

KOLOKVIJI IN IZPITI IZ MATEMATIKE  
BTF

Zbral: Martin Raič

1. Izračunaj neskončni presek intervalov  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{n}, 4n\right)$ .
2. Dani sta matriki  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  in  $B = A^T$ . Izračunaj  $\det(A^{-1}B)$ .
3. Poišči ravnino, ki gre skozi točko  $A(1, 2, 3)$  in je pravokotna na os  $x$ .
4. Reši sistem enačb:

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 1 \\x - y + 3z &= 2 \\x + 2y - 4z &= -1\end{aligned}$$

5. Določi zalogo vrednosti funkcije  $f(x) = \text{int}(3 \cos x)$ .
6. Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^{2n}}{3 \cdot 4^n - 3^n}$ .
7. Določi, ali vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$  konvergira. Odgovor utemelji!
8. Določi konstanti  $a$  in  $b$ , za kateri bo funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & ; x \geq 1 \\ ax - 2 & ; -1 < x < 1 \\ -x^2 + b & ; x \leq -1 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

1. Izračunaj neskončno unijo intervalov  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ -n, 2 - \frac{1}{n} \right]$ .
2. Poišči vse matrike oblike  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & a \end{bmatrix}$ , ki komutirajo z matriko  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ .
3. Poišči vsaj en vektor dolžine 1, ki je pravokoten na vektorja  $\vec{a} = [1 \ 2 \ 3]^T$  in  $\vec{b} = [-3 \ -2 \ -1]^T$ .
4. Določi parameter  $b$ , za katerega bo sistem:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3x - y &= 5 \\ 2x + y &= 6 + b \end{aligned}$$

rešljiv. Za tak  $b$  sistem tudi reši.

5. Določi definicijsko območje funkcije  $g(x) = \sin \left( \sqrt{2 - \sqrt[3]{\ln x}} \right)$ .
6. Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} + \sqrt[4]{n^6 + n^5}}{(2n)^{3/2}}$ .
7. Določi, ali vrsta  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$  konvergira.
8. Določi konstanti  $a$  in  $b$ , za kateri bo funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & ; x \geq 1 \\ ax + b & ; -1 < x < 1 \\ e^{x+1} + 3 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

1. Izračunaj neskončni presek intervalov  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 3 - 2^{-n}\right)$ .
2. Dana je matrika  $\mathbf{V} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ . Izračunaj tiste matrike  $\mathbf{V}^2$ ,  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$ ,  $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ ,  $(\mathbf{V}^T)^2$ , ki obstajajo.
3. Določi parameter  $z$ , za katerega bodo točke  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 2, -1)$ ,  $C(0, 0, 1)$  in  $D(3, 1, z)$  koplanarne.
4. Reši sistem:

$$\begin{aligned}x - y - z + 3u &= 1 \\ -2x + 2y - z - 6u &= 1 \\ 3x - 3y - 2z + 9u &= 2\end{aligned}$$

5. Določi definicijsko območje funkcije  $f(x) := \exp(\sqrt{3 - x^2})$ .
6. Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + n}}$ .
7. Izračunaj vrednost vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} - 1}{5^n}$ .
8. Določi parameter  $a$ , za katerega bo funkcija:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & ; x < 0 \\ 2e^x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

1. Izračunaj neskončno unijo intervalov  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [1 - 3^{-n}, n]$ .

2. Določi vsa števila  $x$ , za katera je rang matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & x \end{bmatrix}$$

strogo manjši od 3.

3. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko  $T(3, -1, 2)$  in je vzporedna z ravnino  $2x - 3y + 5z = 0$ .

4. Izmed vektorjev  $[x \ y \ z]^T$ , ki rešijo sistem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4 \\ 3x - 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

poišči tistega, ki je pravokoten na vektor  $[2 \ 0 \ -3]^T$ .

5. Določi definicijsko območje funkcije  $f(x) = \sqrt{2 + \ln(x^2)}$ .

6. Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 - n^{-1})$ .

7. Določi, za katere  $x$  konvergira vrsta  $\sum_{n=3}^{\infty} e^{nx}$ , in izračunaj njeno vrednost.

8. Za katere  $a \in \mathbb{R}$  je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & ; x < 0 \\ |x - a| & ; x \geq 0 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi?

1. Poišči lokalne ekstreme funkcije  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .
2. Zapiši Taylorjevo vrsto za funkcijo  $f(x) = 3 \sin(x + 1)$ , razvito okoli točke  $a = -1$ , do vključno 4. potence.
3. Izračunaj ploščino lika med krivuljami  $y = 1$ ,  $y = -x^2 + 1$  in  $y = \ln x$ .
4. Izračunaj nepravi integral  $\int_0^{\infty} e^{-x^5} dx$ .  
(Namig: Substitucija, gama funkcija.)
5. Izračunaj  $\int \vec{r}(t) dt$ , kjer je  $\vec{r}(t) = [3, t, \sin(5t)]^T$ .
6. Po **metodi trapezov** izračunaj  $\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 7} dx$ . Integracijski interval razdeli na 5 delov.
7. Nariši krivuljo z enačbo v polarnem zapisu  $\rho = 1 + \cos(2\varphi)$ .
8. Izračunaj totalni diferencial funkcije  $f(x, y) = (x^2 + 1)^y$ .

1. Poišči območje konveksnosti funkcije  $f(x) = x^4 - 8x + 16$ .
2. Zapiši Taylorjevo vrsto za funkcijo  $f(x) = 2 \exp(2x - 2)$ , razvito okoli točke  $a = 1$ , do vključno 4. potence.
3. Poišči število  $a$ , za katerega bo ploščina med funkcijo  $y = -x^2 + a$  in osjo  $x$  enaka  $4/3$ .
4. Izračunaj  $\int_0^1 e^{-2x^2} dx$ .  
(Namig: Gaussov verjetnostni integral.)
5. Izračunaj  $\frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ , kjer je  $\vec{r}(t) = \left[ 2^t, \frac{x}{x^2 + 2}, \sin(5x) \right]^T$ .
6. Po **metodi trapezov** izračunaj  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$ . Integracijski interval razdeli na 5 delov.
7. Nariši krivuljo s parametrično podanima enačbama  $x = t^2 + t$  in  $y = t^3 + t$ .
8. Zapiši enačbo tangentne ravnine z dotikališčem  $D(1, 2, z)$  za funkcijo  $z(x, y) = y^x$ .

1. Poišči stacionarne točke funkcije  $f(x, y) = (x + y)e^{-2xy}$ .
2. Poišči krivuljo oblike  $y = \frac{1}{ax + b}$ , ki se ob ustrezni linearizaciji po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega podatkom:

$x$	1	2	2
$y$	10	5	4

3. Poišči rešitev diferencialne enačbe:

$$y' = xy^2,$$

ki ustreza začetnemu pogoju  $y(0) = 4$ .

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

5. Iz kupa standardnih 32 kart hkrati na slepo izvlečemo tri karte. Kolikšna je verjetnost, da bo med njimi pikova dama, ne pa tudi pikov kralj?
6. V letniku je 100 študentov, vsak pride na kolokvij z verjetnostjo 0,7. Privzamemo, da so odločitve študentov o pisanju kolokvija med seboj neodvisne. Kolikšna je verjetnost, da pride na kolokvij več kot 75 študentov?
7. Slučajna spremenljivka  $X$  je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0,2 & 0,7 & ? \end{pmatrix}$$

Dopolni tabelo ter izračunaj še  $E(X)$  in  $\text{var}(X)$ .

8. Slučajna spremenljivka  $X$  je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$g(x) = \begin{cases} x + cx^2 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunaj konstanto  $c$  in še  $P(X < 1)$ .



1. Poišči stacionarne točke funkcije  $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - y e^y$ .
2. Poišči linearno funkcijo, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega podatkom:

$x$	1	3	4	4
$y$	12	7	5	6

3. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$xy' + y = x^2,$$

ki ustreza začetnemu pogoju  $y(1) = 0$ .

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$(y')^2 = y''.$$

5. Iz posode, v kateri je 5 belih in 10 rdečih kroglic, hkrati na slepo izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da bo med njima vsaj ena bela?
6. Izmed 350 študentov vsak naredi izpit z verjetnostjo 0,8, neodvisno od drugih študentov. Kolikšna je verjetnost, da na izpitu pade največ 60 študentov?
7. Slučajna spremenljivka  $X$  je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$X \sim \begin{pmatrix} ? & 3 \\ 1/3 & ? \end{pmatrix}$$

Dopolni tabelo, tako da bo  $E(X) = 2$ , in izračunaj še  $\text{var}(X)$ .

8. Slučajna spremenljivka  $X$  je porazdeljena zvezno z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} c e^{-3x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Določi  $c$  in  $P(-2 < X < 4)$ .

1. Izberi normalo ravnine  $x + 2y + 2z = 1$  ter izračunaj kot med to normalo in vektorjem  $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2. Določi  $a$  tako, da bo determinanta  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}$  enaka nič.

3. Ali so vektorji  $[-3, 2, 5]^T$ ,  $[4, -1, -1]^T$  in  $[0, 6, 3]^T$  linearno neodvisni?

4. Reši sistem:

$$2x - 3y + z = 2,$$

$$3x - 5y + 5z = 3,$$

$$5x - 8y + 6z = 5.$$

5. Za  $f(x) = \sin x$  ter  $g(x) = \sqrt{x}$  zapiši funkciji  $g \circ f$  in  $f \circ g$  ter določi njuni definicijski območji.

6. Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{(n+2)(3n+5)}}{\sqrt{7n-20}}.$$

7. Določi, za katera realna števila  $x$  vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n+1}$  konvergira, in izračunaj vrednost te vrste.

8. Določi  $a$  tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 ax}{x^2} & ; x > 0 \\ 4 - x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

povsod zvezna.

1. Za kakšne vrednosti parametra  $\lambda$  sta vektorja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda - 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

pravokotna?

2. Določi  $b$  tako, da bo determinanta  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix}$  enaka nič.

3. Dana sta vektorja

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj rang matrike  $\mathbf{ab}^\top - \mathbf{ba}^\top$ .

4. Reši sistem:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 0, \\ x + y + z &= 0, \\ x + 2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

5. Za  $f(x) = \cos x$  ter  $g(x) = \ln x$  zapiši funkciji  $g \circ f$  in  $f \circ g$  ter določi njuni definicijski območji.

6. Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{(2n+1)(n+4)}}{\sqrt{5n-11}}.$$

7. Določi, za katera realna števila  $x$  vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}$  konvergira, in izračunaj vrednost te vrste.

8. Določi  $b$  tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 bx}{x^2} & ; x < 0 \\ x + 9 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

povsod zvezna.

Kolokvij iz matematike 9. 6. 2006

Biotehnologija, mikrobiologija, gozdarstvo, živilstvo – univerzitetni študiji

1. Izračunaj rang matrike  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ .

2. Izračunaj:  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ .

3. Napiši prve štiri člene (do vključno členu z  $x^3$ ) Taylorjeve vrste funkcije  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , razvite okoli točke 0.

4. Izračunaj volumen vrtenine, ki nastane z rotacijo krivulje  $y = \sqrt{1-x^4}$  okoli abscisne osi. Namig: nariši vsaj približno skico.

5. Določi globalna ekstrema funkcije  $z = f(x, y) = x + 2y + 3$  na pravokotniku  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Namig: pomaga, če si skušaš predstavljati graf, torej vsaj približno ploskev.

6. Poišči kvadratično funkcijo  $y = Ax^2$ , ki se po principu najmanjših kvadratov najbolj prilaga podatkom:

$x$	1	2	2	2
$y$	1·2	4·9	4·9	5·1

Namig: napiši vsoto kvadratov odklonov in poišči njen minimum.

7. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe  $y'' - y = 0$ .

8. Zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka  $X$  ima porazdelitveno funkcijo:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

Določi njeno gostoto verjetnosti.