18}{1369} \end{pmatrix}.$$

in velja $E(X) = \dfrac{1296}{1369} \doteq 0{\dot{}}947$.

3. Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a cx^2\,\mathrm{d}x = \frac{ca^3}{3}$$

dobimo, da mora biti $c = 3/a^3$. Nadalje iz:

$$3 = E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\,g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{a^3}\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2a}$$

dobimo, da je $a = 1/2$ in $c = 24$.

4. a) $E(Z) = 4\,E(Y) - 3\,E(X) = 0$,
$D(Z) = D(4Y) + D(-3X) = 16\,D(Y) + 9\,D(X) = 25$.

b) $1 - \Phi\big(\frac{6}{5}\big) \doteq 0{\dot{}}1151$.

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 23. 6. 2009

FRI – visoki strokovni program

1. Označimo z $X_1, X_2, \dots X_{5000}$ zaslužke igralcev v posameznih igrah (negativne, če morajo plačati). Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix},$$

od koder izračunamo $E(X_i) = -1/36$ in $D(X_i) = 2915/1296$. Če z $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{5000}$ označimo znesek, ki ga mora igralnica plačati, velja $E(S) = -5000/36 \doteq 138'9$ in $D(S) = 5000 \cdot 2915/1296 \doteq 11246$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(S > 0) \approx 1 - \Phi\left(\frac{138'9}{\sqrt{11246}}\right) \doteq 0'09515\,.$$

Nekoliko natančnejši rezultat dobimo, če verjetnost izgube interpretiramo kot:

$$P(S > 0'5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{0'5 + 138'9}{\sqrt{11246}}\right) \doteq 0'09436\,.$$

Točen rezultat: 0'09465592.

2. a) Očitno je $g(x) \geq 0$ za vsak x, velja pa tudi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^3}\bigg|_1^{\infty} = 1\,,$$

zato je g res gostota.

b) Označimo 99. percentil s q. Očitno je $q \geq 1$, zato velja:

$$P(X < q) = P(X \leq q) = \int_1^q \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{q^3} = 0'99\,.$$

Sledi $q = (0'01)^{-1/3} = \sqrt[3]{100} \doteq 4'64$.

3. $\bar{X} = 50'2$, $\quad s \doteq 2'70$, $\quad df = 9$, $\quad c = t_{0.975} \doteq 2'26$, $\quad \Delta \doteq 1'93$.
Interval zaupanja: $48'26 < \mu < 52'14$.

4. $\chi^2 \doteq 20'24$, $\quad df = 9$, $\quad K_{0.05} \doteq [17'0, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz OVS z dne 1. 7. 2009

FRI – visoki strokovni program

1. a) $\dfrac{12}{54} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{18} \doteq 0{\dot{}}278$.

b) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot 6}{12 + \frac{1}{2} \cdot 6} = \dfrac{1}{5} = 0{\dot{}}2$.

2. Slučajna spremenljivka T je enaka 2, če smo obakrat vrgli šestico. Verjetnost takega dogodka je $1/36$.
Slučajna spremenljivka T je enaka 1, če smo bodisi prvič vrgli trojko, drugič pa ne šestice, bodisi prvič nismo vrgli niti šestice niti trojke, drugič pa smo vrgli trojko. Verjetnost takega dogodka je $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6} + \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.
V vseh ostalih primerih je $T = 0$, verjetnost tega dogodka je torej $1 - \dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{26}{36}$.
Torej je končno:

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{26}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Sledi $E(T) = \frac{11}{36} \doteq 0{\dot{}}306$ in $D(T) = \frac{347}{1296} \doteq 0{\dot{}}258$.

3. Označimo z S število grbov. Laplaceova integralska formula (brez popravka s polovičko) nam da:

$$P\left(S < \frac{n}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - 0{\dot{}}55\,n}{\sqrt{n \cdot 0{\dot{}}55 \cdot 0{\dot{}}45}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0{\dot{}}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{\dot{}}55 \cdot 0{\dot{}}45}}\right) = 0{\dot{}}05\,,$$

od koder dobimo:

$$\frac{0{\dot{}}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{\dot{}}55 \cdot 0{\dot{}}45}} \approx 1.645$$

oziroma $n \approx (20 \cdot 1{\dot{}}645)^2 \cdot 0{\dot{}}55 \cdot 0{\dot{}}45 \doteq 267{\dot{}}89$, kar zaokrožimo na 268.
V resnici je najmanjše možno število metov, ki ustrezajo zahtevi, že 250. Toda pozor! Ne ustreza *vsako* število izdelkov, ki je večje ali enako 250: prvo število, od katerega naprej vsako število naročenih ustreza, je natančno 268, kolikor dobimo iz Laplaceove integralske formule. Nekaj točnih verjetnosti, kjer z n označimo število metov, z S pa število grbov:

$$\begin{aligned}
n = 248: &\quad P(S \le 123) \doteq 0{\dot{}}05010015 \\
n = 249: &\quad P(S \le 124) \doteq 0{\dot{}}05665033 \\
n = 250: &\quad P(S \le 124) \doteq 0{\dot{}}04947395 \\
n = 251: &\quad P(S \le 125) \doteq 0{\dot{}}05593269 \\[4pt]
n = 267: &\quad P(S \le 133) \doteq 0{\dot{}}05053829 \\
n = 268: &\quad P(S \le 133) \doteq 0{\dot{}}04420611 \\
n = 269: &\quad P(S \le 134) \doteq 0{\dot{}}04990508 \\
n = 270: &\quad P(S \le 134) \doteq 0{\dot{}}04365943
\end{aligned}$$

4. Tu je mogoče izvesti več testov, ki med seboj niso ekvivalentni. Videli pa bomo, da je za naše podatke statistični sklep v vseh primerih enak.

Prva možnost: test razlike sredin dveh spremenljivk na eni populaciji. Gledamo razlike, recimo drugi kolokvij minus prvi kolokvij:

$$-40,\ -25,\ -18,\ -11,\ 3,\ -6,\ 15,\ 23,\ -35,\ 0,\ 7$$

in testiramo, ali prihajajo iz populacije s sredino nič. Če jih označimo z $\Delta_1, \ldots \Delta_{11}$, dobimo:
$\bar{\Delta} \doteq -7{\cdot}91, \quad s \doteq 20{\cdot}14, \quad T \doteq -1{\cdot}30, \quad df = 10,$
$K_\alpha = (-\infty, -2{\cdot}23) \cup (2{\cdot}23, \infty).$
Ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

Druga možnost: test razlike sredin dveh spremenljivk na dveh populacijah.
$\bar{X} \doteq 71{\cdot}91, \quad \bar{Y} = 64, \quad s \doteq 21{\cdot}73, \quad T \doteq -0{\cdot}85, \quad df = 20,$
$K_\alpha = (-\infty, -2{\cdot}09) \cup (2{\cdot}09, \infty).$
Ničelne hipoteze ne moremo zavrniti.

Tretja možnost: test z znaki. V 4 primerih je bil rezultat na drugem kolokviju boljši, v 6 slabši, v enem primeru pa je bil enak. Dobimo $Z = \dfrac{4-6}{\sqrt{4+6}} \doteq -0{\cdot}63.$
Kritično območje iz normalne aproksimacije: $(-\infty, -1{\cdot}96) \cup (1{\cdot}96, \infty)$.
Točno kritično območje: $|S_+ - S_-| \geq 8$, v našem primeru je $S_+ - S_- = -2$.
Hipoteze ne moremo zavrniti.

Opomba. Če privzamemo normalnost, je najprimernejši prvi test, saj pri njem upoštevamo istoležnost rezultatov (lahko primerjamo rezultata obeh kolokvijev pri isti osebi). Pri drugem testu tega podatka ne moremo uporabiti, poleg tega pa je sporen privzetek, da so vsi rezultati neodvisni. Tretji test spet upošteva istoležnost, ni pa potreben privzetek o normalnosti.

Rešitve izpita iz OVS z dne 7. 9. 2009

FRI – visoki strokovni program

1. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

2. a) Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b ax^2(b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{ab^4}{12} \quad \text{in}$$

$$E(X) = 3 = \int_{-\infty}^{\infty} x\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b ax^3(b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{ab^5}{20}$$

dobimo $a = 12/625 = 0\dot{}0192$ in $b = 5$.

b) $D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,g(x)\,\mathrm{d}x - 9 = \frac{12}{625}\int_0^5 x^4(5-x)\,\mathrm{d}x - 9 = 1.$

3. Tone bo imel dobiček, če bo dobil več kot 200 iger. Verjetnost, da dobi posamezno igro, je enaka 18/37. Po Laplaceovi integralski formuli (z upoštevanjem popravka s polovičko) dobimo, da je verjetnost, da bo imel Tone dobiček, približno enaka:

$$1 - \Phi\left(\frac{200\dot{}5 - 400 \cdot \frac{18}{37}}{\sqrt{400 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37}}}\right) \doteq 1 - \Phi(0\dot{}591) \doteq 0\dot{}2773\,.$$

Točen rezultat: 0˙2772704.

4. $\bar{X} = 80\dot{}2$, $s \doteq 2\dot{}70$, $df = 9$, $c = t_{0.995} \doteq 3\dot{}25$, $\Delta \doteq 2\dot{}78$.
Interval zaupanja: $77\dot{}42 < \mu < 82\dot{}98$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 18. 9. 2009

FRI – visoki strokovni program

1. $\dfrac{0\text{'}4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0\text{'}4 + \frac{1}{2} \cdot 0\text{'}3\right)}{0\text{'}6 + 0\text{'}4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0\text{'}4 + \frac{1}{2} \cdot 0\text{'}3\right)} \doteq 0\text{'}189.$

2. a) $4/10$.

b) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

c) $E(X) = 1, \quad D(X) = 1.$

3. Naj bo X število kandidatov, ki pridejo. Po Laplaceovi integralski formuli za $k \in \mathbb{Z}$ približno velja:

$$P(X > k) = P\big(X > k + \tfrac{1}{2}\big) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - 149\text{'}5}{\sqrt{250 \cdot 0\text{'}6 \cdot 0\text{'}4}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k - 149\text{'}5}{\sqrt{60}}\right).$$

Desna stran je enaka $0\text{'}05$ za $k \doteq 162\text{'}24$. Od tod zaključimo, da mora predavalnica sprejeti najmanj 163 kandidatov.

Točni mejni verjetnosti: $P(X > 162) \doteq 0\text{'}05243159, \quad P(X > 163) \doteq 0\text{'}03979430.$

4. $\bar{X} = 988\text{'}4, \quad \bar{Y} = 998\text{'}5, \quad s \doteq 8\text{'}195, \quad df = 18, \quad T \doteq -2\text{'}756.$

$K_\alpha = (-\infty, -2\text{'}56]$. Hipotezo zavrnemo.

2007/08

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 3. 4. 2008

FRI – visoki strokovni program

1. a) Cene je lahko razpoznal isti znak, kot ga je poslal Andrej, če se nobeden ni zmotil ali pa če sta se oba zmotila in je Cene Bojanov znak razumel kot Andrejev znak. Označimo z B dogodek, da je Bojan pravilno razumel Andrejev znak, s C pa dogodek, da je Cene razpoznal isti znak, kot ga je poslal Andrej. Tedaj je:

$$P(B) = P(C \mid B) = 0'8\,, \quad P(C \mid \overline{B}) = 0'2 \cdot \frac{1}{4} = 0'05\,,$$

torej po izreku o popolni verjetnosti velja:

$$P(C) = 0'8 \cdot 0'8 + 0'2 \cdot 0'05 = 0'65\,.$$

b) $P(B \mid C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(B)\,P(C \mid B)}{P(C)} = \dfrac{0'64}{0'65} \doteq 0'9846.$

2. Verjetnostni prostor je ugodno razdeliti na enako verjetne izide z ozirom na vrstni red vseh kovancev, pri čemer kovancev z isto vrednostjo ne ločimo. Takšnih izidov je $4!/2! = 12$. Slučajna spremenljivka X je enaka 1, če kovanca za en tolar prideta drug za drugim. Tako si lahko mislimo, da tvorita celoto; izidov, pri katerih se to zgodi, je $3! = 6$. Zaradi simetrije preostanejo po trije izidi, pri katerih je $X = 2$ in $X = 5$. Torej je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3. Velja $c = 1/9$, navzkrižno porazdelitev pa lahko opišemo s tabelo:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	0	1/9	2/9
$X=1$	1/9	2/9	3/9

in robni porazdelitvi sta:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/9 & 3/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

Torej je $E(X) = 2/3$, $E(Y) = 13/9$, $E(XY) = 8/9$, $K(X,Y) = -2/27 \doteq 0'0741$, $D(X) = 2/9$, $D(Y) = 38/81$ in $r(X,Y) = -1/\sqrt{19} \doteq -0'229$.

4. Iz

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(\frac{a}{\sqrt{x}} - 1\right)\mathrm{d}x = \big(2a\sqrt{x} - x\big)\Big|_1^4 = 2a - 3 = 1$$

izračunamo $a = 2$. Pri tem a je tudi $g_X(x) \geq 0$ za vsak x. Nadalje velja:

$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \mathrm{d}x = \big(4a\sqrt{x} - x\big)\Big|_1^4 = 4\big(\sqrt{3} - \sqrt{2}\big) - 1 \doteq 0{\text{˙}}271$$

in še:

$$E(X) = \int_1^4 x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \mathrm{d}x = \left(\frac{4x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_1^4 = \frac{11}{6} \doteq 1{\text{˙}}833\,.$$

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 29. 5. 2008

FRI – visoki strokovni program

1. $E(X_i) = 0\text{˙}4$, $E(Y_i) = 0\text{˙}6$, $\quad D(X_i) = 0\text{˙}24$, $D(Y_i) = 0\text{˙}84$.
$E(S) = 40 \cdot 0\text{˙}4 + 30 \cdot 0\text{˙}6 = 34$, $\quad D(S) = 40 \cdot 0\text{˙}24 + 30 \cdot 0\text{˙}84 = 34\text{˙}8$.
$P(S > 40) \approx 1 - \Phi\left(\dfrac{40\text{˙}5 - 34}{\sqrt{34\text{˙}8}}\right) \doteq 1 - \Phi(1\text{˙}10) \doteq 0\text{˙}14$.
Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $0\text{˙}1364$.

2. $\bar{X} = 57$, $\quad s \doteq 2\text{˙}357$, $\quad df = 9$, $\quad c_1 = \chi^2_{0.005} \doteq 1\text{˙}73$, $\quad c_2 = \chi^2_{0.995} \doteq 23\text{˙}6$.
Interval zaupanja: $1\text{˙}46 < \sigma < 5\text{˙}38$.

3. Za posamezne razrede dobimo:

Razred	N_k	p_k	np_k
do 2	6	$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$	15
2–3	8	$\int_2^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{6}$	5
3–6	9	$\int_3^6 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{6}$	5
od 6 naprej	7	$\int_6^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{6}$	5

$\chi^2 = 11\text{˙}2$, $\quad K_\alpha \doteq [11\text{˙}3, \infty)$. Hipoteze (ravno še) ne moremo zavrniti.

4. $\bar{X} = 3$, $\quad \bar{Y} = 7$, $\quad C_{\mathrm{x}}^2 = 16$, $\quad C_{\mathrm{y}}^2 = 88$, $\quad C_{\mathrm{xy}} = 35$.
Regresija Y glede na X: $y = \dfrac{7 + 35x}{16} = 0\text{˙}4375 + 2\text{˙}1875\, x$.
Regresija X glede na Y: $x = \dfrac{19 + 35y}{88} \doteq 0\text{˙}2159 + 0\text{˙}3978\, y$ oziroma
$y = \dfrac{-19 + 88x}{35} \doteq -0\text{˙}5429 + 2\text{˙}5143\, x$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 17. 6. 2008

FRI – visoki strokovni program

1. Označimo s H_k dogodek, da ima natanko k kupcev najraje čokoladni sladoled ($k = 0, 1, \ldots 6$). Velja:

$$P(H_k) = \binom{6}{k} \cdot 0{\cdot}3^k \cdot 0{\cdot}7^{6-k}\,.$$

Dogodek, da kupci pokupijo ves čokoladni sladoled, je disjunktna unija dogodkov H_5 in H_6 in velja:

$$P(H_5 \cup H_6) = 6 \cdot 0{\cdot}3^5 \cdot 0{\cdot}7 + 0{\cdot}3^6 \doteq 0{\cdot}0109\,.$$

Označimo z J dogodek, da ostanejo še vse škatle jagodnega sladoleda. Izračunati moramo:

$$P(J \mid H_5 \cup H_6) = \frac{P\big((H_5 \cup H_6) \cap J\big)}{P(H_5 \cup H_6)} = \frac{P(H_5 \cap J) + P(H_6 \cap J)}{P(H_5 \cup H_6)}\,.$$

Velja:

$$P(H_k \cap J) = \binom{6}{k} \cdot 0{\cdot}3^k \cdot 0{\cdot}5^{6-k}\,,$$

torej je:

$$P(J \mid H_5 \cup H_6) = \frac{6 \cdot 0{\cdot}3^5 \cdot 0{\cdot}5 + 0{\cdot}3^6}{6 \cdot 0{\cdot}3^5 \cdot 0{\cdot}7 + 0{\cdot}3^6} \doteq 0{\cdot}733\,.$$

2. Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = c \int_1^3 x\,\mathrm{d}x = c\,\frac{x^2}{2}\bigg|_1^3 = 4$$

izračunamo $c = 1/4$. Nadalje velja:

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_2^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\,,$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

3. Iz:

$$0{\cdot}05 = P(X > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

izračunamo $\Phi(1/\sigma) = 0{\cdot}95$, torej $1/\sigma \doteq 1{\cdot}645$, torej $\sigma \doteq 0{\cdot}608$.

4. $\bar{X} = 66, \quad s \doteq 2{\cdot}345, \quad df = 8, \quad \chi^2_{0.025} \doteq 2{\cdot}18, \quad \chi^2_{0.975} \doteq 17{\cdot}5.$

Interval zaupanja: $1{\cdot}58 \leq \sigma \leq 4{\cdot}50$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 26. 6. 2008

FRI – visoki strokovni program

1. a) Označimo s H_k dogodek, da na drugi kocki pade k pik, z A pa dogodek, da na drugi kocki pade več pik kot na prvi. Tedaj velja $P(A \mid H_k) = (k-1)/6$ in po izreku o popolni verjetnosti izračunamo:

$$P(A) = 0\text{'}15 \cdot \frac{1}{6} + 0\text{'}15 \cdot \frac{2}{6} + 0\text{'}15 \cdot \frac{3}{6} + 0\text{'}15 \cdot \frac{4}{6} + 0\text{'}3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Najlažje je izračunati pogojno verjetnost nasprotnega dogodka, t. j. da pade šest pik. Iskana pogojna verjetnost je tako enaka:

$$1 - \frac{0\text{'}3 \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

2. a) $q = 1 - 3p$, b) $0 \le p \le 1/3$, $0 \le q \le 1$, c) $E(X) = 1$,
d) $D(X) = 6p \implies p = 1/3$, $q = 0$.

3. Izbrana števila označimo z $X_1, \ldots X_{100}$. To so neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na $[0,1]$, torej je $E(X_i) = 1/2$ in $D(X_i) = 1/12$. Če z S označimo vsoto, velja $E(S) = 50$ in $D(S) = 100/12$. Sledi:

$$P(S < 45) \approx \Phi\left(\frac{45-50}{\sqrt{100/12}}\right) \doteq 1 - \Phi(1\text{'}732) \doteq 0\text{'}042\,.$$

Točen rezultat: 0'041632.

4. $\bar{X} = 120$, $\bar{Y} = 101$, $s \doteq 21\text{'}1219$, $t \doteq 1\text{'}8914$, $df = 17$, $K_\alpha \doteq (2\text{'}11, \infty)$.
Hipoteze ne moremo zavrniti (t. j. ne moremo sprejeti hipoteze, da delež beljakovin v prehrani vpliva na telesno težo podgan).

Rešitve izpita iz OVS z dne 29. 8. 2008

FRI – visoki strokovni program

1. a) Označimo z A dogodek, da imamo na voljo še pet enakih kozarcev. Nasprotni dogodek je, da iz vsake garniture razbijemo po dva kozarca. Torej je:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{6}{2}^2}{\binom{12}{4}} = \frac{6}{11} \doteq 0˙545\,.$$

b) Označimo z B dogodek, da so vsi štirje razbiti kozarci iz iste garniture. Ker je $B \subseteq A$, je:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{11}{6} \cdot \frac{2}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{135} \doteq 0˙00741\,.$$

2. Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + c\int_1^{\infty} x^{-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{c}{3}$$

izračunamo $c = 3/2$. Sledi:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_1^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{13}{12} \doteq 1˙083\,,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_1^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4}\,,$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{83}{144} \doteq 0˙576\,.$$

3. Označimo ocene, ki jih dobijo učenci, z $X_1, \ldots X_{36}$. Velja:

$$E(X_i) = 1 \cdot 0˙05 + 2 \cdot 0˙2 + 3 \cdot 0˙35 + 4 \cdot 0˙3 + 5 \cdot 0˙1 = 3˙2\,,$$

$$E(X_i^2) = 1^2 \cdot 0˙05 + 2^2 \cdot 0˙2 + 3^2 \cdot 0˙35 + 4^2 \cdot 0˙3 + 5^2 \cdot 0˙1 = 11˙3\,,$$

$$D(X_i) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1˙06\,.$$

Če z $\bar{X}$ označimo srednjo oceno, velja $E(\bar{X}) = 3.2$ in zaradi reprezentativnosti vzorca $D(\bar{X}) = 1.06/36$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo:

$$P(\bar{X} < 3) = P(-\infty < \bar{X} < 3) \approx \Phi\left(\frac{3 - 3˙2}{\sqrt{1˙06/36}}\right) \doteq 1 - \Phi(1˙1655) \doteq$$

$$\doteq 0˙1219\,.$$

Če upoštevamo celoštevilski popravek (t. j. da $\bar{X}$ leži na mreži števil, razmaknjenih za 1/36), aproksimiramo na naslednji način:

$$P(\bar{X} < 3) = P\big(-\infty < \bar{X} < 2\tfrac{71}{72}\big) \approx 0˙1063\,.$$

Točen rezultat: 0˙106632.

4. $\chi^2 = \frac{(37-100\cdot 0.3)^2}{100\cdot 0.3} + \frac{(29-100\cdot 0.3)^2}{100\cdot 0.25} + \frac{(12-100\cdot 0.3)^2}{100\cdot 0.2} + \frac{(22-100\cdot 0.3)^2}{100\cdot 0.25} \doteq 5\text{˙}83.$
$df = 3, \quad K_\alpha \doteq (7\text{˙}81, \infty).$

Hipoteze ne moremo zavrniti.

Rešitve izpita iz OVS z dne 15. 9. 2008

FRI – visoki strokovni program

1. a) Z ozirom na to, koliko zelenih kroglic smo izvekli, preden smo izvlekli prvo rdečo ali belo kroglico, označimo dogodke H_0, H_1 in H_2. Naj bo R dogodek, da prvo rdečo kroglico izvlečemo pred prvo belo. Tedaj velja:

$$P(H_0) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\,, \quad P(H_1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{45}\,, \quad P(H_2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{45}\,.$$

Nadalje je:

$$P(R \mid H_0) = P(R \mid H_1) = P(R \mid H_2) = \frac{5}{8}\,.$$

Ker so vse tri pogojne verjetnosti enake, je po izreku o popolni verjetnosti tudi $P(R) = 5/8 = 0{\cdot}625$.

b) Po Bayesovi formuli je:

$$P(H_2 \mid R) = \frac{P(H_2)\ P(R \mid H_2)}{P(R)} = \frac{1}{45} \doteq 0{\cdot}0222\,.$$

2. Ker mora biti vsota vseh verjetnosti 1, je $q = 0{\cdot}1$. Nadalje je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}7 \end{pmatrix}, \qquad E(X) = 1{\cdot}4\,, \qquad D(X) = 0{\cdot}84\,,$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0{\cdot}3 & 0{\cdot}2 & 0{\cdot}5 \end{pmatrix}, \qquad E(X) = 1{\cdot}7\,, \qquad D(X) = 1{\cdot}81\,,$$

$$E(XY) = 2{\cdot}4\,, \qquad K(X,Y) = 0{\cdot}02\,, \qquad r(X,Y) \doteq 0{\cdot}0162\,.$$

3. Označimo z S število grbov, ki so padli. Po Laplaceovi integralski formuli je:

$$P(S < 50) \approx \Phi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0{\cdot}55}{\sqrt{100 \cdot 0{\cdot}55 \cdot 0{\cdot}45}}\right) \doteq \Phi(-1{\cdot}005) = 1 - \Phi(1{\cdot}005) \doteq 0{\cdot}15744\,.$$

Natančnejši rezultat dobimo, če pri Laplaceovi integralski formuli verjetnost iskanega dogodka interpretiramo kot:

$$P(S < 50) = P(S < 49{\cdot}5) \approx 0{\cdot}13446\,.$$

Točen rezultat: $0{\cdot}1345762$.

4. $\bar{X} = 75$, $\quad s \doteq 3{\cdot}742$, $\quad df = 8$, $\quad c \doteq 2{\cdot}31$, $\quad \Delta \doteq 2{\cdot}88$.

Interval zaupanja: $72{\cdot}12 \le \sigma \le 77{\cdot}88$.

2006/07

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 12. 4. 2007

FRI – visoki strokovni program

1. a) $\frac{1}{3}\big(0\dot{}3 \cdot 0\dot{}5 + 0\dot{}3 \cdot 0\dot{}4 + 0\dot{}5 \cdot 0\dot{}4\big) = \frac{47}{100} \doteq 0\dot{}157.$

b) $\frac{0\dot{}4 \cdot 0\dot{}5}{0\dot{}3 \cdot 0\dot{}5 + 0\dot{}3 \cdot 0\dot{}4 + 0\dot{}5 \cdot 0\dot{}4} = \frac{20}{47} \doteq 0\dot{}426.$

2. $K \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad E(K) = \frac{5}{3} \doteq 1\dot{}67.$

3. $\int_{-1/2}^{1/2} (x^2 + cx^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12} + \frac{c}{80} = 1 \Longrightarrow c = \frac{220}{3} \doteq 73\dot{}3.$

$E(X) = \int_{-1/2}^{1/2} x\left(x^2 + \frac{220}{3}\,x^4\right)\mathrm{d}x = 0.$

$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) = \int_{-1/2}^{1/2} x^2\left(x^2 + \frac{220}{3}x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{37}{210} \doteq$
$\doteq 0\dot{}176.$

4. $P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi\big(\sqrt{3}\big) \doteq 0\dot{}0416.$

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 30. 5. 2007

FRI – visoki strokovni program

1. Če ima X porazdelitev populacije, velja $E(X) = 2$ in $D(X) = 1\text{˙}6$. Torej je: $E(\bar{X}) = E(X) = 2$, $\quad D(\bar{X}) = D(X)/n = 0\text{˙}0016$, $\quad \sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = 0\text{˙}04$.
Sledi:

$$P\big(\big|\bar{X} - E(\bar{X})\big| \le 0.1\big) = P\big(1.9 \le \bar{X} \le 2.1\big) \approx \Phi\left(\frac{2.1 - 2}{0.04}\right) - \Phi\left(\frac{1.9 - 2}{0.04}\right) =$$
$$= 2\,\Phi(2.5) - 1 \doteq 0.988\,.$$

Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $0\text{˙}988035$.

2. Če iskani kvantil označimo s q, mora veljati:

$$P(X \le q) = \int_0^q e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-q} = 0\text{˙}99$$

od koder sledi $e^{-q} = 0\text{˙}01$ in $q = \ln 100 \doteq 4\text{˙}605$.

3. $\bar{X} = 57$, $\quad s \doteq 2\text{˙}357$, $\quad df = 9$, $\quad c = t_{0.995} \doteq 3\text{˙}25$, $\quad \Delta \doteq 2\text{˙}42$.
Interval zaupanja: $54\text{˙}58 \le \mu \le 59\text{˙}42$.

4. Verjetnosti posameznih razredov pri veljavnosti hipoteze H_0:

$$p_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}\,, \qquad p_2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{6}\,,$$
$$p_3 = \int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{2}{15}\,, \qquad p_4 = \int_4^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{5}\,.$$

$\chi^2 = 5\text{˙}24$, $\quad K_\alpha \doteq (7\text{˙}81, \infty)$. $\quad$ Hipoteze ne moremo zavrniti.

Rešitve izpita iz OVS z dne 19. 6. 2007

FRI – visoki strokovni program

1. a) $0{.}4 \cdot 0{.}2 + 0{.}3 \cdot 0{.}5 + 0{.}3 \cdot 0{.}3 = 0{.}32$,

b) $\dfrac{0{.}3 \cdot 0{.}3}{0{.}32} \doteq 0{.}281$.

2. $1 - 0{.}99^{180} - \binom{180}{1} \cdot 0{.}01 \cdot 0{.}99^{179} - \binom{180}{2} \cdot 0{.}01^2 \cdot 0{.}99^{178} \doteq 0{.}269$.

3. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \big(e^{-2x} + c\,e^{-4x}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{c}{4} = 1 \Longrightarrow c = 2$,

b) $\displaystyle E\big(e^X\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \big(e^{-x} + 2\,e^{-3x}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$.

4. $Z = \dfrac{0{.}5 - 0{.}6}{\sqrt{0{.}6 \cdot 0{.}4}}\sqrt{100} \doteq -2{.}04$

Kritično območje: $K_\alpha \doteq (-\infty, -1{.}96) \cup (1{.}96, \infty)$.

Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz OVS z dne 28. 6. 2007

FRI – visoki strokovni program

1. a) $0\text{˙}05 \cdot 0\text{˙}6 = 0\text{˙}03$ (3% vseh oseb),

b) $\dfrac{0\text{˙}05}{0\text{˙}05 + 0\text{˙}6 - 0\text{˙}03} \doteq 0\text{˙}0806$.

2. a) $q = 2p$, b) $0 \le p \le 1/3$, $0 \le q \le 2/3$, c) $E(X) = 1$,

d) $D(X) = 6p \implies p = 1/3,\ q = 2/3$.

3. Če označimo $\mu = E(X)$ in $\sigma = \sqrt{D(X)}$, velja:

$P(X < 0) = \Phi\left(-\dfrac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right) = 0\text{˙}05$.

Sledi $\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right) = 0.95$, $\dfrac{\mu}{\sigma} \doteq 1\text{˙}645$, $D(X) = \sigma^2 \doteq 1\text{˙}478$.

4. $c \doteq 2\text{˙}58$, $\hat{p} \doteq 0\text{˙}072$, $\Delta = c\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \doteq 0\text{˙}021$.

Interval zaupanja: $0\text{˙}051 \le p \le 0\text{˙}093$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 31. 8. 2007

FRI – visoki strokovni program

1. Označimo z G Ep o Gilgamešu, z O Odisejo in z I Iliado. Ko Gregor vrne knjigo, so naslednje tri razporeditve enako verjetne:

$$\text{GOI}, \quad \text{OGI}, \quad \text{OIG}$$

Pri razporeditvah GOI in OGI dobimo spet prvotno razporeditev, če Helena Odisejo vrne na sredino, kar se zgodi s pogojno verjetnostjo 1/3. Pri razporeditvi OIG pa prvotne razporeditve zgolj s prestavitvijo Odiseje ne moremo več dobiti. Verjetnost našega dogodka je tako enaka 2/9.

2. Označimo življenjsko dobo z Z. Tedaj je:

$$E(Z) = \int_0^3 x\left(1 - \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{9}\,x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{2}{9}\,x^3 + \frac{1}{36}\,x^4\right)\Big|_0^3 = \frac{3}{4}$$

$$P(Z \geq 1) = \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{9}\,x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{27}$$

$$P(Z \geq 2 \mid Z \geq 1) = \frac{P(Z \geq 2, Z \geq 1)}{P(Z \geq 1)} = \frac{P(Z \geq 2)}{P(Z \geq 1)} = \frac{1}{8}$$

3. Če z X_i označimo dobiček igralnice v i-ti igri, velja:

$$E(X) = 1 \cdot 0\text{'}8 - 7 \cdot 0\text{'}1 = 0\text{'}1$$
$$D(X) = 1^2 \cdot 0\text{'}8 + 7^2 \cdot 0\text{'}1 - 0\text{'}1^2 = 5\text{'}69$$

Če z S označimo skupni dobiček, je $\mu := E(S) = 400 \cdot 0\text{'}1 = 40$ in $\sigma^2 := D(S) = 400 \cdot 5\text{'}69 = 2276$. Po centralnem limitnem izreku velja:

$$P(X < 0) \approx \Phi\left(\frac{0 - \mu}{\sigma}\right) \doteq 1 - \Phi(0\text{'}84) \doteq 0\text{'}2$$

Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $0\text{'}196450$.

4. $\bar{X} = 75, \quad s \doteq 2\text{'}357, \quad df = 9, \quad c = t_{0.975} \doteq 2\text{'}26, \quad \Delta \doteq 1\text{'}68.$
Interval zaupanja: $73\text{'}32 \leq \mu \leq 76\text{'}68$.

Rešitve izpita iz OVS z dne 20. 9. 2007

FRI – visoki strokovni program

1. Označimo s H_1 hipotezo, da smo prvo števko vzeli iz modre, drugo pa iz rdeče škatle, medtem ko naj bo H_2 hipoteza, da smo storili obratno. Če je A dogodek, da je naše število večje od 50, velja:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A \mid H_1) + P(H_1)\,P(A \mid H_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{17}{45} \doteq 0\text{'}377\,,$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)\,P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{25}{34} \doteq 0\text{'}735\,.$$

2. a) Iz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = c\int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x = c\left(ax - \frac{x^2}{2}\Big|_0^a\right) = \frac{ca^2}{2}$$

izračunamo $c = \dfrac{2}{a^2}$.

b) Če je $a \geq 1$, je $P(X < 1) = 1$, sicer pa je:

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = c\int_0^1 (a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}\,.$$

Torej mora veljati $\dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{9}$. Po množenju z $9a^2$ in ureditvi dobimo $0 = 5a^2 - 18a + 9 = (a-3)(5a-3)$, kar ima dve rešitvi: $a = 3$ in $a = 3/5$. Toda druga rešitev ne izpolnjuje pogoja $a < 1$, zato ne pride v poštev. Iskana vrednost je torej $a = 3$.

3. Označimo z X ceno delnice čez en mesec, z Y pa naš dobiček pri stavi. Tedaj velja:

$$P(X > 120) = 1 - \Phi\left(\frac{120-100}{10}\right) \doteq 1 - 0\text{'}9772 = 0\text{'}0228\,,$$

$$E(Y) = 100\cdot P(X > 120) - 5\cdot P(X \leq 120) \doteq -2\text{'}61\,.$$

Stave se nam torej ne splača sprejeti.

4. $\chi^2 = \dfrac{(126-97)^2}{97} + \dfrac{(141-156)^2}{156} + \dfrac{(98-112)^2}{112} \doteq 11\text{'}86,$

$df = 2, \quad K_\alpha = (9\text{'}21, \infty)$.

Hipotezo zavrnemo.

2005/06

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 29. 4. 2006

FRI – visoki strokovni program

1. 2/13.

2. $193/512 \doteq 0{\dot{}}377$.

3. a) $c = 1/3125000 = 3{\dot{}}2 \cdot 10^{-7}$; b) $P(Y = 0) = 0{\dot{}}64$, $P(Y = 1) = 0{\dot{}}32$, $P(Y = 2) = 0{\dot{}}04$.

4. $E(S) = 350$, $D(S) = 875/3 \doteq 291{\dot{}}7$; $P(X > 320) \doteq 1 - \Phi(-1{\dot{}}76) = \Phi(1{\dot{}}76) \doteq 0{\dot{}}961$ oz. $P(X \geq 321) \doteq 1 - \Phi(-1{\dot{}}70) = \Phi(1{\dot{}}70) \doteq 0{\dot{}}955$ (dopustna je tudi katera koli vmesna možnost).
Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $0{\dot{}}957968$.

Rešitve kolokvija iz OVS z dne 7. 6. 2006

FRI – visoki strokovni program

1. $\Delta = 1\dot{}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0\dot{}3 \cdot 0\dot{}7}{100}} \doteq 0\dot{}09.$
Interval zaupanja: $0\dot{}21 \leq p \leq 0\dot{}39$.

2. $\bar{X} = 101\dot{}7,\ s \doteq 2\dot{}1628,\ T = 2\dot{}486,\ K_\alpha = (2\dot{}82,\ \infty).$
Hipoteze ne zavrnemo.

3. $\chi^2 = 10\dot{}8,\ K_\alpha = (11\dot{}1,\ \infty).$ Hipoteze ne zavrnemo.

4. $Z = \sqrt{\dfrac{3}{10 \cdot 10 \cdot 21}}\big(2 \cdot 126\dot{}5 - 10 \cdot 21\big) \doteq 1\dot{}625,$
$K_\alpha = (-\infty,\ -1\dot{}96) \cup (1\dot{}96,\ \infty).$ Hipoteze ne zavrnemo.

Rešitve izpita iz OVS z dne 28. 6. 2006

FRI – visoki strokovni program

1. a) $\dfrac{9 \cdot 9 \cdot 8}{1000} = 0{\dot{}}648$; b) $\dfrac{9 \cdot 8}{9 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{9}$.

2. $\displaystyle\int_{-b}^{b} (1 + ax)\,\mathrm{d}x = 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$,

$\displaystyle E(X) = \int_{-b}^{b} (x + ax^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2ab^3}{3} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{16b^3} = 3/2.$

3. Naj bo X_i dobiček v i-ti igri in $S := X_1 + \cdots + X_{1000}$.
$E(X_i) = -0{\dot{}}1$, $D(X_i) = 3{\dot{}}09$;
$E(S) = -100$, $D(S) = 3090$, $\sigma(S) \doteq 55{\dot{}}6$.
$\displaystyle P(S > 0) \approx 1 - \Phi\left(\frac{100}{55{\dot{}}6}\right) \doteq 0{\dot{}}036.$
Rezultat, dobljen brez uporabe približnih obrazcev: $0{\dot{}}037431$.

4. $\bar{X} \doteq 104{\dot{}}490909$, $\bar{Y} \doteq 97{\dot{}}242857$, $s \doteq 6{\dot{}}646739$, $t \doteq 2{\dot{}}255391$.
Kritično območje: $K_\alpha = (-\infty, -2{\dot{}}12) \cup (2{\dot{}}12, \infty)$.
Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz OVS z dne 1. 9. 2006

FRI – visoki strokovni program

1. a) $\dfrac{4\cdot 3+6\cdot 5}{10\cdot 9}=\dfrac{7}{15}\doteq 0.467$

b) $\dfrac{4\cdot 3\cdot 2+6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8}\Big/\dfrac{7}{15}=\dfrac{3}{7}\doteq 0.429.$

2. $S\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7\\ 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/8\end{pmatrix},$

$E(S)=7/2=3.5$, $D(S)=27/4=6.75$.

3. $E(X)\doteq 4.935$.

4. $\chi^2=15.638$, $df=6$.

Kritično območje: $K_\alpha=(12.6,\infty)$.

Hipotezo zavrnemo.

Rešitve izpita iz OVS z dne 20. 9. 2006

FRI – visoki strokovni program

1. a) $1 - 0{\cdot}8^4 - 4 \cdot 0{\cdot}8^3 \cdot 0{\cdot}2 = 0{\cdot}1808$.

b) $\dfrac{2 \cdot 0{\cdot}2^2 - 0{\cdot}2^4}{0{\cdot}1808} \doteq 0{\cdot}4336$.

2. $a = 0{\cdot}2$, $b = 0{\cdot}6$, $D(X) = 1{\cdot}6$.

3. $\hat{p} = 0{\cdot}4, \quad c \doteq 2{\cdot}58 \quad \Delta \doteq 0{\cdot}057$.

Interval zaupanja: $0{\cdot}343 \leq p \leq 0{\cdot}457$.

4. $\bar{X} = 49{\cdot}1, \quad s \doteq 1{\cdot}52, \quad t \doteq -1{\cdot}87, \quad df = 9, \quad K_\alpha = (-\infty, -1{\cdot}83)$.

Hipotezo zavrnemo.