VAJE IZ MATEMATIKE

za študente lesarstva

Martin Raič

Datum zadnje spremembe: 6. maj 2019

Kazalo

1. Števila

Računske operacije, enačbe, neenačbe. Grafi linearnih in kvadratnih funkcij ter absolutne vrednosti. (4 ure)

1. Narišite grafa funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = 3 - 2x$.
2. Rešite neenačbo $\dfrac{x+3}{x+2} \leq 2$.

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}}$$

3. Narišite graf funkcije $f(x) = |x|$.
4. Rešite neenačbo $\dfrac{|x-1|}{2} < \dfrac{1}{4}$.
5. Poiščite ničle in narišite grafe funkcij $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 - 4$, $f_3(x) = x^2 - 2x - 4$, $f_4(x) = x^2 - 5x + 7$, $f_5(x) = 5x - 2x^2 - 2$ in $f_6(x) = 4x^2 + 12x + 9$. Če ničle niso celoštevilske, jih locirajte med dve zaporedni celi števili!

V nalogah od 6. do 9. rešite neenačbe.

6. $x^2 + x \geq 6$
7. $\dfrac{|x|}{(x-2)^2} \geq 1$
8. $|x^2 - 1| + |x| < 5$

$$\boxed{\begin{aligned} |x| < a &\iff -a < x < a \\ |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a \\ |x| > a &\iff x < -a \text{ ali } x > a \\ |x| \geq a &\iff x \leq -a \text{ ali } x \geq a \end{aligned}}$$

9. $\big|2|x| - 4\big| \leq 2$

V nalogah od 10. do 20. rešite enačbe.

10. $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 2$.
11. $x^{10} = 1024$.

12. $x^{10} = -1024$.

13. $x^5 = 1024$.

14. $x^5 = -1024$.

15. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

16. $10^y = 1024$.

$$\boxed{a^x = y \Longleftrightarrow x = \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}}$$

17. $2^y = 20$.

18. $4^{x+1} + 2^{2x-1} = 100$.

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\,, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x}$$

19. $\log_{10} x + \log_{10}(x - 15) = 2$.

20. $\log_{10} x - \log_{100}(x - 9) = 1$.

2. Matrike in sistemi

Operacije z matrikami: transponiranje, seštevanje, množenje. Identična in inverzna matrika. Zapis sistemov v matrični obliki. Gaussova eliminacija. Predoločeni sistemi. Aproksimacija podatkov po metodi najmanjših kvadratov. (4 ure)

1. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunajte tiste od matrik A^{T}, B^{T}, $A+B$, $A+A^{\mathrm{T}}$, AB, BA, $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, BB^{T}, $B^{\mathrm{T}}B$ in $(A+5I)B$, ki obstajajo.

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

2. Poiščite matriko X, ki reši matrično enačbo $AXB = I$, kjer je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

V nalogah od 3. do 5. rešite sisteme.

3. $$\begin{aligned} x + 3y + 7z &= 3 \\ 2x + 7y + 11z &= 9 \\ -3x - 8y - 19z &= -11 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x + 3y + 7z &= 3 \\ 2x + 6y + 11z &= 9 \\ -3x - 9y - 19z &= -11 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + 3y + 7z &= 3 \\ 2x + 6y + 11z &= 9 \\ -3x - 9y - 19z &= -9 \end{aligned}$$

Recimo, da sistem $Ax = b$ nima rešitve. Tedaj približno rešitev x, ki se po principu najmanjših kvadratov najbolje prilega sistemu, dobimo kot rešitev sistema $A^T Ax = A^T b$ (ki je vedno rešljiv).

6. Poiščite približno rešitev, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega sistemu:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 3 \\ x &= y \end{aligned}$$

V 7. in 8. nalogi dane podatke aproksimirajte s tisto podano funkcijo, ki se jim po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega.

7.

x	1	2	2	3
y	1	2	3	4

, $y = ax + b$.

8.

x	-1	1	2
y	2	3	-2

, $y = ax^3 + bx$.

3. Ravninska in prostorska geometrija

Operacije z vektorji. Premice in ravnine. (4 ure)

1. Dan je pravilni šesterokotnik $ABCDEF$. Izrazite vektorje $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\vec{u} := \overrightarrow{AF}$ in $\vec{v} := \overrightarrow{AB}$.

2. Določite kote prostorskega trikotnika z oglišči $A(4, 2, 4)$, $B(2, 4, -4)$ in $C(-1, 4, -1)$.

3. Dana sta enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, pri čemer je vektor $\vec{a} + 3\vec{b}$ pravokoten na vektor $2\vec{a} - \vec{b}$. Določite kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

4. Dan je paralelogram $ABCD$ z oglišči $A(1, 1, 1)$, $B(5, 3, 5)$ in $C(4, 1, 7)$, pri čemer je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$. Določite oglišče D ter izračunajte ploščini trikotnika ABC in paralelograma $ABCD$.

5. Dokažite, da v vsakem paralelogramu $ABCD$ (v katerem je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$) velja $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$.

6. Izračunajte prostornino piramide z oglišči $A(0, 1, 0)$, $B(2, 1, 2)$, $C(3, 1, 1)$ in $D(-2, 2, 3)$.

7. Izračunajte prostornino pravilnega oktaedra s stranico a.

   Namig: Koordinatni sistem postavite tako, da bodo oglišča oktaedra na njegovih oseh.

8. Dana je premica, ki gre skozi točki $A(1, 2)$ in $B(2, -1)$.

   a) Zapišite eksplicitno in normalno enačbo te premice.
   b) Izračunajte razdaljo točke $T(2, 4)$ od te premice.
   c) Določite premico, ki gre skozi točko T in je pravokotna na dano premico.
   d) Poiščite točko T_0 na prvotni premici, ki je najbližje točki T.
   e) Poiščite točko T', ki je zrcalna točki T glede na prvotno premico.
   f) Isto še za točko $Q(0, 5)$.

9. Dana je premica, ki gre skozi točki $A(2, 0, 4)$ in $B(4, 3, 4)$.

   a) Zapišite parametrično enačbo te premice.
   b) Izračunajte razdaljo točke $T(3, 0, 5)$ od te premice.
   c) Poiščite točko T_0 na premici, ki je najbližje točki T.
   d) Določite premico, ki gre skozi točko T in je pravokotna na dano premico.
   e) Poiščite točko T', ki je zrcalna točki T glede na dano premico.

10. Dana je ravnina, na kateri ležijo točke $A(0, 1, -1)$, $B(1, 2, 0)$ in $C(2, 2, -1)$.

    a) Zapišite enačbo te ravnine.

b) Izračunajte razdaljo točke $T(1, 1, 1)$ od ravnine.

c) Določite premico, ki gre skozi točko T in je pravokotna na dano ravnino.

d) Poiščite točko T_0 na ravnini, ki je najbližje točki T.

e) Poiščite točko T', ki je zrcalna točki T glede na dano ravnino.

4. Zaporedja

Monotonost zaporedij, stekališče, limita. (6 ur)

- *Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je navzgor omejeno, če ima zgornjo mejo, to pa je tako število M, da je $a_n \le M$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Najmanjše tako število M imenujemo natančna zgornja meja ali supremum zaporedja in označimo $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Maksimum je doseženi supremum.*
- *Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je navzdol omejeno, če ima spodnjo mejo, to pa je tako število m, da je $a_n \ge m$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Največje tako število m imenujemo natančna spodnja meja ali infimum zaporedja in označimo $m = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Minimum je doseženi infimum.*
- *Zaporedje je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.*
- *Število a je stekališče zaporedja $a_1, a_2, a_3, \ldots$, če za vsak $\varepsilon > 0$ za neskončno mnogo indeksov n od nekod naprej velja $|a_n - a| < \varepsilon$.*
- *Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je konvergentno, če ima limito, to je tako število a, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja, da za vse n od nekod naprej velja $|a_n - a| < \varepsilon$. Pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.*
- *Vsaka limita je tudi stekališče.*
- *Stekališča danega zaporedja so natančno limite njegovih konvergentnih podzaporedij.*
- *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima eno samo stekališče.*
- *Za dano naraščajoče zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ so izjave 'je navzgor omejeno', 'ima stekališče' in 'je konvergentno' ekvivalentne. Velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.*
- *Za dano padajoče zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ so izjave 'je navzdol omejeno', 'ima stekališče' in 'je konvergentno' ekvivalentne. Velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.*

V nalogah od 1. do 5. raziščite monotonost zaporedja ter določite supremum, infimum, maksimum in minimum, če obstajajo. Poiščite njegova stekališča in določite, ali je zaporedje konvergentno. Če je, ugotovite, od kod naprej se členi od limite razlikujejo za manj kot $\varepsilon = 0{\cdot}01$.

1. $a_n = \dfrac{n+1}{2n-3}$
2. $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$
3. $a_n = (-1)^n$
4. $a_n = n^{(-1)^n}$
5. $a_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n}$

V nalogah od 6. do 17. izračunajte limite ali pa dokažite, da ne obstajajo.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 17n^2 + 77}{n(2n+1)^2}$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+1)^3}{(2n^3+1)^2}$

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^4+n^3)^2}{(n^3+1)^3}$

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+1)^3}{(2n^4+n^3)^2}$

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+42n} + \sqrt{n+5}}{\sqrt{16n^2+1} + \sqrt[3]{n^3+2006}}$

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{cc} -1 < a < 1: & a > 1: \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = 0 & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0 & \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \end{array}}$$

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1} - 3^{n+1}}{4^n + 2^{n+3}}$

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n+2} + n^{2006}}{3^{2n-3} + 3^{3n+3}}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2{\cdot}71828}$$

14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+5}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e\,, \text{ brž ko je } \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{1/b_n} = e\,, \text{ brž ko je } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

15. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n+5}\right)^{n}.$

16. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{3n+5}$

17. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{2n+1}\right)^{3n+5}$

5. Funkcije

Definicijsko območje, zaloga vrednosti, osnove risanja grafov. Pregled in lastnosti elementarnih funkcij. Zveznost funkcije, funkcijske limite. (4 ure)

1. a) Narišite graf funkcije $f(x) = x^2$ ter določite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti. Ima dana funkcija inverzno funkcijo?

   b) Dani sta še funkciji:

   $$g(x) := x^2, \quad Dg := [0, \infty) \qquad \text{in} \qquad h(x) := x^2, \quad Dh := [-3, -1)\,.$$

   Določite inverzni funkciji in narišite njuna grafa.

2. a) Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) := \sqrt{4 - \sqrt{x}}$ in narišite njen graf.

   b) Poiščite še inverzno funkcijo in prav tako narišite njen graf.

3. a) Narišite grafe funkcij $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ in $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

   b) Poiščite funkcijo, ki je inverzna funkciji f.

   c) Poiščite funkcijo, ki je inverzna funkciji h, zoženi na $(0, \infty)$, in narišite njen graf.

4. Narišite grafe funkcij $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 1$, $h(x) = \dfrac{1}{2^x}$ in $k(x) = -2^x$.

5. Narišite grafa funkcij $f(x) = \ln x$ in $g(x) = \ln(x + 2)$ ter poiščite njuni definicijski območji in zalogi vrednosti.

6. Narišite grafa funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$ ter poiščite njuni definicijski območji in zalogi vrednosti.

7. Narišite grafa funkcij $f(x) = \cos x$ in $g(x) = 4 - 2\cos\dfrac{x}{3}$ ter poiščite njuni definicijski območji in zalogi vrednosti.

8. Narišite grafa funkcij $f(x) = \operatorname{tg} x$ in $g(x) = \operatorname{ctg} x$ ter poiščite njuni definicijski območji in zalogi vrednosti.

9. Narišite grafe funkcij $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \arccos x$, $h(x) = \operatorname{arctg} x$ in $k(x) = \operatorname{arcctg} x$ ter poiščite njihova definicijska območja in zaloge vrednosti.

$$y = \sin x \iff x = \arcsin y + 2k\pi \text{ ali } x = \pi - \arcsin y + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$
$$y = \cos x \iff x = \pm\arccos y + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

V nalogah od 10. do 12. rešite enačbe.

10. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

11. $3\sin^2 x = 8\cos x$.

12. $\sin x = 2\cos x$.

13. Dana je funkcija $f(x) = \ln\big(e - e^{-x}\big)$.

    a) Poiščite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti ter narišite njen graf.

    b) Določite njeno inverzno funkcijo in narišite njen graf.

14. Določite definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln(4 - x^2) + \arcsin(x - 2)$.

Vse elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.
Funkcija f, definirana v okolici točke a, je zvezna v a, če velja $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Drugače povedano, f je zvezna v a, če velja $\lim_{x\uparrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\downarrow a} f(x)$

15. Dana je funkcija:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x < 3 \\ a & ;\ x = 3 \\ x + b & ;\ x > 3 \end{cases}$$
Določite parametra a in b, pri katerih bo funkcija f zvezna na celi realni osi.

V nalogah od 16. do 19. izračunajte limite funkcij.

16. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

17. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 4}$.

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8} - 4}{\sqrt{x+3} - 2}$.

19. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$.

6. Odvod

Pravila za odvajanje. Tangenta in normala, približno računanje s pomočjo odvoda. Levi in desni odvod, zvezna odvedljivost. Ekstremi. Risanje grafov s pomočjo odvoda. L'Hôpitalovo pravilo. (11 ur)

Dogovor o notaciji:

- Črki a in m označujeta konstante.
- Črka x označuje spremenljivko, po kateri odvajamo.
- Črki u in v označujeta odvisne spremenljivke (t. j. količine, ki jih dobimo kot funkcije spremenljivke x).
- Črke f, g in h označujejo funkcije.

$$\boxed{\begin{aligned} a' &= 0 \\ x' &= 1 \\ \left(x^m\right)' &= m x^{m-1} \\ (u+v)' &= u' + v' \\ (au)' &= au' \end{aligned}}$$

V nalogah od 1. do 14. poiščite odvode funkcij.

1. $f(x) = 3x^4 + 2x + 1 + \dfrac{1}{x^{42}}$.

$$\boxed{\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}}$$

2. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+5}$.

$$\boxed{\big(g(h(x))\big)' = g'(h(x))\, h'(x)}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\big(e^x\big)' = e^x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

4. $f(x) = e^{\cos x}$.
5. $f(x) = 2^x$
6. $f(x) = x\, e^{-x^2/2}$.
7. $f(x) = \operatorname{tg} x$.
8. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

$$\big(g^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)}$$

9. $f(x) = \ln x$.
10. $f(x) = \arcsin x$.
11. $f(x) = \arccos x$.
12. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
13. $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.
14. $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.

Enačba tangente na graf funkcije $f(x)$ pri $x = x_0$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

V bližini točke x_0 tangenta dobro aproksimira graf funkcije: za $x \approx x_0$ je tudi:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Enačba normale pri $f'(x_0) \neq 0$:

$$y = f(x_0) - \frac{x - x_0}{f'(x_0)}$$

Enačba normale pri $f'(x_0) = 0$: $x = x_0$.

15. Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$.

    a) Zapišite enačbi tangente in normale na graf te funkcije pri $x_0 = 25$.

    b) S pomočjo odvoda približno izračunajte $\sqrt{27}$ in rezultat primerjajte s točno vrednostjo.

Funkcija f, definirana v okolici točke a, je zvezno odvedljiva v točki a, brž ko je zvezna v a in obstaja $\lim_{x \to a} f'(x)$ (t. j. če je $\lim_{x \uparrow a} f'(x) = \lim_{x \downarrow a} f'(x)$). V tem primeru je tudi $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$.

16. Dana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x < 4 \\ \sqrt{x} & ; x \geq 4 \end{cases}$$

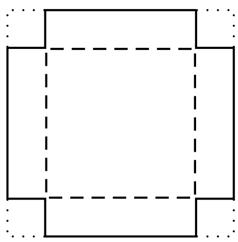
Določite parametra a in b, pri katerih bo funkcija f zvezno odvedljiva na celi realni osi.

Funkcija zavzame ekstremne vrednosti kvečjemu v:
- *robnih točkah definicijskega območja;*
- *točkah neodvedljivosti;*
- *stacionarnih točkah, t. j. tam, kjer je $f'(x) = 0$.*

Kjer je $f'(x) = 0$ in $f''(x) > 0$, zavzame funkcija lokalni minimum.
Kjer je $f'(x) = 0$ in $f''(x) < 0$, zavzame funkcija lokalni maksimum.

17. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ na intervalu $\left[\frac{2}{3}, 3\right]$.

18. Iz vogalov kvadrata s stranico a izrežemo štiri enake kvadratke. Nato iz preostanka sestavimo škatlo brez pokrova. Kako naj izrežemo, da bo imela škatla največjo prostornino?



V nalogah od 19. do 22. obravnavajte funkcije: poiščite definicijsko območje, zalogo vrednosti in ničle, raziščite obnašanje funkcije na robu definicijskega območja (poli, obnašanje v neskončnosti, asimptote) ter poiščite intervale naraščanja in padanja, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti in prevoje. Natančno narišite tudi njihove grafe.

19. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

20. $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

21. $f(x) = x^3 \, e^{-x}$.

22. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2 \operatorname{arctg} x$.

L'Hôpitalovo pravilo. *Računamo* $L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. *Če je:*

- *bodisi* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *in* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$,

velja $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *pod pogojem, da slednja limita obstaja.*

V nalogah od 23. do 29. izračunajte limite.

23. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{e^x - e}$.

24. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

25. $\displaystyle \lim_{x\to 0} x \ln x$.

26. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$.

27. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

28. $\displaystyle \lim_{x\to \pi} \frac{x - \pi}{1 + \sin x}$.

29. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}$.

7. Integral

Računanje nedoločenih in določenih integralov. Povprečna vrednost funkcije. Osnovna uporaba integralov: ploščine, ločne dolžine ter površine in prostornine vrtenin.

$$F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int \mathrm{d}x = x + C, \quad \int x^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Črki a in C označujeta konstanto.

V nalogah od 1. do 16. izračunajte nedoločene integrale.

1. $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x.$

Razčlenitev na parcialne ulomke

$$\frac{px+q}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 6}.$

Če je a konstanta in $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, je tudi $\int F(x+a)\,\mathrm{d}x = F(x+a) + C$.

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C}$$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$.

7. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+4}$.

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C}$$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$.

$$\boxed{\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C, \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C}$$

10. $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

12. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$

Integracija po delih (per partes):

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}$$

13. $\displaystyle\int x \ln x\,\mathrm{d}x$.

14. $\displaystyle\int x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

16. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Določeni integral:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

V nalogah od 17. do 21. izračunajte določene integrale.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(\cos x)\,\sin x\,\mathrm{d}x$.

Uvedba nove spremenljivke v določeni integral. *Če točka (x, y) opiše dovolj lepo nepretrgano krivuljo, ki se začne pri $x = a, y = \alpha$ in konča pri $x = b, y = \beta$ ter če vzdolž cele krivulje velja $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$, velja tudi:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

19. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3\pi/2}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

20. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Če je f liha, je $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Če je f soda, je $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

21. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)\,\mathrm{d}x$.

Integracija po delih pri določenem integralu:

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

22. $\displaystyle\int_0^1 (1+3x^2)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$

Povprečna vrednost funkcije na intervalu $[a,b]$:

$$\bar{f}_{a,b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

23. Izračunajte povprečno vrednost funkcije $f(x) = \cos^2 x \sin x$ na intervalih $[0,\pi]$ in $[0,2\pi]$.

Ploščina lika med krivuljama. *Če na intervalu* $[a,b]$ *velja* $f(x) \le g(x)$, *je ploščina lika, ki ga oklepajo krivulje* $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ *in* $y=g(x)$, *enaka:*

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x$$

V nalogah od 24. do 26. izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo dane krivulje.

24. $x=2$, $y=0$ in $y = x\sqrt{x-1}$.
25. $y = 3-x$ in $y=\sqrt{9-3x}$.
26. $y=x$, $y=2-x$ in $y = x - \dfrac{x^2}{2}$.

Ločna dolžina *krivulje* $y=f(x)$ *na intervalu* $[a,b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$

27. Izračunajte ločno dolžino krivulje $y = \dfrac{x^2}{8} - \ln x$ na intervalu $[1,2]$.

Prostornina vrtenine. *Če krivuljo $y = f(x)$, kjer je $f(x) \geq 0$, na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli osi x, se prostornina dane vrtenine izraža po formuli:*

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x$$

Če krivuljo zavrtimo okoli osi y, pa se prostornina izraža po formuli:

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, f'(x) \, \mathrm{d}x$$

28. Izračunajte prostornini vrtenin, ki ju dobimo, če krivuljo $y = x^3/3$ na intervalu $[0, 3]$ zavrtimo okoli osi x in y.

Površina vrtenine. *Če krivuljo $y = f(x)$, kjer je $f(x) \geq 0$, na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli osi x, je površina dobljene vrtenine vsota površin plašča (S_{pl}) in obeh pokrovov (S_{o}), kjer je:*

$$S_{\mathrm{pl}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} \, \mathrm{d}x \,, \quad S_{\mathrm{pk}} = \pi\big(f(a)\big)^2 + \pi\big(f(b)\big)^2 \,.$$

Če krivuljo zavrtimo okoli osi y, pa je:

$$S_{\mathrm{pl}} = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} \, \mathrm{d}x \,, \quad S_{\mathrm{o}} = \pi a^2 + \pi b^2 \,.$$

29. Izračunajte površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = x^3/3$ na intervalu $[0, 3]$ zavrtimo okoli osi x.

30. Izračunajte površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = x^2$ na intervalu $[0, 2]$ zavrtimo okoli osi y.

8. Vsote in vrste

Nekaj izračunljivih vsot in vrst, med drugim vsota geometrijskega zaporedja in geometrijska vrsta. Kvocientni, korenski in Leibnizev kriterij. Taylorjeva vrsta.

V nalogah od 1. do 5 izračunajte vsote oziroma vrednosti vrst ali pa pokažite, da so divergentne.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

$$q \neq 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{m} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

Zaporedje $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_m$ je geometrijsko, če obstaja tak q, da je $a_{n+1}/a_n = q$ za vse $n = l, l+1, \ldots, m-1$. V tem primeru velja:

$$\sum_{n=l}^{m} a_n = \frac{a_l - q_m q}{1-q} .$$

6. Najeti želimo 120.000 evrov kredita za dobo 20 let. Koliko znaša mesečni obrok, če:

   a) ni obresti?

   b) je letna obrestna mera 3%?

   c) je letna obrestna mera 10%?

   Pri tem prvi obrok zapade en mesec po črpanju kredita, mesečne obresti pa obračunavamo po eksponentni metodi.

Naj bo $-1 < q < 1$. *Tedaj je:*

$$1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}\,.$$

Če je $a_l, a_{l+1}, a_{l+1}, \ldots$ *geometrijsko zaporedje z* $a_{n+1}/a_n = q$*, velja:*

$$\sum_{n=l}^{\infty} a_n = \frac{a_l}{1-q}\,.$$

V nalogah od 7. do 9. izračunajte vrednosti vrst, če le-te konvergirajo.

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n-1}}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$.

Kvocientni kriterij. *Dana naj bo vrsta* $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$. *Recimo, da obstaja* $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

- *Če je* $q < 1$*, vrsta konvergira.*
- *Če je* $q > 1$*, vrsta divergira.*
- *Če je* $q = 1$*, se lahko zgodi kar koli.*

V nalogah od 10. do 13. izračunajte vrednosti vrst na predpisano število decimalk ali pa dokažite, da divergirajo.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{10^n}$ na 5 decimalk.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5 \cdot 2^n}$ na 3 decimalke.

Korenski kriterij. *Dana naj bo vrsta* $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$. *Recimo, da obstaja* $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- *Če je* $q < 1$, *vrsta konvergira.*
- *Če je* $q > 1$, *vrsta divergira.*
- *Če je* $q = 1$, *se lahko zgodi kar koli.*

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ na 3 decimalke.

Leibnizev kriterij za alternirajoče vrste.
Če je $a_1 \geq a_1 \geq a_3 \geq \ldots$ *in* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *vrsti:*

$$\begin{aligned} &a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \qquad \text{in} \\ &-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots \end{aligned}$$

konvergirata. Delne vsote predstavljajo izmenoma zgornje in spodnje meje za vrednost vrste.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{10}}$ na 7 decimalk.

Taylorjeva vrsta. *Če je funkcija* f *dovoljkrat zvezno odvedljiva in je* x *dovolj blizu* x_0, *velja približna enakost:*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Približku na desni pravimo Taylorjev polinom reda n *okoli* x_0. *Absolutna vrednost napake je omejena z* $\sup_{\substack{x_0 \leq \xi \leq x \\ x \leq \xi \leq x_0}} \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} |x_0 - x|^{n+1}$.
Če gre napaka proti nič, lahko pišemo kar:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Izraz na desni je konvergentna vrsta, kar pomeni, da lahko $f(x)$ *izračunamo poljubno natančno, če seštejemo dovolj členov. Imenujemo jo Taylorjeva vrsta.*

14. Zapišite Taylorjev polinom reda 2 za funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$ okoli točke $x_0 = 25$. Z njegovo pomočjo približno izračunajte $\sqrt{26}$. Rezultat primerjajte s točnim.

Nekaj znanih razvojev v Taylorjevo vrsto

$$(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} x + \binom{m}{2} a^{m-2} x^2 + \ldots \qquad \text{za } a > 0,\ |x| < a$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \text{za vsak } x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \text{za vsak } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \text{za vsak } x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \text{za } -1 < x \le 1$$

V nalogah od 15. do 19. razvijte funkcijo f v Taylorjevo vrsto.

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$ okoli 0 do vključno člena z x^2.

16. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ okoli 0 do vključno člena z x^4.

17. $f(x) = (x^3 + 3x)e^{-3x^2}$ okoli 0 do vključno člena z x^6.

18. $f(x) = x \ln x$ okoli 2 do vključno člena z $(x-2)^3$.

19. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ okoli 0 do vključno člena z x^4.

V nalogah od 20. do 22. izračunajte limite. Pomagajte si s Taylorjevo vrsto.

20. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

21. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)\ln(x+1) - 2x}{x^3}$

22. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(2+x^2)\cos x - 2}{(1-x^2)\,e^{x^2} - 1}$.

9. Krivulje v ravnini

Risanje krivulj v parametrični in polarni obliki. Tangenta in normala. Ploščina zanke in ločna dolžina.

Risanje krivulj, podanih v parametrični obliki $x = x(t)$, $y = y(t)$: *tabeliramo in narišemo značilne točke ter jih povežemo. Točke oz. območja, ki se jih splača raziskati, pa so:*
- *rob definicijskega območja;*
- *točke, kjer je $x = 0$ ali $y = 0$;*
- *točke, kjer je $\dot{x} = 0$ ali $\dot{y} = 0$:*
  $\dot{x} = 0, \dot{y} \neq 0 \implies$ *krivulja je lokalno navpična;*
  $\dot{y} = 0, \dot{x} \neq 0 \implies$ *krivulja je lokalno vodoravna.*

Krivulja je **sklenjena**, *če se konča tam, kjer se začne, t. j. če t teče od a do b, mora veljati $x(a) = x(b)$ in $y(a) = y(b)$.*
Krivulja je **enostavno sklenjena**, *če je sklenjena in ne seka same sebe (t. j. noben njen pravi del ni sklenjen).*

1. Narišite krivuljo:
$$x = t^2 + t\,, \quad y = t^3 + t\,; \qquad -2 \leq t \leq 2$$
in določite, ali je sklenjena.

2. Narišite krivuljo:
$$x = \sin t\,, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,; \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$
in določite, ali je sklenjena.

3. Določite parametra a in b ($a < b$), tako da bo krivulja:
$$x = t^2\,, \quad y = t - \frac{t^3}{3}\,; \qquad a \leq t \leq b$$
sklenjena. Krivuljo tudi narišite.

Tangenta in normala *na krivuljo $x = x(t)$, $y = y(t)$ pri $t = t_0$.*
Tangenta: $y = y(t_0) + \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\big(x - x(t_0)\big)$
oziroma $x = x(t_0)$, če je $\dot{x}(t_0) = 0$ in $\dot{y}(t_0) \neq 0$.
Normala: $y = y(t_0) - \dfrac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}\big(x - x(t_0)\big)$
oziroma $x = x(t_0)$, če je $\dot{y}(t_0) = 0$ in $\dot{x}(t_0) \neq 0$.

4. Zapišite enačbi tangente in normale na krivuljo $x = 2\big(\ln t - 1\big)$, $y = t^3$ pri $t = 1$.

Krivulje v polarnih koordinatah *podamo s formulo $r = r(\varphi)$. Dogovorimo se, da je $r \geq 0$, za kot φ pa se moramo dogovoriti, kako ga merimo (če je $r(\varphi)$ periodična s periodo 2π, je vseeno). Prevedba na kartezijske koordinate:*

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi$$

Točke oz. območja, ki se jih splača raziskati, so:
- *rob definicijskega območja;*
- *koti 0, $\pi/2$, π in $3\pi/2$ (ali njim ekvivalentni);*
- *točke, kjer je $r = 0$;*
- *točke, kjer je $\dot r = 0$.*

5. Narišite krivuljo, ki ima v polarnih koordinatah enačbo:

$$r = 1 + \sin\varphi$$

6. Narišite krivuljo, ki ima v polarnih koordinatah enačbo:

$$r = e^{3|\varphi|/4}$$

in sicer za $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ in za $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Ploščina zanke, *ki jo omejuje enostavno sklenjena krivulja, podana s formulo $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$:*

$$\pm S = \int_{t=a}^{t=b} y\,\mathrm{d}x = \int_a^b x(t)\,\dot y(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\mp S = \int_{t=a}^{t=b} x\,\mathrm{d}y = \int_a^b y(t)\,\dot x(t)\,\mathrm{d}t$$

Predznak zgornjega integrala je pozitiven, če se krivulja vrti v smeri urinega kazalca.

7. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejuje krivulja:

$$x = t^2\,, \quad y = t - \frac{t^3}{3}\,; \qquad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}\,.$$

Ločna dolžina krivulje, *podane s formulo $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$:*

$$l = \int_a^b \sqrt{\big(\dot x(t)\big)^2 + \big(\dot y(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t$$

8. Izračunajte ločno dolžino krivulje:

$$x = t^2\,, \quad y = t - \frac{t^3}{3}\,; \qquad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}\,.$$

Ploščina lika, ki ga določa krivulja v polarnih koordinatah $r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, *skupaj z zveznicama od izhodišča do krajišč krivulje:*

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \bigl(r(\varphi)\bigr)^2 \, \mathrm{d}\varphi$$

Ločna dolžina krivulje v polarnih koordinatah:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\bigl(r(\varphi)\bigr)^2 + \bigl(\dot{r}(\varphi)\bigr)^2} \, \mathrm{d}\varphi$$

9. Narišite krivuljo, ki je v polarnih koordinatah podana s formulo:

$$r = e^{3|\varphi|/4} \,; \qquad -\pi \le \varphi \le \pi$$

ter izračunajte obseg in ploščino lika, ki ga omejuje.

10. Funkcije več spremenljivk

Definicijska območja. Parcialno odvajanje. Tangentna ravnina in normala na graf funkcije. Lokalni in globalni ekstremi. Prostornine teles.

1. Določite in skicirajte definicijsko območje funkcije $f(x, y) = x - y + \ln(x^2 - 2y^2)$.
2. Poiščite prve in druge parcialne odvode funkcije $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

Tangentna ravnina:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Normala:

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, t\,, \quad y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, t\,, \quad z = f(x_0, y_0) - t$$

3. Poiščite tangentno ravnino in normalo na graf funkcije $f(x, y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$ v točki $T(8, 25, z_0)$. S pomočjo tangentne ravnine aproksimirajte $\dfrac{\sqrt[3]{8{\cdot}06}}{\sqrt{24{\cdot}5}}$.

Lokalni ekstremi. *Funkcija lahko lokalni ektrem doseže tam, kjer ni odvedljiva, ali pa v stacionarni točki, t. j. tam, kjer je:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Merilo za to, ali je v dani stacionarni točki (x_0, y_0) ekstrem, je Hessejeva determinanta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Če je $\Delta > 0$ in $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, gre za minimum.
Če je $\Delta > 0$ in $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, gre za maksimum.
Če je $\Delta < 0$, ekstrema ni.
Če je $\Delta = 0$, se lahko zgodi kar koli.

4. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 + 1$.

Globalni ekstremi. *Na zaprtem in omejenem območju vsaka zvezna funkcija f vedno doseže globalni minimum in maksimum. Če to območje omejuje končno mnogo krivulj oblike $x = x(t)$, $y = y(t)$, se lahko to zgodi kvečjemu:*
- *v ogliščih;*
- *na delih roba, kjer funkcija $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ ni odvedljiva ali pa ima stacionarno točko;*
- *v notranjosti, kjer funkcija f ni odvedljiva ali pa ima stacionarno točko.*

5. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = xy\,e^{-x-y}$ na območju:

$$D = \big\{(x, y)\ ;\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3\big\}$$

6. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ na območju:

$$D = \big\{(x, y)\ ;\ x^2 \le y \le x\big\}$$

7. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 4)e^{-x/2}$ na območju:

$$D = \big\{(x, y)\ ;\ (x + 1)^2 + y^2 \le 16, x \ge -1\big\}\,.$$

Volumni v kartezijskih koordinatah. *Če je območje v prostoru določeno z neenačbami:*

$$a \le x \le b\,, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\,, \quad h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\,,$$

kjer za poljubna x in y velja:

$$a \le b\,, \quad g_1(x) \le g_2(x)\,, \quad h_1(x, y) \le h_2(x, y)$$

je volumen danega telesa enak:

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big[h_2(x, y) - h_1(x, y)\Big]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

8. Izračunajte volumen telesa, ki ga določajo neenačbe:

$$1 \le x \le 2\,, \quad x^2 \le y \le x^3\,, \quad y \le z \le xy\,.$$

9. Izračunajte volumen telesa, ki ga določajo neenačbe:

$$x \ge 0\,, \quad y^2 \le z \le 1 - x\,.$$

Volumni v cilindričnih koordinatah. *Če so cilindrične koordinate danega območja v prostoru določene z neenačbami:*

$$\alpha \le \varphi \le \beta\,, \quad g_1(\varphi) \le r \le g_2(\varphi)\,, \quad h_1(r,\varphi) \le z \le h_2(r,\varphi)\,,$$

kjer za poljubna r in φ velja:

$$\alpha \le \beta\,, \quad \beta - \alpha \le 2\pi\,, \quad g_1(\varphi) \le g_2(\varphi)\,, \quad h_1(r,\varphi) \le h_2(r,\varphi)\,,$$

je volumen danega telesa enak:

$$V = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \Big[h_2(r,\varphi) - h_1(r,\varphi)\Big]\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

10. Izračunajte volumen telesa, katerega cilindrične koordinate so določene z neenačbami:

$$1 \le r \le 2\,, \quad 0 \le z \le r^2(1 + \cos\varphi)\,.$$

11. Diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama. Linearna diferencialna enačba prvega reda. Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

V nalogah od 1. do 15. poiščite partikularne rešitve diferencialnih enačb, ki ustrezajo danim začetnim pogojem, če so podani, sicer pa poiščite splošno rešitev. Pri partikularnih rešitvah poiščite tudi definicijsko območje.

1. $x^3y' = y^2, \quad y(1) = -1.$
2. $y - y' + x^2y = 0, \quad y(0) = -2.$
3. $xy' = 1 + y^2, \quad y(-1) = 1.$
4. $\cos x\, y' + \sin x\, y = \sin x, \quad y(0) = 1.$
5. $2xy' - y = 2x\sqrt{x}\, e^x.$
6. $xy'' + y' = 0.$
7. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
8. $y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 42,\ y'(0) = 4.$
9. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 42.$
10. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$
11. $y'' - y' - 2y = x^2.$
12. $y'' - 4y' + 3y = \sin x.$
13. $y'' - 2y' + y = e^{2x} + e^{-2x}.$
14. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
15. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$

12. Osnove kombinatorike

Pravilo vsote, pravilo produkta. Variacije, kombinacije in permutacije. (2 uri)

1. Manca ima 12 kap in 3 klobuke. Na koliko načinov se lahko pokrije?
2. Nace ima 4 puloverje, 2 srajci in 3 hlač. Na koliko načinov se lahko obleče?
3. Olga je kupila novo stanovanje. Na koliko načinov lahko opremi dnevno sobo, če ima na voljo 4 vrste parketa, 3 vrste nelesnih talnih oblog in 5 garnitur pohištva?
4. Peter je sprevodnik na progi Ljubljana – Litija, ki ima 7 postaj.
   a) Koliko je možnih enosmernih vozovnic?
   b) Največ koliko cen je lahko na ceniku, če privzamemo, da vožnja na nasprotni relaciji stane enako?
5. Koliko možnih besed (smiselnih ali nesmiselnih) lahko REZKA sestavi s premetavanjem črk svojega imena? Kaj pa TATJANA?
6. Urban je razrednik. 15 učencev v njegovem razredu obiskuje modelarski krožek, 21 likovni krožek, 3 pa oba krožka. Najmanj koliko učencev je v razredu?
7. 10 športnikov se pomeri na tekmovanju. Na koliko načinov lahko dobijo medalje? Delitve mest so izključene.
8. Na koliko načinov lahko 10 učencev med seboj izbere tričlansko delegacijo?

13. Verjetnostni račun

Elementarna verjetnost. Pogojna verjetnost. Bernoullijeva zaporedja. (4 ure)

1. Vržemo standardno kocko in definirajmo naslednje dogodke:

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{pade vsaj pet pik}\} \\ B &:= \{\text{padejo vsaj tri pike, a največ pet pik}\} \\ C &:= \{\text{pade ena ali tri pike}\} \\ D &:= \{\text{padejo natanko tri pike}\} \end{aligned}$$

   Določite:

   a) verjetnosti teh dogodkov;
   b) kateri izmed teh dogodkov so načini drug drugega;
   c) kateri izmed njih so nezdružljivi;
   d) kateri izmed njih so neodvisni.

2. Dan je kup 32 marjaš kart. Izračunajte verjetnosti dogodkov:

   a) da pade pik;
   b) da pade as;
   c) da pade pik ali as.

3. Pri igri Vzemi ali pusti sta igralcu ostali še dve rdeči in dve modri škatli. Igralec odkrije dve škatli. Kolikšna je verjetnost:

   a) da bo odkril obe rdeči škatli?
   b) da bo odkril škatlo z najvišjim zneskom?
   c) da bo odkril eno rdečo in eno modro škatlo?

4. Pri igri Loto na kombinacijskem listku prekrižamo 7 številk izmed 39. Izžreba se 7 rednih številk in še ena dodatna. Možni so naslednji dobitki:

   - sedmica: vse prekrižane številke so redno izžrebane;
   - šest in dodatna: med prekrižanimi številkami je šest redno izžrebanih in ena dodatna;
   - šestica: natanko šest prekrižanih številk je redno izžrebanih, dodatna ni prekrižana;
   - petica: natanko pet prekrižanih številk je redno izžrebanih (dodatna pa je lahko prekrižana ali ne);
   - štirica: natanko štiri prekrižane številke so redno izžrebane (dodatna pa je lahko prekrižana ali ne);

- tri in dodatna: natanko tri prekrižane številke so redno izžrebane, prekrižana pa je tudi dodatna številka.

Izračunajte verjetnosti posameznih dobitkov.

5. **MANJKA!**

Definicija pogojne verjetnosti:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dostikrat potrebujemo različico:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$$

6. Kolikšna je verjetnost, da imata v skupini n ljudi dva rojstni dan na isti dan? Prestopna leta zanemarite.

7. Iz posode, v kateri so 4 bele in 6 črnih kroglic, na slepo in brez vračanja potegnemo dve kroglici. Izračunajte naslednje brezpogojne in pogojne verjetnosti:

   a) P(prva bela);
   b) P(druga bela | prva bela);
   c) P(obe beli);
   d) P(druga bela);
   e) P(prva bela | druga bela);
   f) P(prva bela | vsaj ena bela).

Izrek o popolni verjetnosti. *Če $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov (t. j. vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja:*

$$P(A) = P(H_1)\, P(A \mid H_1) + P(H_2)\, P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)\, P(A \mid H_n)$$

8. Miha se odpravi na obisk k vinogradnikoma Janezu in Lojzu. Vsak mu ponudi kozarec vina, pri čemer mu Janez ponudi šmarnico z verjetnostjo 0˙6, Lojz pa z verjetnostjo 0˙3, neodvisno od Janeza. Verjetnost, da Miho boli glava, ne da bi pil šmarnico, je 0˙2, verjetnost, da ga boli po enem kozarcu šmarnice, je 0˙6, verjetnost, da ga boli po dveh kozarcih šmarnice, pa je 1. Kolikšna je verjetnost, da Miho boli glava?

Bayesova formula. *Če $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov, velja:*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{P(H_1)\,P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)\,P(A \mid H_n)}$$

9. V skupini 1000 ljudi je en lažnivec. Detektor laži odkrije lažnivca z verjetnostjo 0˙95, za človeka, ki govori resnico, pa prav tako z verjetnostjo 0˙95 izključi možnost, da je lažnivec. Naključnega človeka v skupini testiramo in detektor laži pokaže, da je lažnivec. Kolikšna je pogojna verjetnost, da to tudi v resnici drži?

Če izvedemo n neodvisnih poskusov, od katerih vsak uspe z verjetnostjo p, je verjetnost, da uspe natanko k poskusov, enaka:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Zgornji obrazec imenujemo **Bernoullijeva formula**.

10. Pošteno kocko vržemo petkrat, meti so med seboj neodvisni. Kolikšna je verjetnost, da šestica pade:
    a) natanko enkrat?
    b) natanko trikrat?
    c) vsaj enkrat?

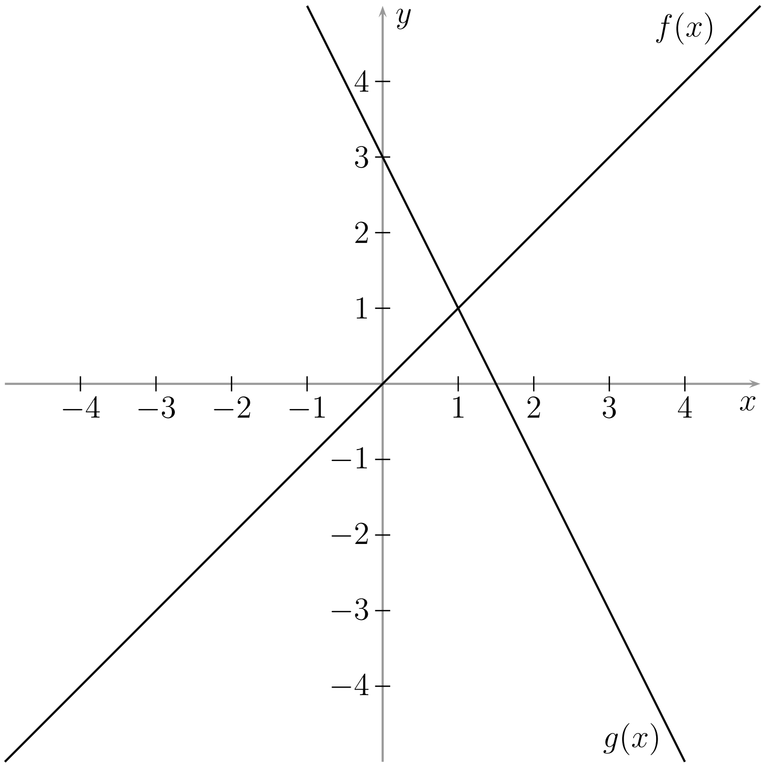
11. Pošteno kocko mečemo, dokler šestica ne pade trikrat. Kolikšna je verjetnost, da nam bo to uspelo natanko v petem metu?

12. Študent gre na izpit, kjer dobi 6 vprašanj. Odgovor na vsako od njih pozna z verjetnostjo 0˙4, neodvisno od ostalih vprašanj. Študent zagotovo naredi, če zna odgovoriti na vsaj 4 vprašanja, in zagotovo pade, če zna odgovoriti na manj kot 3 vprašanja. Če pa zna odgovoriti na natanko 3 vprašanja, dobi še 3 dodatna vprašanja in naredi, če zna odgovoriti na vsaj dve. Na vsako od dodatnih vprašanj zna odgovoriti z verjetnostjo 0˙3, spet neodvisno od ostalih vprašanj. Kolikšna je verjetnost, da bo študent naredil izpit?

REŠITVE

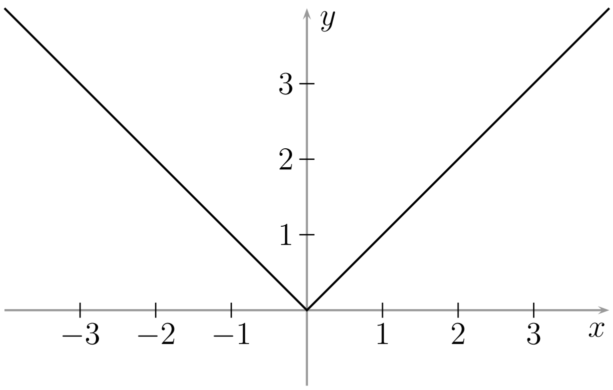
1. Števila

1.



2. $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$.

3.

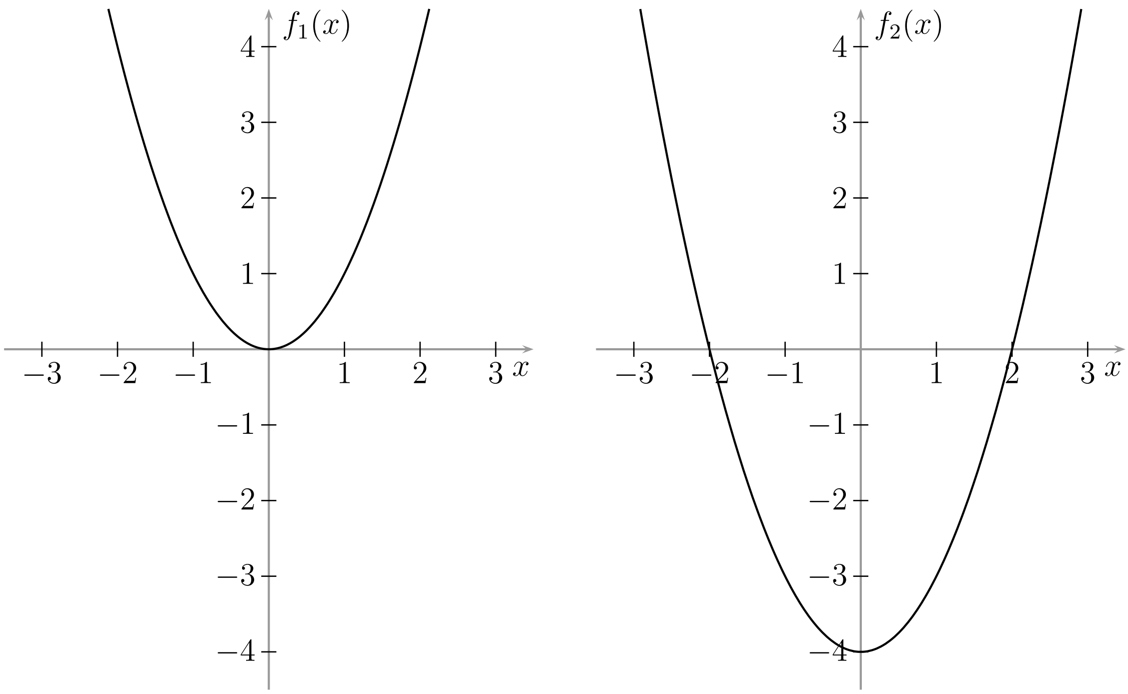


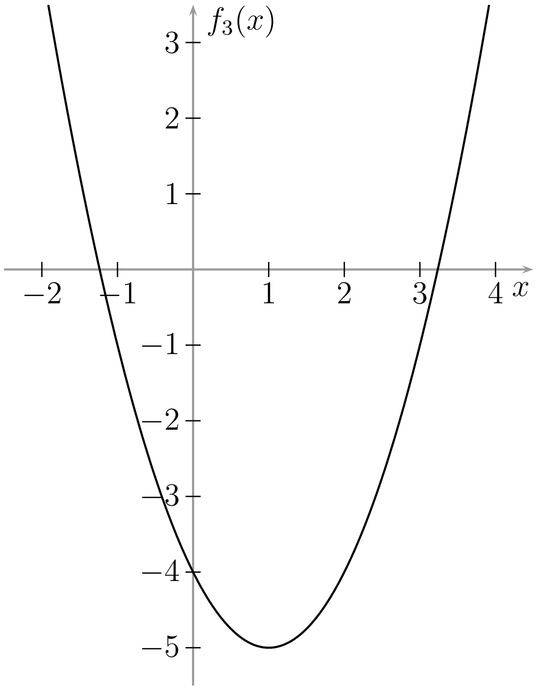
4. $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

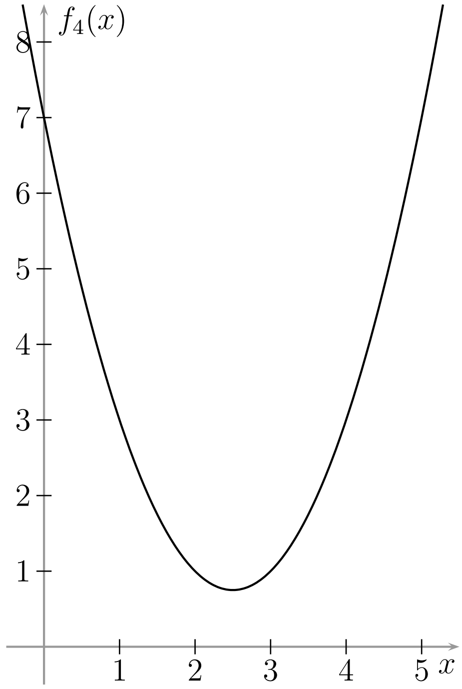
5. Ničle so zbrane v naslednji tabeli:

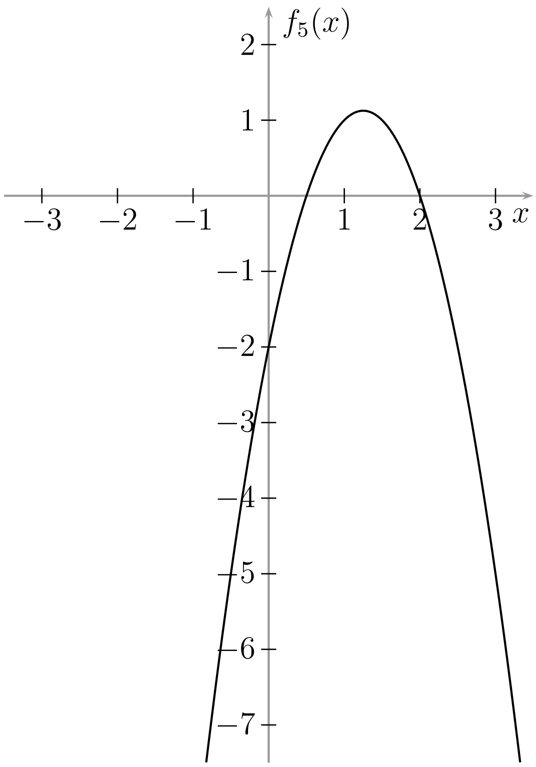
Funkcija	Ničle
f_1	$x_{1,2} = 0$
f_2	$x_1 = -2,\ x_2 = 2$
f_3	$-2 < x_2 = 1 - \sqrt{5} < -1,\ 3 < x_2 = 1 + \sqrt{5} < 4$
f_4	Ni realnih ničel.
f_5	$0 < x_1 = \frac{1}{2} < 1,\ x_2 = 2$
f_6	$1 < x_{1,2} = \frac{3}{2} < 2$

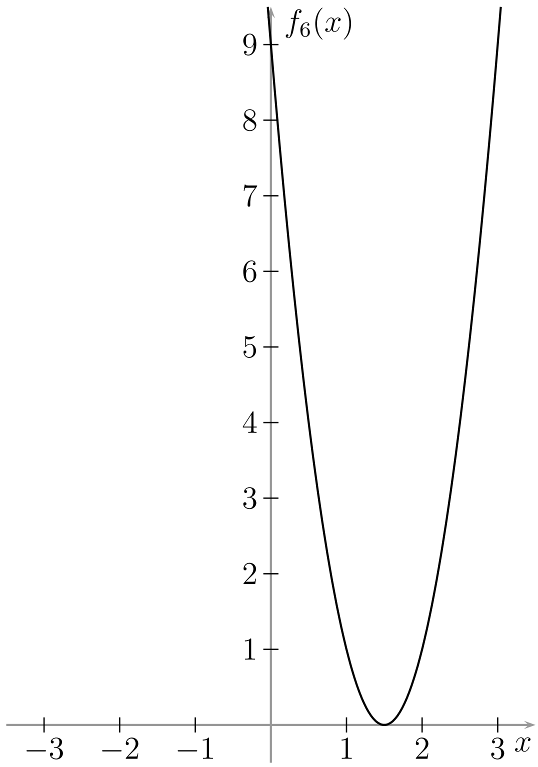
Grafi:











6. $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$.

7. $x \in [1, 2) \cup (2, 4]$.

8. $x \in (-2, 2)$.

9. $x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$.

10. Ker sta obe strani enačbe pozitivni, smemo kvadrirati. Ko preuredimo, dobimo:

$$2\sqrt{2x^2 - x} = 5 - 3x\,.$$

Pri ponovnem kvadriranju pa moramo paziti na predznake. Enačba je ekvivalentna:

$$4(2x^2 - x) = (5 - 3x)^2\,, \quad 5 - 3x \geq 0\,.$$

Po preureditvi dobimo $(x-1)(x-25) = 0$, $x \leq 5/3$, kar ima za edino rešitev $x = 1$.

Opomba. Druga rešitev kvadratne enačbe, $x = 25$, zadošča zvezi:

$$-2\sqrt{2x^2 - x} = 5 - 3x\,.$$

Opomba. Že iz začetne oblike enačbe in dejstva, da je kvadratni koren strogo naraščajoča funkcija, je jasno, da ima enačba največ eno rešitev. Če bi jo uganili, bi bil skupaj s prejšnjim sklepom to konec naloge.

11. $x = \pm 2$.

12. Ni rešitve.

13. $x = 4$.

14. $x = -4$.

15. $x = \pm 2$.

16. $y = \log_{10} 1024 \doteq 3{\dot{}}0103$.

17. $y = \log_2 20 = \dfrac{\log_{10} 20}{\log_{10} 2} = \dfrac{\ln 20}{\ln 2} \doteq 4{\dot{}}3219$.

18. $x = \log_2 \dfrac{200}{9} \doteq 4{\dot{}}4739$.

19. $x = 20$.

20. $x_1 = 10$, $x_2 = 90$.

2. Matrike in sistemi

1. $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $A + A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 16 & 3 & -12 \end{bmatrix}$,

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 1 & 3 \\ 7 & -12 \end{bmatrix} = (AB)^{\mathrm{T}}$, $BB^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}}B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$,

$(A + 5I)B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} = AB + 5B$. Preostale matrike ne obstajajo.

2. $X = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -59 & 41 \\ 13 & -9 \end{bmatrix}$.

3. $x = 10,\ y = 0,\ z = -1$.

4. $x = 10 - 3y,\ z = -1,\ y \in \mathbb{R}$, lahko pa tudi:
$y = \dfrac{10 - x}{3},\ z = -1,\ x \in \mathbb{R}$.

5. Sistem nima rešitve.

6. $x = y = 1$.

7. $y = \dfrac{3x - 1}{2}$.

8. $y = -\dfrac{x^3}{2} + 1$.

3. Ravninska in prostorska geometrija

1. $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BF} = \vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = 2(\vec{u} + \vec{v})$.

2. $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCA = 90°$.

3. $78\dot{}463041° \doteq 78°\,27'\,47''$.

4. $D(0, -1, 3)$.
Ploščina trikotnika: 9.
Ploščina paralelograma: 18.

5. Označimo $\vec{u} := \overrightarrow{AB}$ in $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Tedaj je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$.

6. $\dfrac{2}{3}$

7. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

8. a) Eksplicitna: $y = 5 - 3x$, normalna: $3x + y = 5$, b) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, c) $y = \dfrac{x + 10}{3}$,
d) $T_0\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, e) $T'(-1, 3)$, f) Točka Q že leži na dani premici.

9. a) $x = 2 + 2t, y = 3t, z = 4$, b) $\sqrt{\frac{22}{13}}$, c) $T_0\left(\frac{30}{13}, \frac{6}{13}, 4\right)$,
d) $x = 3 - 9t, y = 6t, z = 5 - 13t$, e) $T'\left(\frac{21}{13}, \frac{12}{13}, 3\right)$.

10. a) $x - 2y + z + 3 = 0$, b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, c) $x = 1 + t, y = 1 - 2t, z = 1 + t$, d) $T_0\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$,
e) $T'(0, 3, 0)$.

4. Zaporedja

1. Zaporedje ni monotono, je pa od vključno drugega člena naprej padajoče.
$\inf_n a_n = \min_n a_n = a_1 = -2$, $\sup_n a_n = \max_n a_n = a_2 = 3$.
Zaporedje ima eno samo stekališče in je konvergentno, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$.
Členi se od limite razlikujejo za manj kot ε za $n \geq 127$.

2. Zaporedje je naraščajoče.
$\inf_n a_n = \min_n a_n = a_1 = 0$, zaporedje je navzgor neomejeno ter nima stekališč in je divergentno.

3. Zaporedje ni monotono.
$\inf_n a_n = \min_n a_n = a_1 = -1$, $\sup_n a_n = \max_n a_n = a_2 = 1$.
Stekališči: 1 in -1. Zaporedje je divergentno.

4. Zaporedje ni monotono.
$\inf_n a_n = 0$, minimum ne obstaja, zaporedje je navzgor neomejeno.
Zaporedje ima edino stekališče 0, ni pa konvergentno.

5. Zaporedje je naraščajoče.
$\inf_n a_n = \min_n a_n = a_1 = 3/2$, $\sup_n a_n = 2$, maksimum ne obstaja.
Zaporedje ima eno samo stekališče in je konvergentno, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.
Členi se od limite razlikujejo za manj kot ε za $n \geq 7$.

6. $3/4$.

7. 2.

8. 0.

9. ∞ (ne obstaja).

10. $3/5$.

11. $1/2$.

12. 2.

13. 0.

14. $1/e^2$.

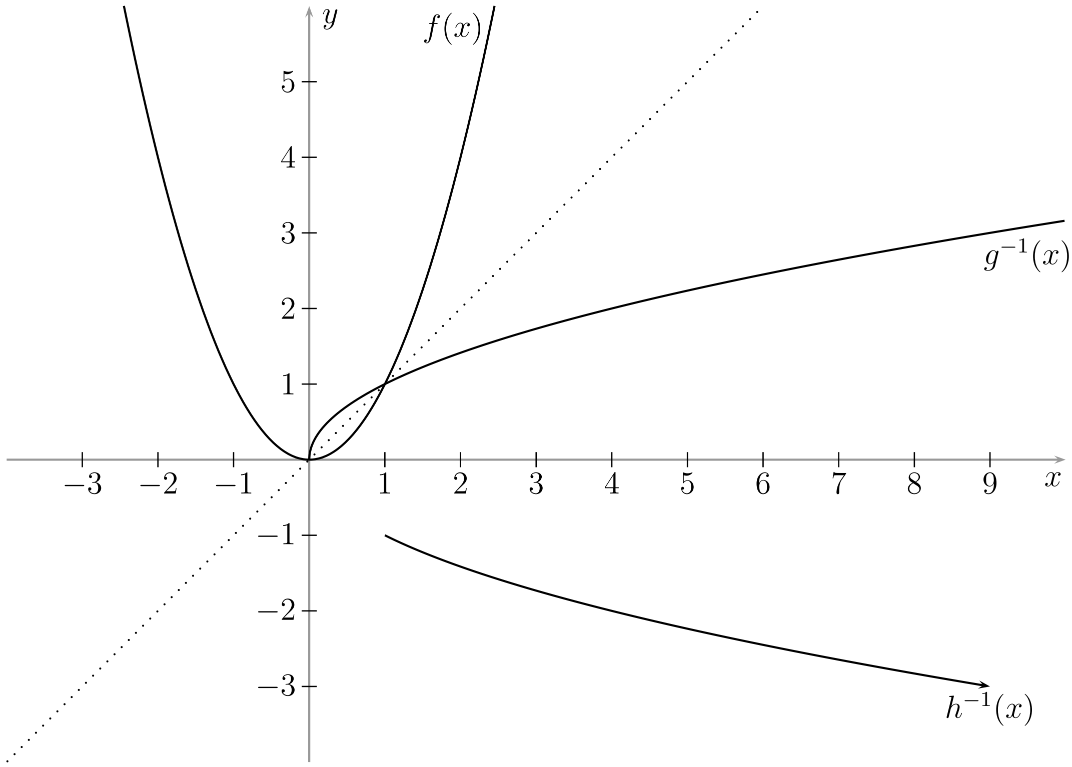
15. e^{-3}.

16. 0.

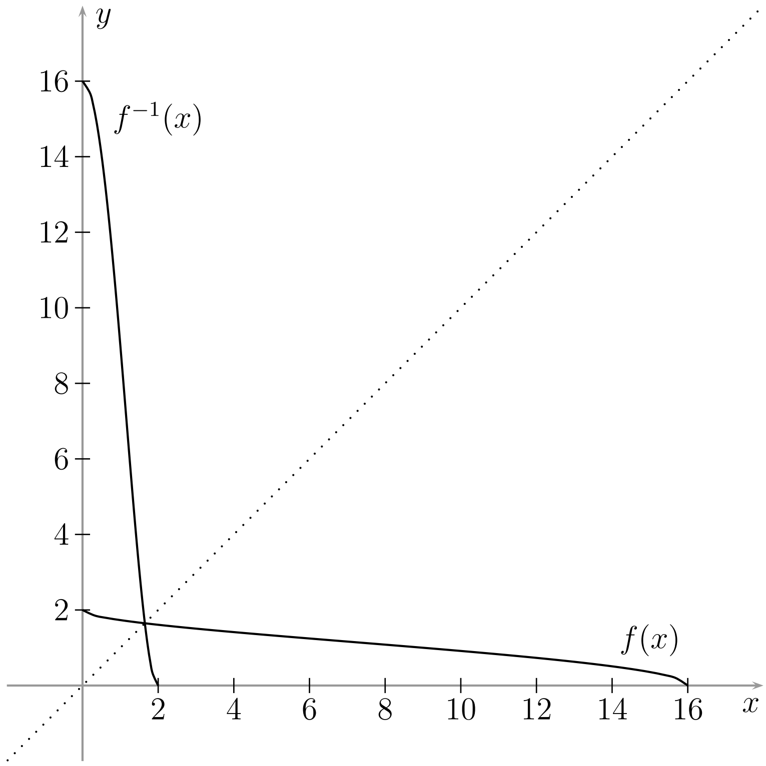
17. $e^{3/2}$.

5. Funkcije

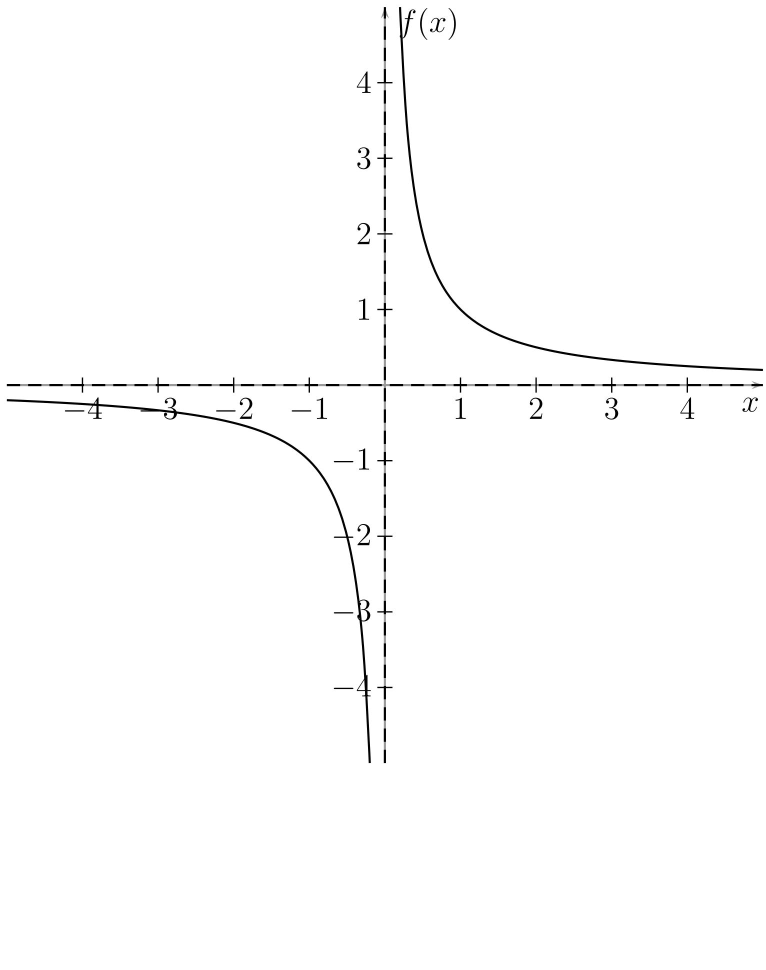
1. $Df = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [0, \infty)$, $\quad$ funkcija f nima inverza;
$Zg = Dg^{-1} = [0, \infty)$, $\quad g^{-1}(x) = \sqrt{x}$;
$Zh = Dh^{-1} = (1, 9]$, $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ (ustrezno zožena). Grafi:

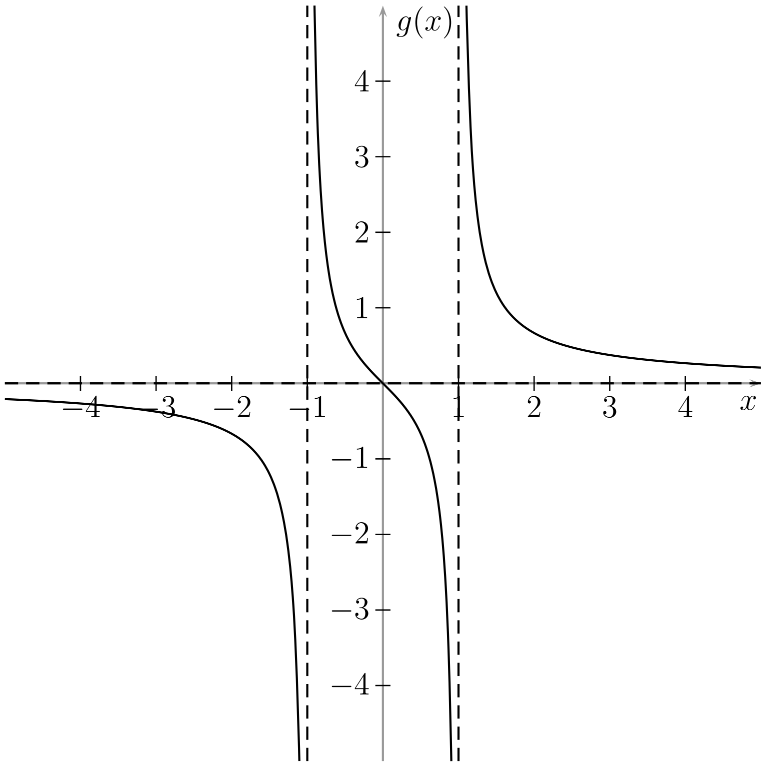


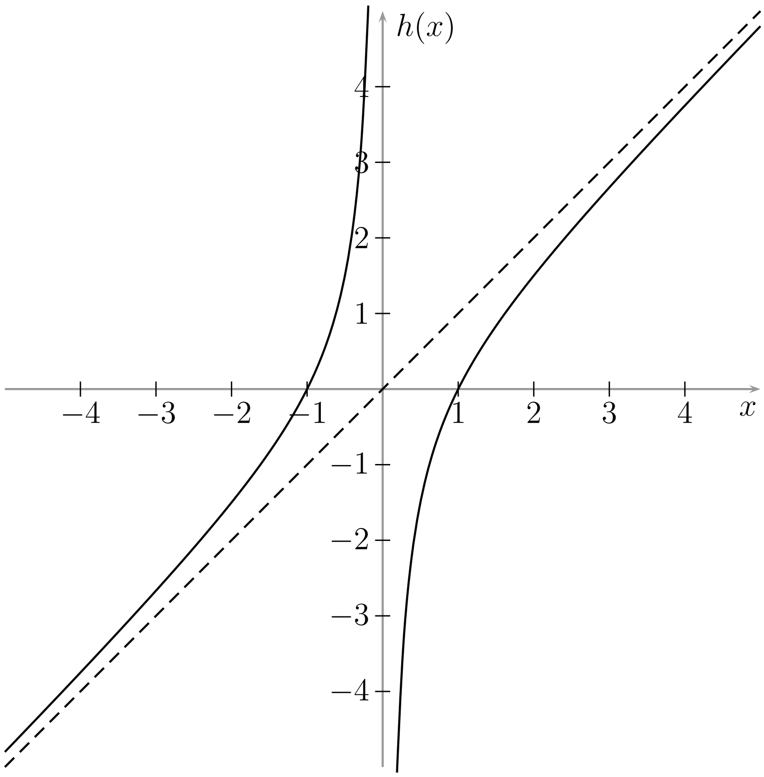
2. $Df = Zf^{-1} = [0, 16]$, $\quad Zf = Df^{-1} = [0, 2]$, $\quad f^{-1}(x) = (4 - x^2)^2$ (ustrezno zožena).
Grafa:

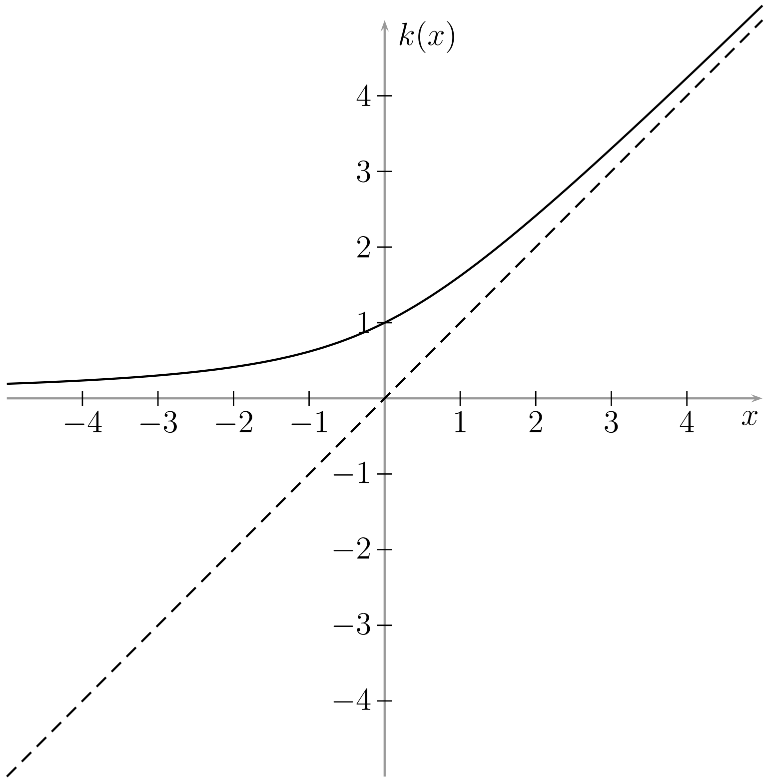


3. Funkcija f je inverzna sama sebi, inverz ustrezne zožitve funkcije h pa je funkcija $k(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$. Grafi:

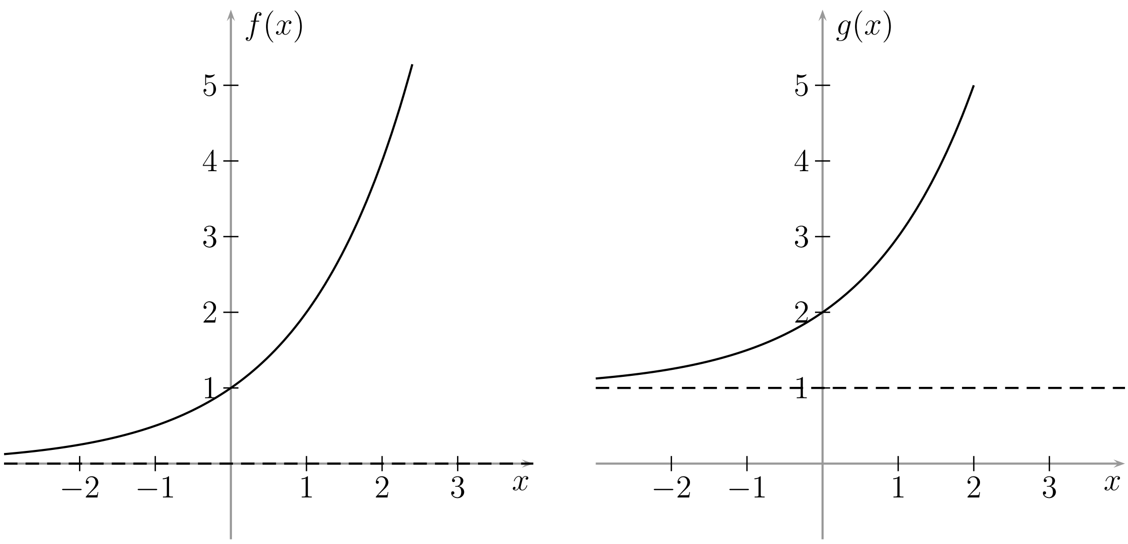


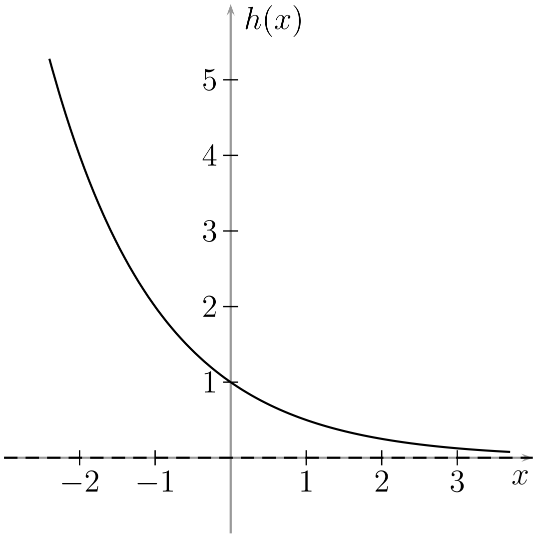

g(x)
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
x
−1
−2
−3
−4

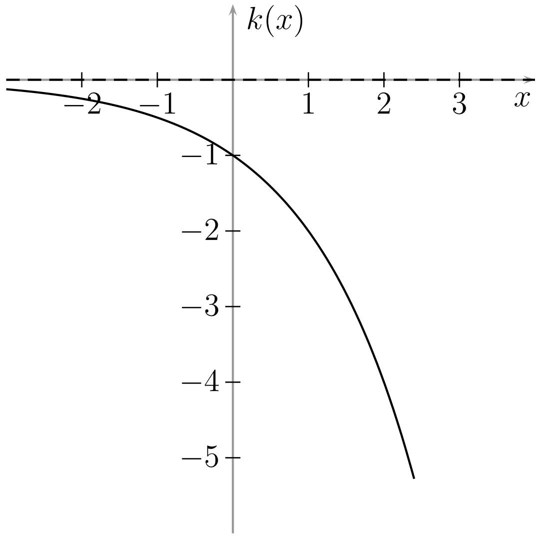

h(x)
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
x
−1
−2
−3
−4



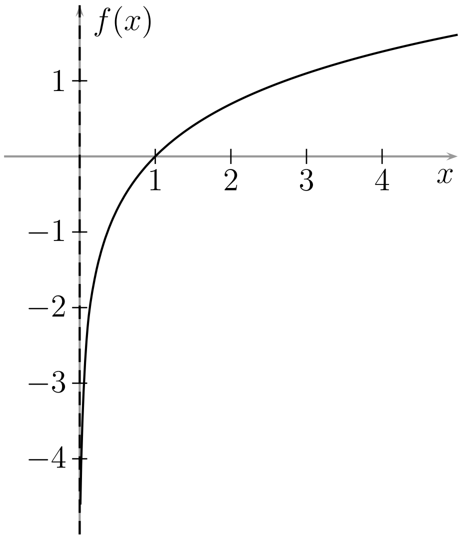
4.

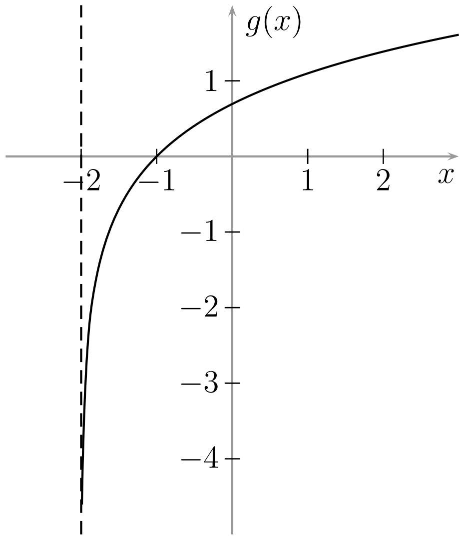




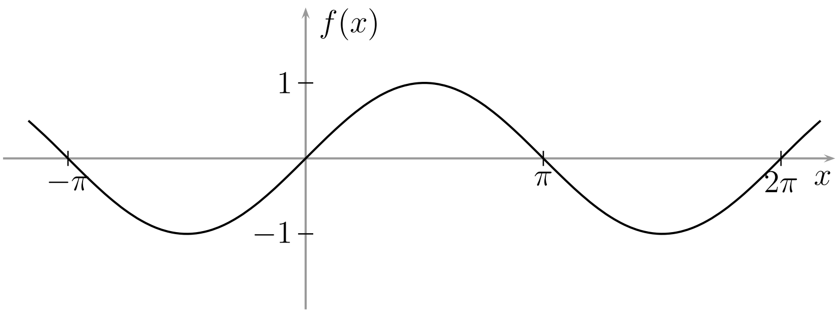


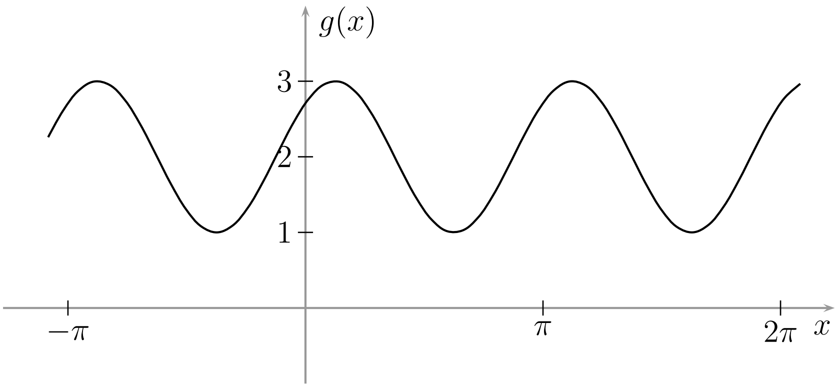
5. $Df = (0, \infty)$, $\quad Dg = (-2, \infty)$, $\quad Zf = Zg = \mathbb{R}$. Grafa:



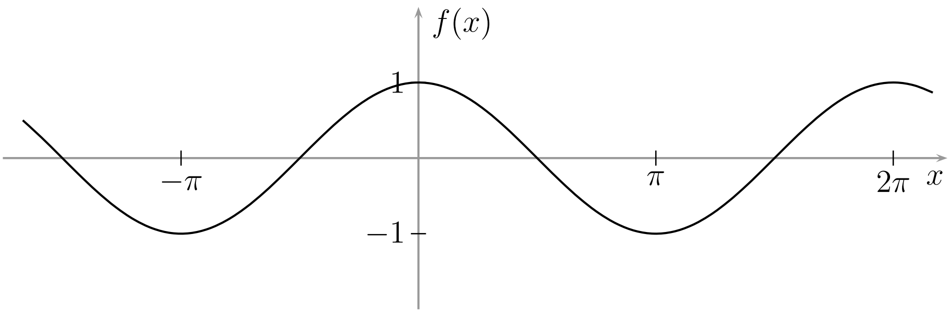


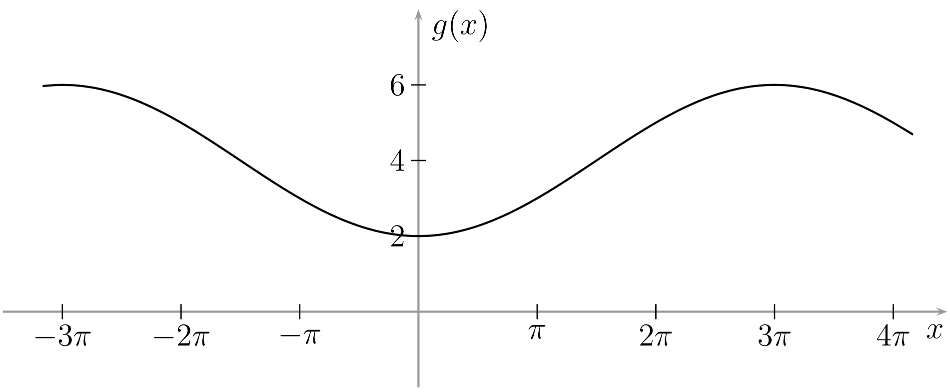
6. $Df = Dg = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [-1, 1]$, $\quad Zg = [1, 3]$. Grafa:



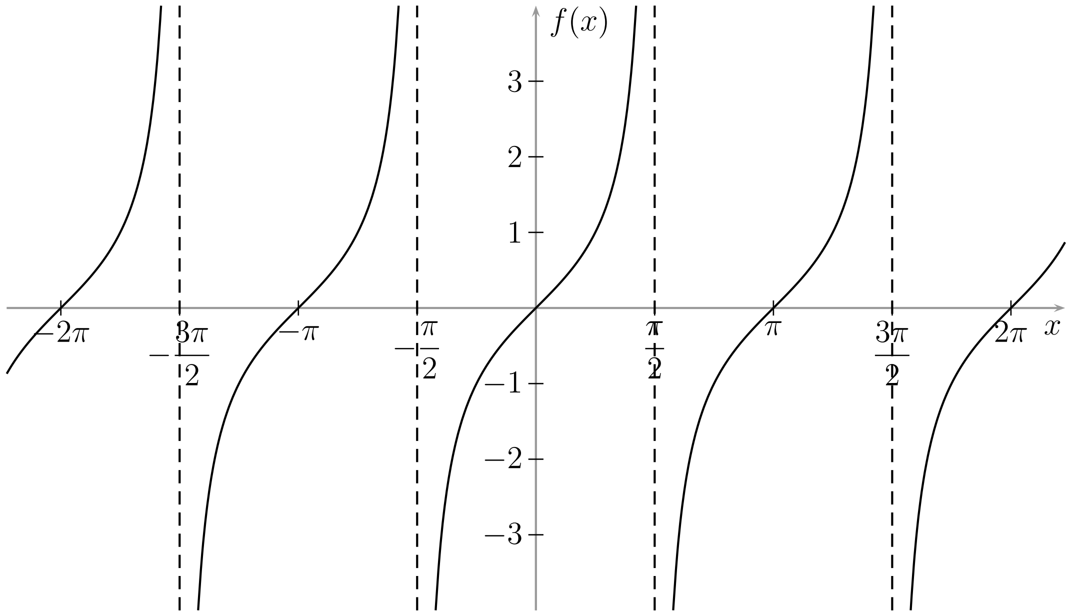


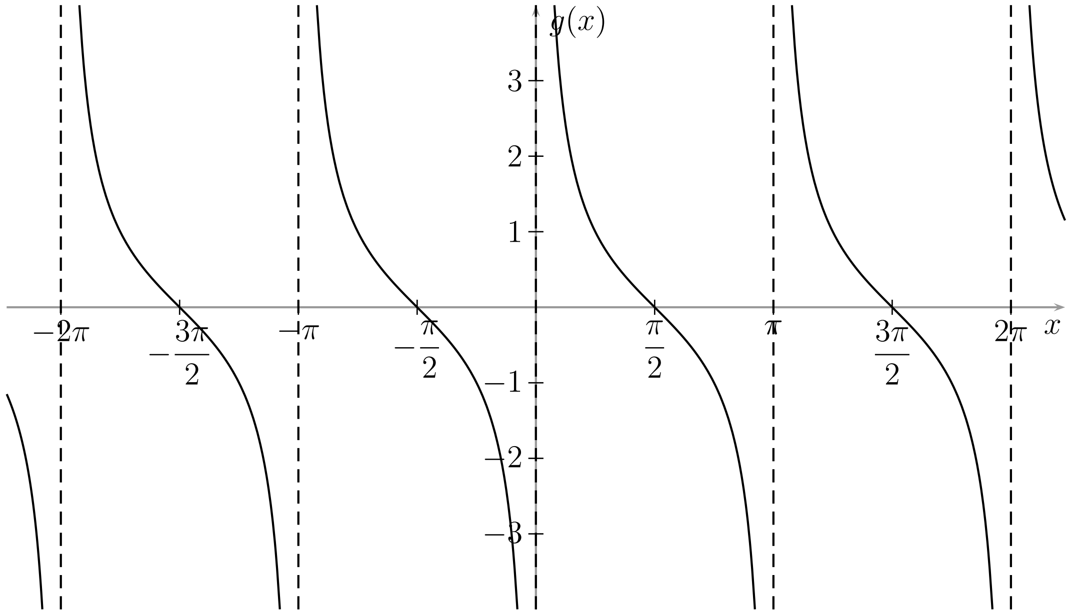
7. $Df = Dg = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [-1, 1]$, $\quad Zg = [2, 6]$. Grafa:



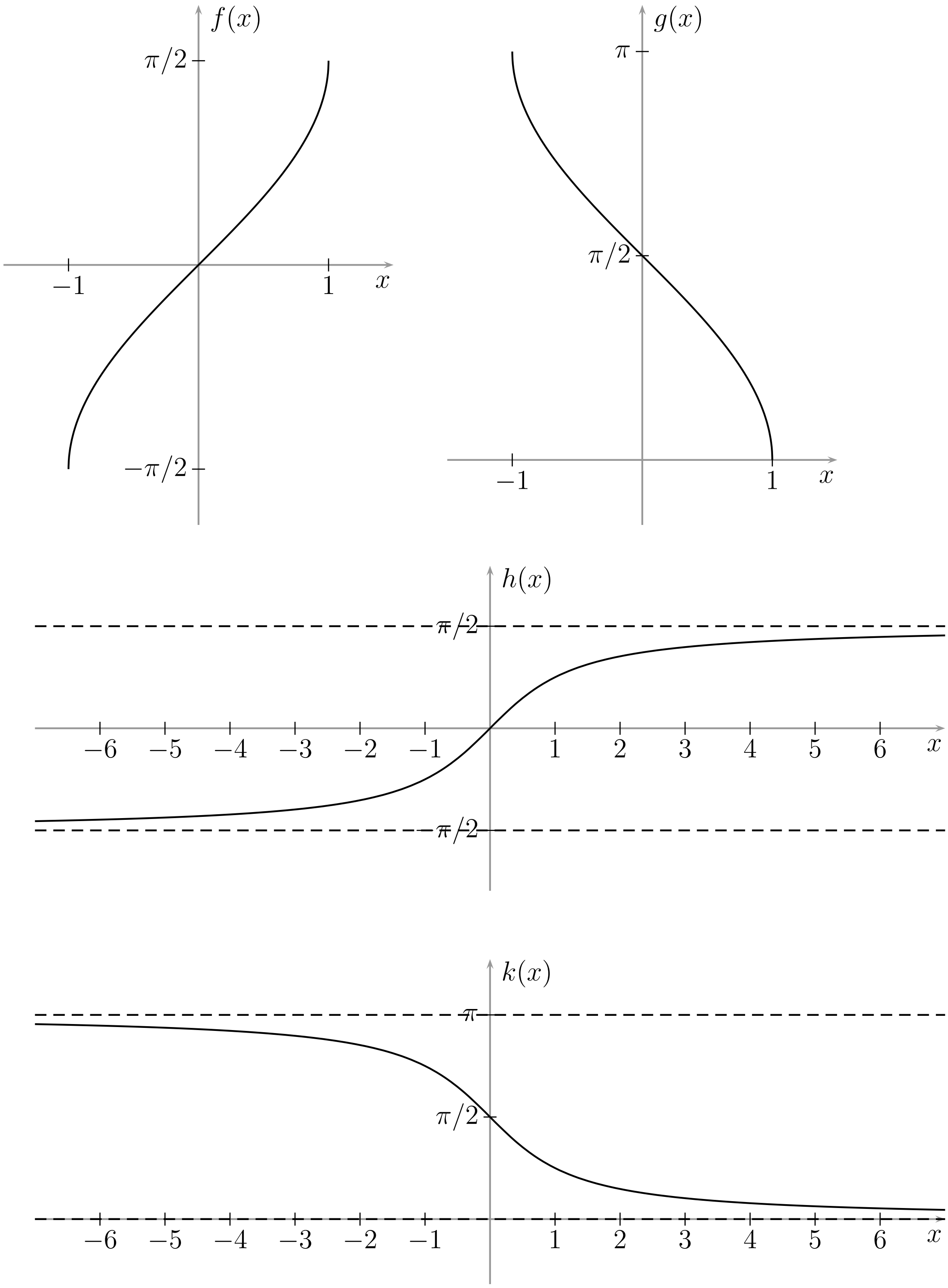


8. $Df = \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots\}$, $\quad Dg = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}$, $\quad Zf = Zg = \mathbb{R}$, $\quad$ Grafa:


f(x)
3
2
1
−1
−2
−3
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
x


g(x)
3
2
1
−1
−2
−3
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
x

9. $Df = Dg = [-1, 1]$, $Dh = Dk = \mathbb{R}$, $Zf = [-\pi/2, \pi/2]$, $Zg = [0, \pi]$, $Zh = (-\pi/2, \pi/2)$, $Zk = (0, \pi)$. Grafi:

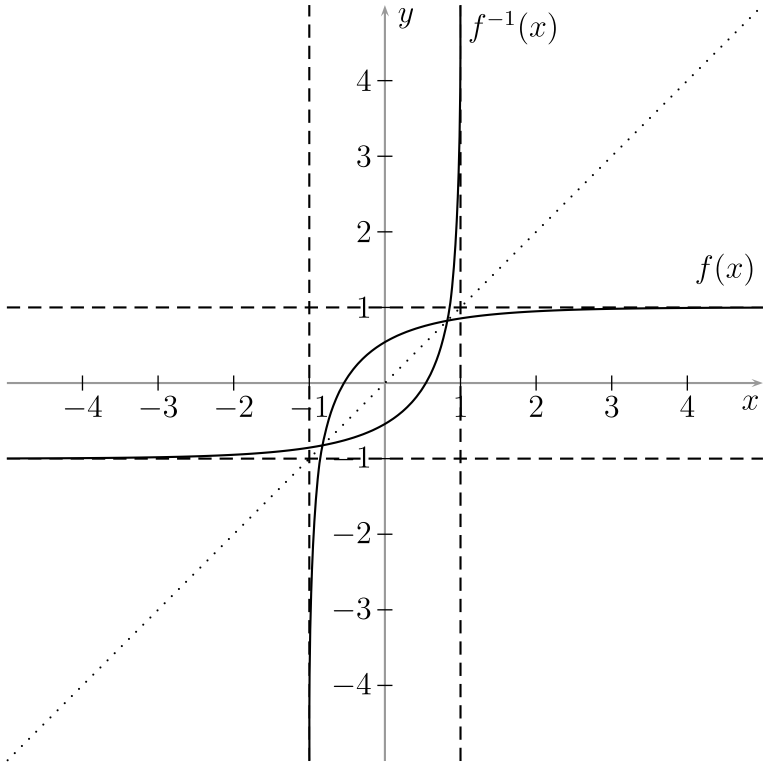


10. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi.$

11. $x = \pm x_1 + 2k\pi$, kjer je $x_1 = \arccos \frac{1}{3} \doteq 1{\cdot}23096 \doteq 70{\cdot}5288^\circ \doteq 70^\circ\, 31'\, 44''$.

12. $x = x_1 + k\pi$, kjer je $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \doteq 0{\dot{}}463648 \doteq 26{\dot{}}5651^\circ \doteq 26^\circ\, 33'\, 54''$.

13. $Df = Zf^{-1} = (-1, \infty)$, $Zf = Df^{-1} = (-\infty, 1)$, $f^{-1}(x) = -\ln(e - e^x)$. Grafa:



14. $[1, 2)$.

15. $a = 9$, $b = 6$.

16. $1/6$.

17. 0.

18. Ne obstaja.

19. $2/3$.

6. Odvod

1. $f'(x) = 12x^3 + 2 - \dfrac{42}{x^{43}}$.

2. $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+5)^2}$.

3. $f'(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

4. $f'(x) = -e^{\cos x} \sin x$.

5. $f'(x) = 2^x \ln 2$ (splošneje, $(a^x)' = a^x \ln a$).

6. $f'(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}$.

7. $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

10. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

13. $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

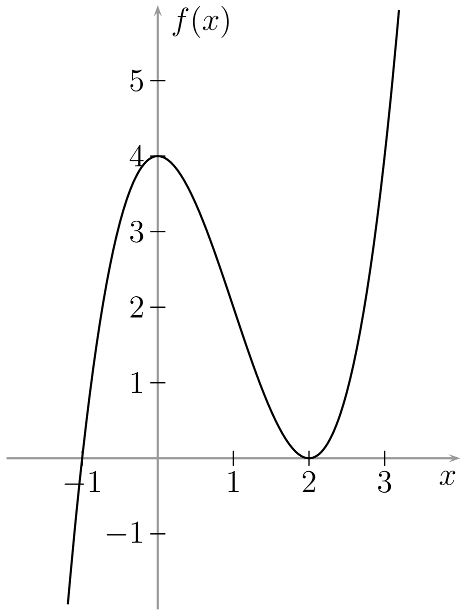
15. Tangenta: $y = 5 + \dfrac{x-25}{10} = \dfrac{x+25}{10}$.
Normala: $y = 5 - 10(x-25) = 255 - 10x$.
$\sqrt{27} = f(27) \approx 5\dot{}2$, točen rezultat: $5\dot{}196$.

16. $a = 1/4$, $b = 1$.

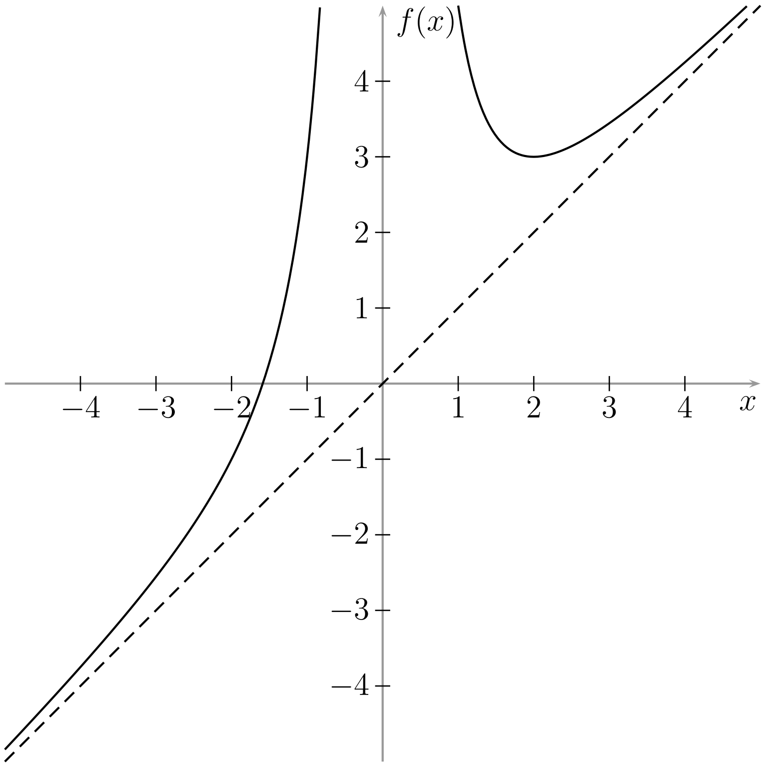
17. $\min_{x\in[2/3,3]} f(x) = f(2) = 4, \quad \max_{x\in[2/3,3]} f(x) = f(3) = 9$.

18. Izrezati je potrebno kvadratke s stranico $a/6$.

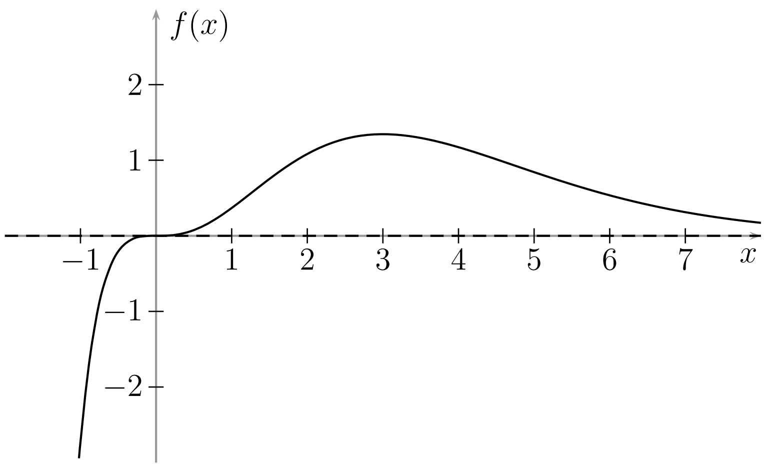
19. $Df = Zf = \mathbb{R}$. Ničli: -1, 2 (dvojna).
Funkcija narašča na $(-\infty, 0]$ in $[2, \infty)$, pada pa na $[0, 2]$. Pri $x = 0$ je lokalni maksimum, pri $x = 2$ pa lokalni minimum.
Funkcija je konveksna na $[1, \infty)$, konkavna na $(-\infty, 1]$ in ima prevoj pri $x = 1$.
Graf:



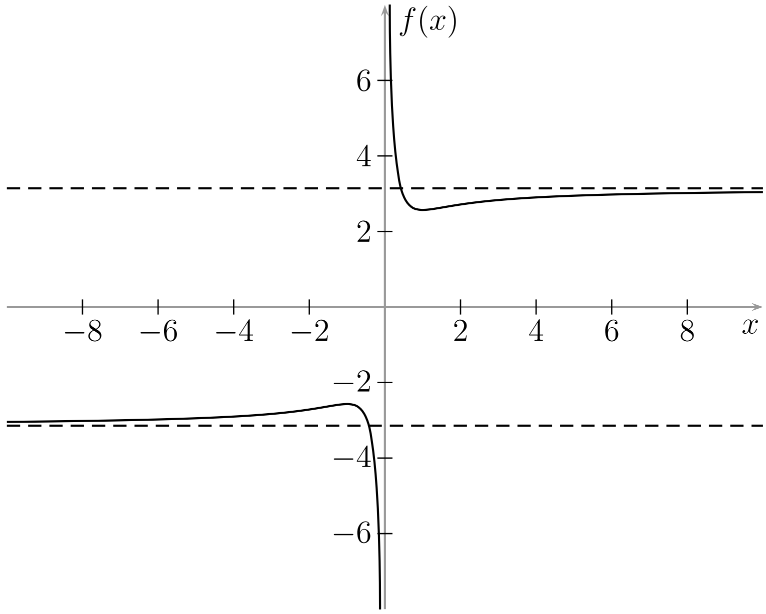
20. $Df = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $Zf = \mathbb{R}$. Ničla: $-\sqrt[3]{4} \doteq -1{\cdot}59$. Pri $x = 0$ je pol druge stopnje. Asimptota: $y = x$.
Funkcija narašča na $(-\infty, 0)$ in $[2, \infty)$, pada pa na $(0, 2]$. Pri $x = 2$ je lokalni minimum.
Funkcija je konveksna povsod, kjer je definirana.
Graf:



21. $Df = \mathbb{R}$, $Zf = (-\infty, 27\,e^{-3}] \doteq (-\infty, 1{\cdot}34]$. Ničla: $x = 0$ (trojna). Asimptota: $y = 0$.
Funkcija narašča na $(-\infty, 3]$ in pada na $[3, \infty)$. Pri $x = 3$ je globalni maksimum.
Funkcija je konveksna na $[0, 3 - \sqrt{3}]$ in $[3 + \sqrt{3}, \infty)$, konkavna pa je na $(-\infty, 0]$ in $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$. Prevoji: 0, $3 - \sqrt{3}$ in $3 + \sqrt{3}$.
Graf:



22. $Df = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $Zf = \left(-\infty, -1 - \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[1 + \frac{\pi}{2}, \infty\right)$.
Funkcija je brez ničel in ima pol pri $x = 0$. Asimptoti: $y = \pi$, $y = -\pi$. Funkcija narašča na $(-\infty, -1]$ in $[1, \infty)$, pada pa na $[-1, 0)$ in $(0, 1]$. Pri $x = -1$ je lokalni maksimum, pri $x = 1$ pa lokalni minimum.
Funkcija je konveksna na $\left(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$ in na $\left[\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty\right)$, konkavna pa na $\left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, 0\right)$ in $\left(0, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$.
Graf:



23. $1/e$.

24. $1/6$.

25. 0.

26. 1.

27. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

28. 0 (L'Hôpitalovega pravila ne moremo uporabiti).

29. $1/2$ (L'Hôpitalovega pravila ne moremo uporabiti).

7. Integral

1. $\left(\frac{2x^3}{7} - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} + C.$

2. $x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

3. $\frac{x-1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$

4. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C.$

5. $x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

6. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$

7. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.$

8. $2\big(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\big) + C.$

9. $\arcsin\frac{x}{3} + C.$

10. $2^x \ln 2 + C.$

11. $\frac{1}{2}\ln\big(1+e^{2x}\big) + C.$

12. $\frac{\sin^3 x}{3} + C.$

13. $\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$

14. $-(x+1)e^{-x} + C.$

15. $2\big(\sqrt{x}-1\big)e^{\sqrt{x}} + C.$

16. $x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

17. $2.$

18. $\sin 1 \doteq 0{\cdot}841.$

19. $-1/2.$

20. $0.$

21. $4/3$.

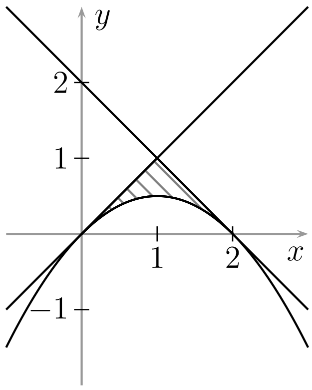
22. $(\pi - 1)/2$.

23. $\bar{f}_{0,\pi} = \dfrac{2}{3\pi}, \quad \bar{f}_{0,2\pi} = 0.$

24. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{15}.$

25. $\displaystyle\int_0^3 \Big[\sqrt{9-3x} - (3-x)\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$

26. Slika:



$$S = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Opomba: prva dva integrala lahko neposredno dobimo kot ploščino trikotnika.

27. $\displaystyle l = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$

28. Če zavrtimo okoli osi x, ima dobljena vrtenina prostornino $243\,\pi/7$, če zavrtimo okoli osi y, pa $243\,\pi/5$.

29. $\displaystyle S = \left(80 + \frac{8 + 82\sqrt{82}}{9}\right)\pi.$

30. $\dfrac{\pi}{6}\big(23 + 17\sqrt{17}\big).$

8. Vsote in vrste

1. 3/10.

2. 5/12.

3. 1/2.

4. 1.

5. Vrsta divergira, ker $\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\sqrt{m+1}-1\right)$ ne obstaja.

6. Označimo anuiteto z a.
Če ni obresti, je $a = 500$ €.
Pri letni obrestni meri 3% je $a = 663{,}09$ €.
Pri letni obrestni meri 10% je $a = 1123{,}97$ €.

7. 9/2.

8. Vrsta divergira.

9. 2.

10. 0˙11610.

11. Vrsta divergira.

12. 0˙817.

13. −0˙9990395.

14. $\sqrt{x} \approx 5 + \frac{x-25}{10} - \frac{(x-25)^2}{1000}$. Tako dobimo $\sqrt{26} \approx 5{\dot{}}099$.
Natančnejši rezultat: $\sqrt{26} \doteq 5{\dot{}}09901951359$.

15. $f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{x}{16} + \frac{3x^2}{256}$.

16. $f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{3x^4}{256}$.

17. $f(x) \approx 3x - 8x^3 - \frac{21}{2}x^5$.

18. $f(x) \approx 2\ln 2 + (1+\ln 2)(x-2) + \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(x-2)^3}{24}$.

19. $f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720}$.
Prvotna funkcija ni definirana v točki 0; v resnici je to Taylorjeva vrsta razširjene funkcije, za katero predpišemo $f(0) := 1/2$.

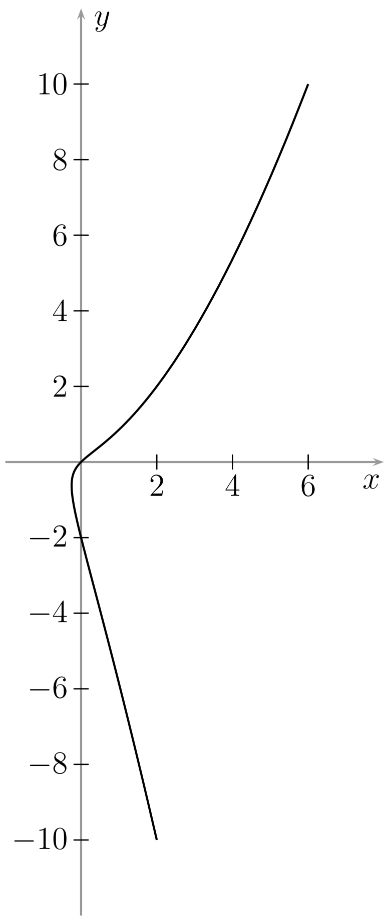
20. $1/3$.

21. $1/6$.

22. $1/2$.

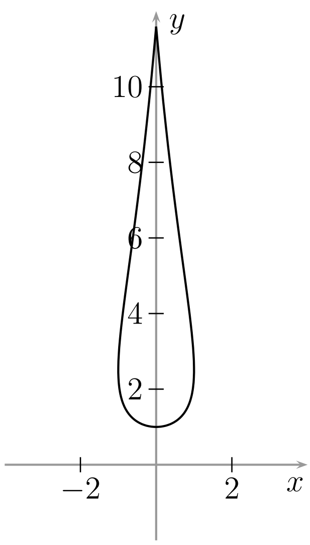
9. Krivulje v ravnini

1. Graf:



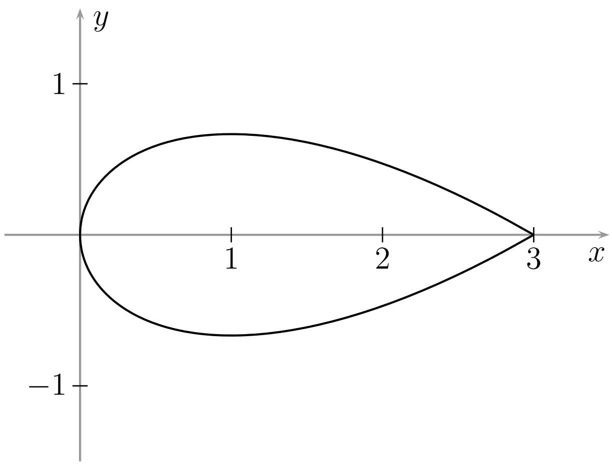
Krivulja ni sklenjena.

2. Graf:



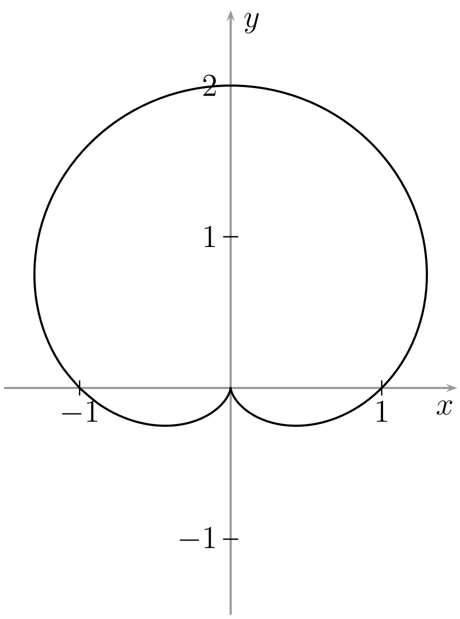
Krivulja je sklenjena.

3. $a = -\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$. Graf:

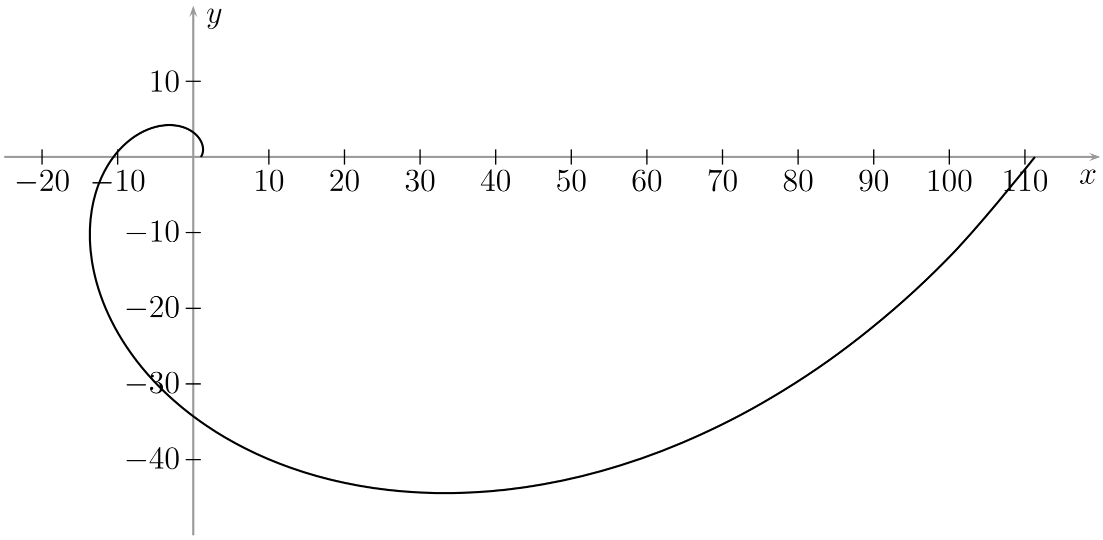


4. Tangenta: $y = 4 + \frac{3}{2}\,x$, normala: $y = -\frac{1+2x}{3}$.

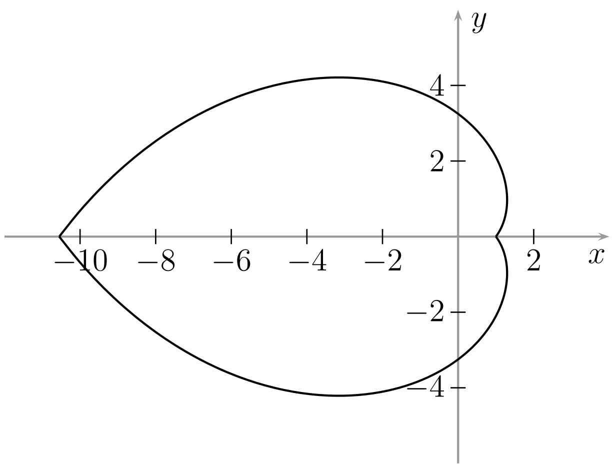
5. Graf:



6. Graf za $0 \le \pi \le 2\pi$:



Graf za $-\pi \le \varphi \le \pi$:



7. Iz $\displaystyle\int_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{3}} (t^2-t^4)\,\mathrm{d}t = -\frac{8}{5}\sqrt{3}$ dobimo $S = \dfrac{8}{5}\sqrt{3}$.

Seveda lahko rezultat dobimo tudi iz $\displaystyle\int_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} y\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}\sqrt{3}$.

8. $\displaystyle l = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + (1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1+t^2)\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{3}$.

9. Ploščina: $\displaystyle S = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi} e^{3\varphi/2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\big(e^{3\pi/2}-1\big)$.

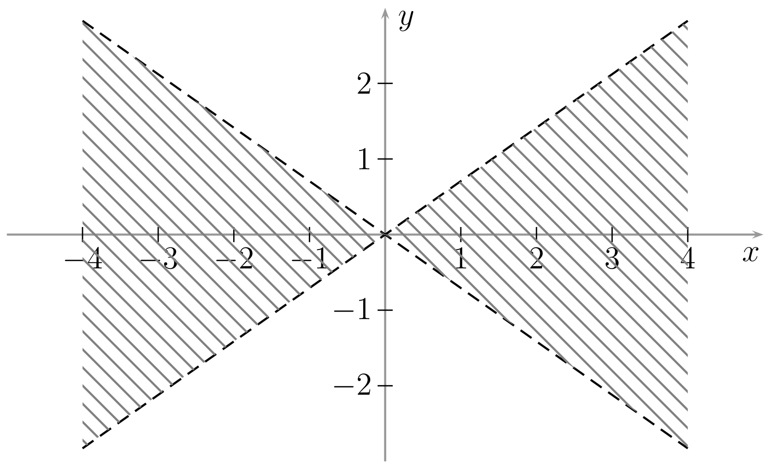
Obseg: $\displaystyle o = 2\int_0^{\pi} \sqrt{e^{3\varphi/2} + \frac{9}{16}e^{3\varphi/2}}\,\mathrm{d}\varphi = 2\cdot\frac{5}{4}\int_0^{\pi} e^{3\varphi/4}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{10}{3}\big(e^{3\pi/4}-1\big)$.

10. Funkcije več spremenljivk

1. Definicijsko območje je množica točk (x, y), za katere velja $x^2 - 2y^2 > 0$, kar je ekvivalentno pogoju:

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} < y < \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \text{ali} \quad \frac{x}{\sqrt{2}} < y < -\frac{x}{\sqrt{2}}$$

Skica:



2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy\, e^{x^2 y}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\, e^{x^2 y},$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2y + 4x^2y^2)e^{x^2 y}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^4\, e^{x^2 y}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (2x + 2x^3 y)e^{x^2 y}.$

3. Tangentna ravnina: $z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{60}(x - 8) - \dfrac{1}{125}(y - 25).$

Od tod dobimo: $\dfrac{\sqrt[3]{8{\cdot}06}}{\sqrt{24{\cdot}5}} \approx 0{\cdot}405$, natančnejši rezultat: $0{\cdot}40506855$.

Normala:

$$x = 8 + \frac{t}{60}\,, \quad y = 25 - \frac{t}{125}\,, \quad z = \frac{2}{5} - t\,.$$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 + y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4(x + y^3).$

Stacionarne točke: $T_1(0, 0)$, $T_2(1, -1)$ in $T_3(-1, 1)$.

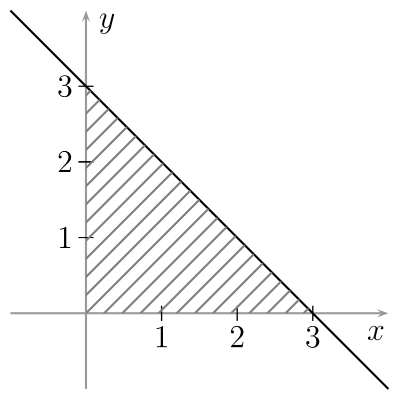
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 4, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2.$

$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16$, torej v $T_1(0, 0)$ ni ekstrema.

$\Delta(1, -1) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 128$, torej je v $T_2(1, -1)$ minimum.

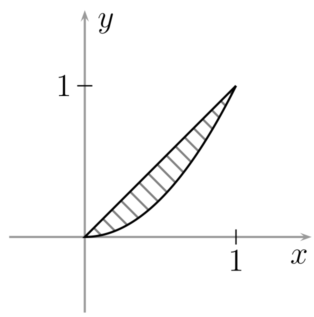
$\Delta(-1, 1) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 128$, torej je v $T_3(-1, 1)$ minimum.

5. Skica definicijskega območja:



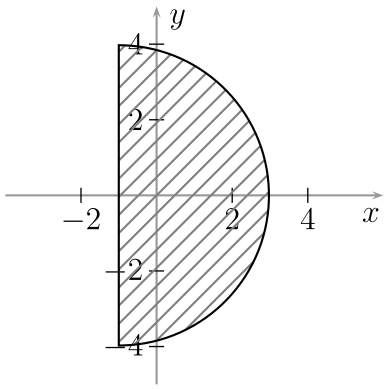
Oglišča: $f(0,0) = f(3,0) = f(0,3) = 0$.
Rob $y = 0,\ 0 < x < 3$: $f(x,0) = 0$.
Rob $x = 0,\ 0 < y < 3$: $f(0,y) = 0$.
Rob $y = 3 - x, 0 < x < 3$: $f(x, 3-x) = x(3-x)e^{-3}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 3-x) = (3-2x)e^{-3}$, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}\, e^{-3} \doteq 0{\cdot}112$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-x)y\, e^{-x-y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)\, e^{-x-y}$, $f(1,1) = e^{-2} \doteq 0{\cdot}135$.
Torej je $\min\limits_D f = 0$ in $\max\limits_D f = e^{-2}$.

6. Skica definicijskega območja:



Oglišči: $f(0,0) = 0$, $f(1,1) = -1$.
Rob $y = x,\ 0 < x < 1$: $f(x,x) = -x^2$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x) = -2x$, točka $(0,0)$ ne pripada notranjosti tega roba (in smo jo že obravnavali pri ogliščih).
Rob $y = x^2,\ 0 < x < 1$: $f(x,x^2) = x^2 - 2x^4$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = 2x - 8x^3 = = x(1-2x)(1+2x)$, v notranjosti roba je le točka $(1/2, 1/4)$ in velja $f(1/2, 1/4) = 1/8$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y$, točka $(0,0)$ ni v notranjosti.
Torej je $\min\limits_D f = f(1,1) = -1$ in $\max\limits_D f = f(1/2, 1/4) = 1/8$.

7. Skica definicijskega območja:



Krožni lok razdelimo na dva odseka, $y = \sqrt{16 - (x+1)^2} = \sqrt{15 - 2x - x^2}$ in $y = -\sqrt{16 - (x+1)^2} = -\sqrt{15 - 2x - x^2}$. Zato ne dobimo le oglišč $(-1, 4)$ in $(-1, -4)$, temveč tudi oglišče $(3, 0)$.
Oglišča: $f(-1, 4) = f(1, 4) = 21\sqrt{e} \doteq 34{\cdot}6$, $\quad f(3, 0) = 13\, e^{-3/2} \doteq 2{\cdot}90$.
Rob $x = -1$, $-4 \le y \le 4$: $f(-1, y) = (5 + y^2)e^{1/2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(-1, y) = 2y\, e^{1/2}$,
$f(-1, 0) = 5\, e^{1/2} \doteq 8{\cdot}24$.
Robova $y = \pm\sqrt{15 - 2x - x^2}$: $f\big(x, \pm\sqrt{15 - 2x - x^2}\big) = (19 - 2x)e^{-x/2}$,
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(x, \pm\sqrt{15 - 2x - x^2}\big) = \big(x - \frac{23}{2}\big)e^{-x/2}$.
Nobena točka $T(23/2, y)$ ni v definicijskem območju funkcije.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \big(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2\big)e^{-x/2}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\, e^{-x/2}$.
Edina stacionarna točka v notranjosti je $T(2, 0)$ in $f(2, 0) = 8\, e^{-1} \doteq 2{\cdot}94$.
Torej je $\min\limits_D f = f(3, 0) = 13\, e^{-3/2}$ in $\max\limits_D f = f(-1, 4) = f(-1, -4) = 21\sqrt{e}$.

8. Brez težav preverimo, da zgornje enačbe ustrezajo obliki, za katero lahko uporabimo formulo. Torej je:

$$V = \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} (xy - y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^7 - x^6 - x^5 + x^4)\, \mathrm{d}x = \frac{2641}{560} \doteq 4{\cdot}72\,.$$

9. Neenačbe moramo najprej spraviti v obliko, za katero lahko uporabimo formulo (t. j. spodnja meja mora biti vedno manjša od zgornje). Začnemo z zadnjima neenačbama. Veljati mora $y^2 \le 1 - x$, torej mora biti $x \le 1$ in $-\sqrt{1-x} \le y \le \sqrt{1-x}$. Če dane neenačbe zapišemo v ekvivalentni obliki:

$$0 \le x \le 1\,, \quad -\sqrt{1-x} \le y \le \sqrt{1-x}\,, \quad y^2 \le z \le 1 - x\,,$$

le-ta ustreza zahtevani obliki in lahko izračunamo:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} (1 - x - y^2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \int_0^1 (1 - x)^{3/2}\, \mathrm{d}x = \frac{8}{15}\,.$$

10. Zgornji dve neenačbi ustrezata pogojem za uporabo formule, potrebujemo pa še meji za φ. Ker za φ ni omejitve, postavimo kar $0 \le \varphi \le 2\pi$. Sledi:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2(1 + \cos\varphi)\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{15\pi}{2}\,.$$

11. Diferencialne enačbe

1. $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{x^3}, \quad -\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2x^2} + C, \quad y = \dfrac{2x^2}{1 - 2Cx^2}.$
$C = \dfrac{3}{2}, \quad y = \dfrac{2x^2}{1 - 3x^2}, \quad Dy = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right).$

2. Velja $y = 0$ ali $\dfrac{dy}{y} = 1 + x^2$, kar se zintegrira v $\ln|y| = x + \frac{x^3}{3} + C$. Splošna rešitev naše enačbe je torej:

$$y = 0 \quad \text{ali} \quad y = \pm e^{C + x + x^3/3}\,. \tag{$*$}$$

in definicijsko območje je vselej vsa realna os. Če vstavimo začetni pogoj, dobimo, da mora veljati negativni predznak in da je $C = \ln 2$. Končna rešitev je torej $y = -2\,e^{x + x^3/3}$.

Če je edini člen, povezan z odvisno spremenljivko, oblike dz/z*, se splača integrirati:*

$$\int \frac{dz}{z} = \ln \frac{z}{C}\,,$$

navadno pa lahko tudi izpustimo absolutne vrednosti v argumentih zunanjih logaritmov in tudi za $C = 0$ *dobimo rešitev (obravnavati je potrebno vsak primer posebej).*

V našem konkretnem primeru je torej $\ln \dfrac{y}{C} = x + \dfrac{x^3}{3}$ in $y = C\,e^{x + x^3/3}$, kar je ekvivalentno obliki $(*)$.

3. $\dfrac{dy}{1 + y^2} = \dfrac{dx}{x}, \quad \operatorname{arctg} y = \ln|x| + C, \quad y = \operatorname{tg}(\ln|x| + C).$
$C = \frac{\pi}{4}, \quad y = \operatorname{tg}\big(\ln(-x) + \frac{\pi}{4}\big), \quad Dy = \big(-e^{\pi/4}, -e^{-3\pi/4}\big).$

4. $\dfrac{dy_H}{y_H} = -\operatorname{tg} x\, dx, \quad \ln \dfrac{y_H}{C} = \ln\cos x, \quad y_H = C\cos x.$
$C' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad C = \dfrac{1}{\cos x} + D, \quad y = 1 + D\cos x.$
$D = 0, \quad y = 1, \quad Dy = \mathbb{R}.$

5. $\dfrac{dy_H}{y_H} = -\dfrac{dx}{2x}, \quad \ln \dfrac{y_H}{C} = \dfrac{\ln x}{2}, \quad y_H = C\sqrt{x}.$
$C' = e^x, \quad C = e^x + D, \quad y = (e^x + D)\sqrt{x}.$

6. Če vpeljemo $z = y'$, dobimo:
$xz' + z = 0, \quad \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x}, \quad \ln\dfrac{z}{C} = -\ln x, \quad z = \dfrac{C}{x}.$
Torej je $y = \displaystyle\int z\, dx = C\,\ln|x| + D.$

7. Splošna rešitev: $y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}$.
Partikularna rešitev: $y = \frac{1}{3}\big(e^{-x} - e^{2x}\big)$.

8. Splošna rešitev: $y = C_1 + C_2\, e^{-2x}$.
Partikularna rešitev: $y = 44 - 2\, e^{-2x}$.

9. Splošna rešitev: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$.
Partikularna rešitev: $y = 42x\, e^{-3x}$.

10. Splošna rešitev: $y = e^{-x}\big(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\big)$.
Partikularna rešitev: $y = e^{-x}\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big)$.

11. $y = -\frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}$.

12. $y = \frac{1}{10}\sin x + \frac{1}{5}\cos x + C_1\, e^{x} + C_2\, e^{3x}$.

13. $y = e^{2x} + \frac{1}{9}\, e^{-2x} + (C_1 + C_2 x)e^{x}$.

14. $y = e^{3x} - (1 + x)e^{2x}$.

15. $y = \big(\frac{1}{2}x^2 + C_1 + C_2 x\big)e^{2x}$.

12. Osnove kombinatorike

1. $12 + 3 = 15$.

2. Če mora obleči natanko eno srajco, natanko ene hlače in natanko en pulover, na $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ načinov. Če ni nujno, da nosi pulover, pa na $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ načinov.

3. $(4 + 3) \cdot 5 = 35$.

4. Možnih vozovnic je $7 \cdot 6 = 42$, možnih cen pa $7 \cdot 6/2 = 21$.

5. Rezka $5! = 120$, Tatjana pa $\dfrac{7!}{2!\,3!} = 420$.

6. $15 + 21 - 3 = 33$.

7. $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

8. $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \dbinom{10}{3} = 120$.

13. Verjetnostni račun

1. a) $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/3$, $P(D) = 1/6$.
b) $D \subseteq B$, $D \subseteq C$.
c) A in C, A in D.
d) A in B, B in C.

2. a) $1/4$, b) $1/8$, c) $11/32$.

3. a) $1/6$, b) $1/2$, c) $2/3$.

4. Verjetnosti dobitkov lahko računamo na dva načina. Pri prvem načinu si predstavljamo, da so prekrižane številke fiksne, nakar gledamo vsa možna žrebanja (*pogled igralca*). Lahko pa si predstavljamo tudi, da so fiksne izžrebane številke, nakar gledamo vsa možna križanja (pogled Loterije). Dobimo:

$$
\begin{aligned}
P(\text{sedmica}) &= \frac{1}{\binom{39}{7}} = \frac{1}{15.380.937} \doteq 6{\dot{}}50 \cdot 10^{-8} \\
P(\text{šest in dodatna}) &= \frac{\binom{7}{6}\binom{32}{1}}{\binom{39}{7} \cdot 32} = \frac{\binom{7}{6}\binom{1}{1}\binom{31}{0}}{\binom{39}{7}} \approx \frac{1}{2.197.277} \doteq 4{\dot{}}55 \cdot 10^{-7} \\
P(\text{šestica}) &= \frac{\binom{7}{6}\binom{32}{1} \cdot 31}{\binom{39}{7} \cdot 32} = \frac{\binom{7}{6}\binom{1}{0}\binom{31}{1}}{\binom{39}{7}} \approx \frac{1}{70.880} \doteq 1{\dot{}}41 \cdot 10^{-5} \\
P(\text{petica}) &= \frac{\binom{7}{5}\binom{32}{2}}{\binom{39}{7}} \approx \frac{1}{1477} \doteq 6{\dot{}}77 \cdot 10^{-4} \\
P(\text{štirica}) &= \frac{\binom{7}{4}\binom{32}{3}}{\binom{39}{7}} \approx \frac{1}{88{\dot{}}6} \doteq 0{\dot{}}0113 \\
P(\text{tri in dodatna}) &= \frac{\binom{7}{3}\binom{32}{4} \cdot 4}{\binom{39}{7} \cdot 32} = \frac{\binom{7}{3}\binom{1}{1}\binom{31}{4}}{\binom{39}{7}} \approx \frac{1}{97{\dot{}}8} \doteq 0{\dot{}}0102
\end{aligned}
$$

Pri Lotu prekrižamo 7 številk od 39. Izžreba se 7 številk in še ena dodatna. Kolikšna je verjetnost, da zadenemo:

a) sedmico?

b) šestico?

c) štirico?

d) dobitek $6 + 1$?

5. a) $\dfrac{1}{\binom{39}{7}} = \dfrac{1}{15380937} \doteq 6{\dot{}}5 \cdot 10^{-8}$,

b) $\dfrac{\binom{7}{6}}{\binom{32}{1}\binom{39}{7}} \doteq 1{\dot{}}5 \cdot 10^{-5}$,

c) $\dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{32}{3}\binom{39}{7}} \doteq 0\text{˙}0147,$

d) $\dfrac{\binom{7}{6}}{\binom{32}{1}\binom{39}{7}} \doteq 4\text{˙}55 \cdot 10^{-7}.$

6. $\dfrac{364}{365} \cdot \dfrac{363}{365} \cdot \dots \cdot \dfrac{366-n}{365}$. Tabela prvih nekaj verjetnosti:

n	P	n	P	n	P
1	0	26	0˙598	51	0˙974
2	0˙00274	27	0˙627	52	0˙978
3	0˙0082	28	0˙654	53	0˙981
4	0˙0164	29	0˙681	54	0˙984
5	0˙0271	30	0˙706	55	0˙986
6	0˙0405	31	0˙73	56	0˙988
7	0˙0562	32	0˙753	57	0˙9901
8	0˙0743	33	0˙775	58	0˙9917
9	0˙0946	34	0˙795	59	0˙993
10	0˙117	35	0˙814	60	0˙9941
11	0˙141	36	0˙832	61	0˙9951
12	0˙167	37	0˙849	62	0˙9959
13	0˙194	38	0˙864	63	0˙9966
14	0˙223	39	0˙878	64	0˙9972
15	0˙253	40	0˙891	65	0˙9977
16	0˙284	41	0˙903	66	0˙9981
17	0˙315	42	0˙914	67	0˙9984
18	0˙347	43	0˙924	68	0˙9987
19	0˙379	44	0˙933	69	0˙999
20	0˙411	45	0˙941	70	0˙9992
21	0˙444	46	0˙948	71	0˙9993
22	0˙476	47	0˙955	72	0˙9995
23	0˙507	48	0˙961	73	0˙9996
24	0˙538	49	0˙966	74	0˙9996
25	0˙569	50	0˙97	75	0˙9997

7. a) $\dfrac{4}{10} = 0\text{˙}4$, b) $\dfrac{3}{9} \doteq 0\text{˙}333$, c) $\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \doteq 0\text{˙}133$, d) $\dfrac{4}{10} = 0\text{˙}4$, e) $\dfrac{3}{9} \doteq 0\text{˙}333$,

f) $\dfrac{\frac{4}{10}}{2 \cdot \frac{4}{10} - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}} = 0\text{˙}6$.

8. $0\text{˙}4 \cdot 0\text{˙}7 \cdot 0\text{˙}2 + (0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}7 + 0\text{˙}4 \cdot 0\text{˙}3) \cdot 0\text{˙}6 + 0\text{˙}6 \cdot 0\text{˙}3 = 0\text{˙}56$.

9. $\dfrac{0\text{˙}001 \cdot 0\text{˙}95}{0\text{˙}001 \cdot 0\text{˙}95 + 0\text{˙}999 \cdot 0\text{˙}05} \doteq 0\text{˙}0187$.

10. a) $5 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \doteq 0\text{˙}402$,

b) $\dbinom{5}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \doteq 0\text{˙}0321$,

c) $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \doteq 0\text{˙}598$.

11. $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \doteq 0{\cdot}0193.$

12. $$\binom{6}{6} \cdot 0{\cdot}4^6 + \binom{6}{5} \cdot 0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}4^5 + \binom{6}{4} \cdot 0{\cdot}6^2 \cdot 0{\cdot}4^4 + \\ + \binom{6}{3} \cdot 0{\cdot}6^3 \cdot 0{\cdot}4^3 \left[\binom{3}{3} \cdot 0{\cdot}3^3 + \binom{3}{2} \cdot 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}3^2\right] \doteq 0{\cdot}239.$$