

KOLOKVIJI IN IZPITI IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

Zbral: Martin Raič

2008/09

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
28. november 2008

A

1. S popolno indukcijo dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}.$$

2. Dano je zaporedje:

$$a_n = \ln(3n - 2) - \ln(2n + 1).$$

- Določite, ali je zaporedje naraščajoče oziroma padajoče.
- Dokažite, da je zaporedje konvergentno, in izračunajte njegovo limito.
- Določite, od kod naprej se členi od limite razlikujejo za manj kot $\varepsilon = \ln(3/2)$.

3. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

4. Določite tangento na krivuljo:

$$(x^3 - 2x^2)y^3 + 2y + 6 = 0$$

v točki $T(2, y)$.

5. Dana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 & ; x \leq -1 \\ c \operatorname{arctg} x & ; x > -1 \end{cases}.$$

- Določite konstanto c , tako da bo funkcija zvezna na vsej realni osi.
- Narišite graf funkcije in določite njeno zalogo vrednosti.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
28. november 2008

B

1. S popolno indukcijo dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n - 1)(2n + 1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}.$$

2. Dano je zaporedje:

$$a_n = \ln(n + 3) - \ln(2n - 1).$$

- Določite, ali je zaporedje naraščajoče oziroma padajoče.
- Dokažite, da je zaporedje konvergentno, in izračunajte njegovo limito.
- Določite, od kod naprej se členi od limite razlikujejo za manj kot $\varepsilon = \ln 2$.

3. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n x^n}{(2n)!}.$$

4. Določite tangento na krivuljo:

$$(x^3 + 2x^2)y^3 + 2y - 6 = 0$$

v točki $T(-2, y)$.

5. Dana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} c \operatorname{arctg} x & ; x \leq 1 \\ -\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 & ; x > 1 \end{cases}.$$

- Določite konstanto c , tako da bo funkcija zvezna na vsej realni osi.
- Narišite graf funkcije in določite njeno zalogo vrednosti.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
9. december 2008

C

1. S popolno indukcijo dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost:

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^n n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

2. Dano je zaporedje:

$$a_n = \ln(2^{n+1} - 1) - n \ln 2.$$

- Določite, ali je zaporedje naraščajoče oziroma padajoče.
- Dokažite, da je zaporedje konvergentno, in izračunajte njegovo limito.
- Določite, od kod naprej se členi od limite razlikujejo za manj kot $\varepsilon = \ln 1.1$.

3. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^{n^2}}.$$

4. Določite tangento na krivuljo:

$$(x^3 - 2x^2 - 3x)y^4 + y + 1 = 0$$

v točki $T(3, y)$.

5. Dana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + c & ; x \leq -1 \\ \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 & ; x > -1 \end{cases}.$$

- Določite konstanto c , tako da bo funkcija zvezna na vsej realni osi.
- Narišite graf funkcije in določite njeno zalogo vrednosti.

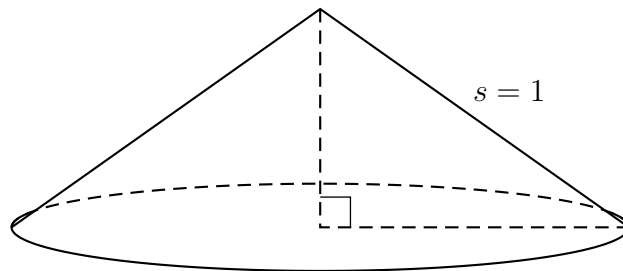
1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

23. januar 2009

A

1. Zapišite tretji Taylorjev polinom za $f(x) = \ln x$ okoli 1 in z njegovo pomočjo ocenite $\ln(0.9)$.
2. Cipresna vejica, najdena v grobu v Egiptu, vsebuje le še 55% ogljikovega izotopa ^{14}C v primerjavi s količino ogljikovega izotopa v danes živečih drevesih. Koliko je star grob, če je razpolovna doba ^{14}C 5600 let?
3. Kateri pokončni stožec s stranico s dolžine 1 ima največji volumen? Določite polmer osnovne ploskve in višino tega stožca.



4. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejuje krivulja v polarnih koordinatah po predpisu:

$$r = \sin(4\varphi).$$

5. Dana je funkcija:

$$f(x, y) = e^{-x}(x - y^2).$$

- a) Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije f .
- b) Določite največjo vrednost funkcije f na trikotniku z oglišči $(0, -1)$, $(6, -1)$ in $(0, 5)$.
- c) Skicirajte nekaj nivojnic ploskve $z = f(x, y)$.

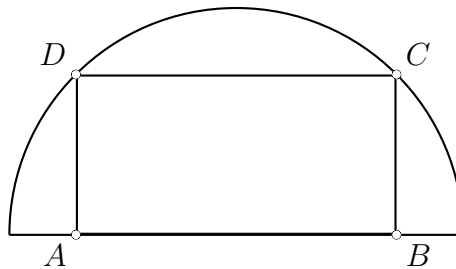
1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

23. januar 2009

B

1. Zapišite drugi Taylorjev polinom za $f(x) = \sqrt{x}$ okoli 1 in z njegovo pomočjo ocenite $\sqrt{1.1}$.
2. Cipresna vejica, najdena v grobu v Egiptu, vsebuje le še 55% ogljikovega izotopa ^{14}C v primerjavi s količino ogljikovega izotopa v danes živečih drevesih. Koliko je star grob, če je razpolovna doba ^{14}C 5600 let?
3. V polkrog z radijem 1 včrtamo pravokotnik $ABCD$ na tak način, da oglišči A in B ležita na premeru, oglišči C in D pa na loku polkroga. Kakšni naj bosta stranici $a = AB$ in $b = BC$, da bo ploščina pravokotnika maksimalna?



4. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejuje krivulja v polarnih koordinatah po predpisu:

$$r = -\sin(4\varphi).$$

5. Dana je funkcija:

$$f(x, y) = (y^4 - x)e^{-x}.$$

- a) Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije f .
- b) Določite najmanjšo vrednost funkcije f na kvadratu z oglišči $(0, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$ in $(0, 1)$.
- c) Skicirajte nekaj nivojnic ploskve $z = f(x, y)$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
18. februar 2009

1. Narišite graf funkcije:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

ter poiščite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, asimptote, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme.

2. V termovko nalijemo čaj s temperaturo 70°C . Po eni uri je temperatura čaja 60°C . Kolikšna bo temperatura po treh urah, odkar smo nalili čaj, če je temperatura v prostoru 20°C ?
3. Poiščite ekstrem funkcije $f(x, y) = \sin x \sin y$ pri pogojih $x + y = \pi$ in $x > 0, y > 0$.
4. Logaritmična spirala ima v polarnih koordinatah enačbo $r = e^{-3\varphi}$. Izračunajte ločno dolžino te krivulje med kotoma $\varphi = 0$ in $\varphi = \infty$.
5. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{nx}}{n + \sqrt{n}}.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
18. februar 2009

1. Pokažite, da je število $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deljivo s številom 133 za vsako naravno število n .

2. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$4yy' - x^2yy' + 4y^2 + 4 = 0,$$

ki zadošča pogoju $y(0) = -1$.

3. Določite lokalne ekstreme ter območja naraščanja in padanja funkcije:

$$f(x) = e^{4-x^2} + x^2.$$

S pomočjo dobljenega narišite njen graf.

4. Poiščite vsa stekališča zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, kjer je:

$$a_n = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}.$$

Odgovor ustrezno utemeljite.

Namig: izraz najprej ustrezno poenostavite.

5. Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcije:

$$f(x, y) = e^{x^2} - (x - y)^2.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
20. maj 2009

1. Zapišite drugi Taylorjev polinom funkcije:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{okoli točke } x_0 = 25.$$

S pomočjo tega približno izračunajte $\sqrt{24}$.

2. Narišite grafa funkcij $f(x) = \ln(1 + e^x)$ in $g(x) = \cos x$. Od tod sklepajte, da ima enačba:

$$\ln(1 + e^x) = \cos x$$

neskončno mnogo negativnih rešitev.

3. Skicirajte nekaj nivojnic ravnine $\pi: z = x + y$. Poiščite točko na ravnini π , ki je najmanj oddaljena od točke $A(2, 2, 2)$.

Namig: razdalja med točkama $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$ v \mathbb{R}^3 je $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

4. Rešite diferencialno enačbo:

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y); \quad y(0) = 2.$$

Ali je dobljena rešitev definirana za vsak x ?

Kateri vrednosti se bliža $y(x)$, ko gre $x \rightarrow \infty$?

5. Izračunajte ločno dolžino krivulje $y = \ln(1 - x^2)$ od $x_1 = 0$ do $x_2 = 1/2$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
27. avgust 2009

1. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4n-3}.$$

2. Narišite graf funkcije:

$$f(x) = (x^2 - x - 1)e^x + 2$$

in locirajte njene ničle med dve zaporedni celi števili.

3. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo, če krivuljo:

$$y = \frac{x^{3/2}}{x^2 + 1}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

zavrtimo okoli osi x .

4. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = 2y + \frac{1}{x+y} + e^{x-y}.$$

5. Kolesar se na začetku merjenja giblje s hitrostjo 20 km/h, čez pet sekund pa je njegova hitrost le še 15 km/h. Kolikšna bo njegova hitrost deset sekund po začetku merjenja, če privzamemo, da je njegov pojemek (nasprotna vrednost odvoda hitrosti po času) sorazmeren s kvadratom hitrosti?

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija - univerzitetni študij

17. september 2009

1. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n(x)}{n}.$$

2. Določite lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter asimptote funkcije

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

S pomočjo dobljenega narišite njen graf.

3. Poiščite tisto rešitev linearne diferencialne enačbe

$$\cos(x) y' - \sin(x) y = \cos(2x),$$

ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

4. Pokažite, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(e^{-x\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-n} \right) = \frac{x^2}{2}.$$

5. Poiščite vse lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4.$$

2007/08

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

16. januar 2008

A

1. S popolno indukcijo dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \dots + n \cdot 4^n > \frac{(3n-1)4^{n+1}}{9}.$$

2. Rešite neenačbo:

$$x|x+5| < 6.$$

Množico rešitev zapišite kot interval ali unijo intervalov.

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 3n + 2}), \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n + 5} \right)^{2^n}.$$

4. Določite, za katere $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{x^n(n^3 + n)}.$$

5. Določite, za katere $a \in \mathbb{R}$ je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + a^2 x^2)}{x^2} & ; x > 0 \\ 4 \cos x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

16. januar 2008

B

1. S popolno indukcijo dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n > \frac{(2n-1)3^{n+1}}{4}.$$

2. Rešite neenačbo:

$$x|x-5| < 6.$$

Množico rešitev zapišite kot interval ali unijo intervalov.

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - n), \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n - 2}{3^n + 4} \right)^{3^n}.$$

4. Določite, za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{\sqrt{n} - 1}.$$

5. Določite, za katere $a \in \mathbb{R}$ je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + a^2 x^2)}{x^2} & ; x > 0 \\ 9 \cos x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

5. april 2008

A

1. Poiščite vse vrednosti parametra a , pri katerih se krivulji:

$$y_1 = ax e^{2x} \quad \text{in} \quad y_2 = 6ax e^{2x}$$

sekata pod kotom 45° .

2. Na zidu visi reklamni plakat, visok 16 metrov. Spodnji rob plakata je 2 metra nad višino naših oči. Kako daleč od zidu moramo stati, da bomo plakat videli pod največjim kotom?

3. Narišite graf funkcije:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$$

ter določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, intervale naraščanja in padanja in ekstreme.

4. Izračunajte limito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6+x^2)\sin x - 6x}{x^5}.$$

5. Izračunajte nedoločena integrala:

$$\text{a) } \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{(x+1)^2}, \quad \text{b) } \int \frac{x^2+x+1}{x^2+3} dx.$$

Namig: Pri prvem integralu vzemite izraz pod korenem za novo spremenljivko.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

5. april 2008

B

1. Poiščite vse vrednosti parametra a , pri katerih se krivulji:

$$y_1 = ax e^{-x} \quad \text{in} \quad y_2 = 6ax e^{-x}$$

sekata pod kotom 45° .

2. Na zidu visi reklamni plakat, visok 12 metrov. Spodnji rob plakata je 4 metre nad višino naših oči. Kako daleč od zidu moramo stati, da bomo plakat videli pod največjim kotom?

3. Narišite graf funkcije:

$$f(x) = (1 + x^2) \ln(1 + x^2) - 2x^2$$

ter določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja in ekstreme.

4. Izračunajte limito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x^2) \cos(2x) - 1}{x^4}.$$

5. Izračunajte nedoločena integrala:

$$\text{a) } \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^2}, \quad \text{b) } \int \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} dx.$$

Namig: Pri prvem integralu vzemite izraz pod korenem za novo spremenljivko.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

24. maj 2008

A

1. Izračunajte ločno dolžino krivulje, podane parametrično:

$$x = 4e^t, \quad y = 2t - e^{2t}; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2. Izračunajte volumen vrtenine, ki jo dobimo, če okoli osi x zavrtimo lik, ki ga omejujeta krivulji:

$$y = \frac{2}{\pi}x \quad \text{in} \quad y = \sin x; \quad x \geq 0.$$

Namig: narišite!

3. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$f(x, y) = y^2 - x^2y + 9y$$

na območju, določenem s pogojem $0 \leq y \leq 9 - x^2$.

4. Steklenico limonade, ki ima na začetku temperaturo 10°C , damo v sobo s temperaturo 30°C . Čez eno uro ima limonada temperaturo 20°C . Kolikšna bo njena temperatura čez dve uri? Privzamemo, da je temperatura limonade v danem trenutku po vsej steklenici enaka in da je toplotni tok sorazmeren z razliko temperatur.
5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 2y' - 3y = e^x.$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

24. maj 2008

B

1. Izračunajte ločno dolžino krivulje, podane parametrično:

$$x = 4e^{-t/2}, \quad y = t + e^{-t}; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2. Izračunajte volumen vrtenine, ki jo dobimo, če okoli osi x zavrtimo lik, ki ga omejujeta krivulji:

$$y = x \quad \text{in} \quad y = \sin \frac{\pi x}{2}; \quad x \geq 0.$$

Namig: narišite!

3. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$f(x, y) = x^2y - y^2 + y$$

na območju, določenem s pogojem $0 \leq y \leq 1 - x^2$.

4. Steklenico limonade, ki ima na začetku temperaturo 0°C , damo v sobo s temperaturo 25°C . Čez eno uro ima limonada temperaturo 15°C . Kolikšna bo njena temperatura čez dve uri? Privzamemo, da je temperatura limonade v danem trenutku po vsej steklenici enaka in da je toplotni tok sorazmeren z razliko temperatur.
5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' - y' + 2y = e^{-x}.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

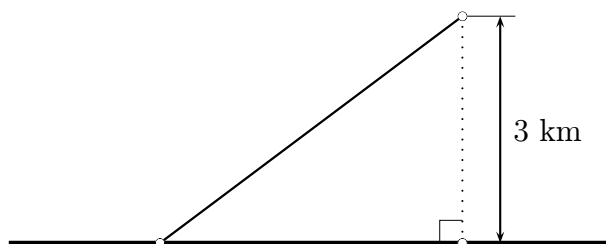
Farmacija – univerzitetni študij
9. junij 2008

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + n^2} - \sqrt{n^3 + n}}{\sqrt{2n + 1} - \sqrt{n + 1}},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1 + x) - x}.$

2. Novo naselje leži 3 km od povsem ravne hitre ceste, ki teče v smeri zahod–vzhod in po kateri je dovoljeno voziti 100 km/h. Naselje bi želeli priključiti na avtocesto, in sicer z ravno lokalno cesto, po kateri je dovoljeno voziti 80 km/h. Kje naj bo priključek, če naj bo poraba časa za vožnjo iz naselja po avtocesti proti zahodu minimalna? Privzamemo, da ves čas vozimo z največjo dovoljeno hitrostjo.



3. Dana je funkcija:

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{x^2 - 12}.$$

Določite definijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, obnašanje na robu definijskega območja, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme. Narišite graf.

4. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$f(x, y) = (x^2 - x^3)(x - y)$$

na območju, ki ga določa pogoj $x^2 \leq y \leq x$.

5. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

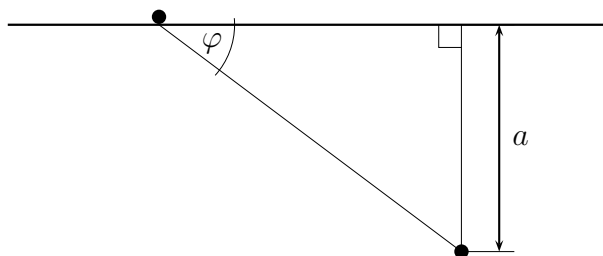
$$y' + xy = (x + 1)e^x,$$

ki zadošča začetnemu pogoju $y(-2) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
23. junij 2008

1. Dokažite, da je število $4^n + 9^{n+1}$ deljivo s 5 za vsak $n \in \mathbb{N}$.
2. V globini a pod vodoravno podlago je točkast naboj, na podlagi pa majhna nabita kroglica. Določite, kje je vodoravna komponenta električne sile na kroglico največja. Upoštevajte, da je električna sila obratno sorazmerna s kvadratom razdalje.



Namig: Vodoravno komponento električne sile izrazite s kotom φ .

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 8x} - x^2.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme. Narišite graf.

4. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo, če krivuljo:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

zavrtimo okoli osi x .

5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + y' = x + e^x.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

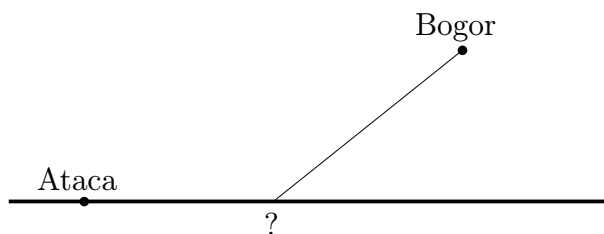
Farmacija – univerzitetni študij
1. september 2008

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4^n + 1} - \sqrt{2^{2n} + 2^{n-1}} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\sin^2 3x}$

2. Iz mesta Ataca vodi asfaltirana cesta proti vzhodu. 10km vzhodno in 3km severno od Atace je mesto Bogor, kamor se s terenskim vozilom odpravljate na zaslužen oddih. Poraba goriva na cesti je 3 l (na 100 km) in na brezpotju 5 l. Kje morate zaviti s ceste, da bo poraba goriva minimalna?



3. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo, če krivuljo:

$$y = x \ln x; \quad -0 < x \leq 1$$

zavrtimo okoli osi x .

4. Poiščite stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = (x^2 - 3y^2)e^x$$

in jih klasificirajte.

5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 2y' - 3y = 3x + 1 - e^x.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
15. september 2008

1. Poiščite vsa realna števila x , za katera je

$$|1 - x^2| - |x + 1| > 0.$$

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x - 1}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, ekstreme ter intervale naraščanja in padanja. Natančno narišite graf!

3. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo, če okoli osi x zavrtimo krivuljo

$$y = 1 + \sin x$$

med dvema zaporednima ničloma.

4. Dana je funkcija

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) + 2x.$$

- a) Določite definicijsko območje in ga narišite.
- b) Poiščite stacionarne točke in jih klasificirajte.

5. Neke radioaktivne snovi je v 100 letih razpadlo 75%. Določite, koliko jo je razpadlo v danem času t in koliko je razpolovna doba te snovi.

2006/07

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

17. januar 2007

A

1. Rešite neenačbo:

$$\frac{x - |x + 2|}{x + |x + 2|} \leq 2.$$

Množico rešitev zapišite kot interval ali unijo intervalov.

2. Določite funkcijo $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, če veste, da za vsak $y \in (-\infty, -1]$ velja:

$$f(y^2 + 2y) = y + 1.$$

3. Zaporedje je podano z rekurzivno formulo:

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 6$$

Dokažite, da je zaporedje naraščajoče in navzgor neomejeno.

Namig: kaj bi moralo veljati, če bi bilo zaporedje navzgor omejeno?

4. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4^n + 2^{n-1}} - 2^n), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(5\pi x)}{\sin(2\pi x)}.$$

5. Določite, za katere $a > 0$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + a^{-n}}.$$

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

17. januar 2007

B

1. Rešite neenačbo:

$$\frac{x + |x - 2|}{x - |x - 2|} \leq 2.$$

Množico rešitev zapišite kot interval ali unijo intervalov.

2. Določite funkcijo $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, če veste, da za vsak $y \in (-\infty, 1]$ velja:

$$f(y^2 - 2y) = 1 - y.$$

3. Zaporedje je podano z rekurzivno formulo:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$$

Dokažite, da je padajoče z limito 0.

4. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - \sqrt{9^n - 3^{n-1}}), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(2\pi x)}{\sin(3\pi x)}.$$

5. Določite, za katere $a > 0$ konvergira vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + 1}.$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
30. marec 2007

A

1. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{(e^{2x} - 1)(1 - x) - ax}{\sin(2x) - 2 \sin x}.$$

Določite parameter a , tako da bo imela funkcija limito, ko gre x proti 0. Limito tudi izračunajte.

2. Dani sta krivulji:

$$y_1 = a - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} x \quad \text{in} \quad y_2 = \cos \sqrt{x}.$$

Določite parameter a , tako da se bosta krivulji sekali pri $x = \pi^2/9$, in izračunajte še kot, pod katerim se sekata.

3. Dana je krivulja:

$$y = 2 - x^2.$$

Izračunajte njeno oddaljenost od izhodišča, t. j. najmanjšo možno razdaljo med izhodiščem in posamezno točko na krivulji.

Namig: oddaljenost točke $T(x, y)$ od izhodišča je enaka $\sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(2x) + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

ter določite še definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme.

Namig: pri risanju upoštevajte $\operatorname{arctg} \sqrt{2} \doteq 0{,}96$.

5. Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \ln(2x^2 - x)$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 1$ in izračunajte še $f^{(6)}(1)$.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
30. marec 2007

B

1. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{(e^{-x} - 1)(2 + x) - bx}{x(\cos x - 1)}.$$

Določite parameter b , tako da bo imela funkcija limito, ko gre x proti 0. Limito tudi izračunajte.

2. Dani sta krivulji:

$$y_1 = \frac{3}{4\pi}x + b \quad \text{in} \quad y_2 = \sin \sqrt{x}.$$

Določite parameter b , tako da se bosta krivulji sekali pri $x = \pi^2/9$, in izračunajte še kot, pod katerim se sekata.

3. Dana je krivulja:

$$y = 1 - 2x^2.$$

Izračunajte njeno oddaljenost od izhodišča, t. j. najmanjšo možno razdaljo med izhodiščem in posamezno točko na krivulji.

Namig: oddaljenost točke $T(x, y)$ od izhodišča je enaka $\sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$$

ter določite še definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme.

Namig: pri risanju upoštevajte $\operatorname{arctg} \sqrt{2} \doteq 0.96$.

5. Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \ln(3x^2 - 2x)$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 1$ in izračunajte še $f^{(5)}(1)$.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

25. maj 2007

A

1. Izračunajte ločno dolžino krivulje:

$$y = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}); \quad 2 \leq x \leq 3.$$

2. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejuje krivulja, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo:

$$r = |\varphi| e^{2|\varphi|}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

3. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 3)e^{-x/2}.$$

4. V kri enakomerno dovajamo neko zdravilo (a miligramov na uro). Izločanje zdravila iz krvi je premosorazmerno s količino zdravila v krvi, in sicer velja, da se pri 100 mg zdravila v krvi na uro izloči 20 mg zdravila. Na začetku v krvi ni zdravila.

- a) Kako hitro moramo dovajati zdravilo (koliko mora biti a), če želimo doseči, da se bo količina zdravila v krvi ustalila pri 200 mg (t. j. da bo limitna količina, ko gre čas čez vse meje, enaka 200 mg)?
- b) Po kolikšnem času količina zdravila doseže 100 mg?

5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' - 3y' - 4y = \cos(3x).$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

25. maj 2007

B

1. Izračunajte ločno dolžino krivulje:

$$y = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-2}) ; \quad 3 \leq x \leq 4 .$$

2. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejuje krivulja, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo:

$$r = |\varphi| e^{-|\varphi|} ; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

3. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 5)e^{-y/2} .$$

4. V kri enakomerno dovajamo neko zdravilo (a miligramov na uro). Izločanje zdravila iz krvi je premosorazmerno s količino zdravila v krvi, in sicer velja, da se pri 100 mg zdravila v krvi na uro izloči 30 mg zdravila. Na začetku v krvi ni zdravila.

- a) Kako hitro moramo dovajati zdravilo (koliko mora biti a), če želimo doseči, da se bo količina zdravila v krvi ustalila pri 300 mg (t. j. da bo limitna količina, ko gre čas čez vse meje, enaka 300 mg)?
- b) Po kolikšnem času količina zdravila doseže 250 mg?

5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + y' - 6y = \sin(2x) .$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

11. junij 2007

1. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \ln(1+x)}{e^{x^2} - 1}$.

2. Dana je funkcija:

$$f(x) = \sin \frac{2\pi x}{1+x^2}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter narišite graf.

3. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če okoli osi x zavrtimo krivuljo:

$$y = \sqrt{x} \sin x; \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

4. Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcije:

$$f(x, y) = 2 \ln(3 + x^2 + 3y^2) - x - 3y^2.$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$(4 + x^2)y' + xy = 2x,$$

za katero je $y(0) = 1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
22. junij 2007

1. Dokažite, da je število:

$$2 \cdot 13^n + 3^{n+1} - 5$$

deljivo z 10 za vsak $n \in \mathbb{N}$.

2. Izračunajte:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n} \right)^{2-3n}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - \cos(2x)}.$$

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \ln x + \ln(x + 2) - \frac{3}{x} - x.$$

- Določite njeno definicijsko območje ter raziščite, kje je konveksna in kje konkavna.
- Določite, koliko ekstremov ima funkcija in kakšne. Vsak ekstrem locirajte med dve zaporedni celi števili (pomagajte si s prvim odvodom).
- Skicirajte graf funkcije.

4. Izračunajte ločno dolžino krivulje, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo:

$$r = \varphi^4 \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 2y' = e^{-x},$$

za katero je $y(0) = 0$ in $y'(0) = -3$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
3. september 2007

1. Rešite neenačbo:

$$(x + 2)|x - 1| - (x - 2)|x + 1| < 4.$$

2. Določite parameter a , pri katerem limita:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{\ln x + a(x - 1)}$$

ni enaka nič. Za dobljeno vrednost parametra a limito tudi izračunajte.

3. Narišite graf funkcije:

$$f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} + x^2}$$

ter poiščite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, asimptote, intervale naraščanja in padanja, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje.

4. Izračunajte površino vrtenine, ki jo dobimo, če okoli osi x zavrtimo krivuljo:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad -1 \leq x \leq 1.$$

5. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = \frac{2}{y - x} + \frac{4}{3x} - \frac{1}{3y} + x - y.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
3. september 2007

1. Podano je rekurzivno zaporedje:

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}, \quad a_1 = 2.$$

Pokažite, da je konvergentno, in izračunajte njegovo limito.

2. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{(x + 1)^2}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme. Narišite še graf.

3. Izračunajte površino vrtenine, ki jo dobimo, če okoli osi x zavrtimo pozitivni del krivulje

$$y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}.$$

4. Dana je funkcija:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y) - 3y + y^2.$$

a) Določite njene definicijsko območje in ga narišite.

b) Poiščite stacionarne točke in jih klasificirajte.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 4y' + 4y = x,$$

za katero je $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
24. januar 2008

1. Poiščite vsa realna števila x , za katera je

$$|x^2 - 6x + 8| \geq 1.$$

2. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, obnašanje na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje. Narišite graf.

3. Izračunajte prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če okoli osi x zavrtimo krivuljo

$$y = xe^{x-1}$$

na intervalu $x \in [0, 1]$.

4. Poiščite stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = x + \frac{1}{xy} + y + 1$$

in jih klasificirajte.

5. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 6y' + 9y = 18,$$

za katero je $y(0) = 2$ in $y'(0) = 1$.

2005/06

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
2. februar 2006

A

1. S popolno indukcijo pokažite, da za vsako naravno število n velja:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Rešite neenačbo:

$$|x^2 - x| + 3 > 3|x|.$$

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}), \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{2n + 3} \right)^n.$$

4. a) Seštejte vrsto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} + 5^n}{2^{3n}}.$$

b) Ugotovite, ali vrsta konvergira ali divergira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{4 \cdot 2^{n+1}}.$$

5. Dana je funkcija:

$$f(x) = \ln(x(x^2 - 3x + 2)).$$

Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti ter narišite njen graf.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
2. februar 2006

B

1. S popolno indukcijo pokažite, da za vsako naravno število n velja:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Rešite neenačbo:

$$|x^2 - x| + 2 > 2|x|.$$

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3n}) \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 1}{3n + 2} \right)^n.$$

4. a) Seštejte vrsto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 5^n}{3^{2n}}.$$

b) Ugotovite, ali vrsta konvergira ali divergira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{5 \cdot 3^{n-1}}.$$

5. Dana je funkcija:

$$f(x) = \ln(x(x^2 - 2x - 3)).$$

Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti ter narišite njen graf.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
2005/06

A

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x - 1) \ln x}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3x - a} - \sqrt{x + a}}{\sqrt{ax} - a}$.

2. Določite tako realno število a , da bo funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{1/(x+2)} & ; x < -2 \\ ax + 2 & ; x \geq -2 \end{cases}$$

zvezna. Ali je tudi odvedljiva?

3. Dan je pravokotni list papirja s stranicama $a = 8$ in $b = 15$. V vsakem vogalu izrežemo kvadrat enake velikosti. Nato sestavimo škatlo brez pokrova. Kakšna mora biti stranica izrezanih kvadratov, da bo prostornina škatle največja?

4. Čim natančneje narišite graf funkcije:

$$y = \frac{\ln x}{4x}.$$

5. Določite kot, pod katerim se sekata krivulji:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad y = \sqrt{\frac{3x}{4}}.$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
2005/06

B

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}x - e^{2x} + 1}{(e^x - 1)x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{\sqrt{4x + 2a} - \sqrt{12x - 2a}}{a - \sqrt{2ax}}$.

2. Določite tako realno število a , da bo funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & ; x \leq -1 \\ e^{-1/(x+1)} + 5 & ; x > -1 \end{cases}$$

zvezna. Ali je tudi odvedljiva?

3. Dan je pravokotni list papirja s stranicama $a = 21$ in $b = 5$. V vsakem vogalu izrežemo kvadrat enake velikosti. Nato sestavimo škatlo brez pokrova. Kakšna mora biti stranica izrezanih kvadratov, da bo prostornina škatle največja?

4. Čim natančneje narišite graf funkcije:

$$y = x|\ln x|.$$

5. Določite kot, pod katerim se sekata krivulji:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{in} \quad y = \sqrt{\frac{3x}{2}}.$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
2005/06

A

1. Razvijte funkcijo:

$$f(x) = e^{x(x^2+3x+3)} - \frac{4}{x(3x+4)}$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = -1$ in določite $f^{(9)}(-1)$.

2. Dane so krivulje:

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{(x-2)^2}{2} \quad \text{in} \quad y = 2.$$

- Narišite vse tri krivulje na skupnem grafu in označite srednji lik, ki ga omejujejo.
- Izračunajte ploščino tega lika.
- Izračunajte obseg tega lika.

3. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$$

na krogu $x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Ostanke lesenih vrat, ki so jih našli arheologi, sevajo 93% toliko kot svež kos lesa. Koliko so stara vrata, če vemo, da je razpolovni čas ogljika ^{14}C 5570 let? ($\ln 0.93 \doteq -0.07257$, $\ln 2 \doteq 0.693$)
5. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' - \frac{y}{1+x} = x^3 + 1,$$

ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
2005/06

B

1. Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \frac{x}{(x-5)(x-6)} + e^{x(x-8)}$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 4$ in izračunajte $f^{(10)}(4)$.

2. Dani sta krivulja $y = \frac{x^2}{2}$ in premica $y = \frac{x}{2} + 1$.

- Narišite obe krivulji na skupnem grafu in označite lik, ki ga omejujeta.
- Izračunajte ploščino tega lika.
- Izračunajte obseg tega lika.

3. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 2y$$

na krogu $x^2 + y^2 \leq 3$.

4. Ostanke kosa ladje, ki so jo našli arheologi, sevajo 87% toliko kot svež kos lesa. Koliko je stara ladja, če vemo, da je razpolovni čas ogljika ^{14}C 5570 let? ($\ln 0.87 \doteq -0.13926$, $\ln 2 \doteq 0.693$)
5. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' + \frac{y}{1+x} = x^2,$$

ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
5. junij 2006

1. Poiščite vsa realna števila x , za katera velja:

$$|x^2 - 4| \leq |x - 2|.$$

2. Dana je funkcija:

$$f(x) = \ln(x + 1) + \frac{2}{x + 1}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti ter narišite njen graf. Ali ima funkcija kakšno ničlo? Kako se funkcija obnaša na robovih definicijskega območja?

3. Na krivuljo:

$$y = \ln x + 1$$

postavite tangento v točki $T(1, y)$. Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepajo krivulja, tangenta in os x .

4. Poiščite stacionarne točke funkcije:

$$f(x, y) = e^{y/2}(x^2 + xy)$$

in jih klasificirajte.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 2y' - 3y = e^x + 3,$$

za katero je $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1/4$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
19. junij 2006

1. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^{\frac{n^2-1}{n+3}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x) - x}$$

2. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{2x-5}$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja in narišite njen graf.

3. Izračunajte dolžino krivulje:

$$x(t) = 2(t - \sin t), \quad y(t) = 2(1 - \cos t)$$

med točkama $A(0, 0)$ in $B(4\pi, 0)$.

4. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3$$

na območju $x^2 + y^2 \leq 20$.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$xy' - y = 2xy^2,$$

za katero je $y(1) = 1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
4. september 2006

1. Zaporedje je podano rekurzivno s prvim členom $x_1 = 2$ in formulo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

Pokažite, da je podzaporedje lihih členov padajoče in navzdol omejeno, podzaporedje sodih členov pa naraščajoče in navzgor omejeno. Izračunajte limiti obeh podzaporedij! Ali je zaporedje konvergentno?

2. Dana je funkcija:

$$y = (1 - x^2) e^{-x}.$$

Določite njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, območja naraščanja in padanja, ekstreme in prevoje ter narišite graf.

3. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, ko odsek krivulje $y = x \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ zavrtimo okoli premice $y = 0$.
4. Poiščite točko na paraboli $y = x^2 - x - 1$, ki je najbližje koordinatnemu izhodišču.
5. Poiščite tisto posebno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 4y = e^x + x + 2,$$

ki zadošča pogoja $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
18. september 2006

1. Izračunajte limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4}{n^2 + 5} \right)^{(n+1)^2 + 4},$$

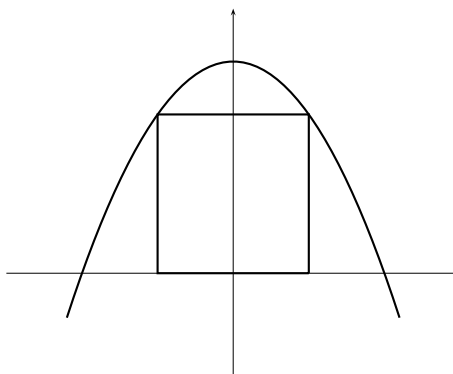
$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right).$$

2. Dana je funkcija:

$$y = \frac{e^{(x+2)/x}}{8x + 3}.$$

Določite njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, območja naraščanja in padanja, ekstreme ter narišite graf.

3. Med parabolo $y = 4 - x^2$ in abscisno os včrtamo pravokotnik, kot prikazuje skica.



Poiščite tistega izmed pravokotnikov, ki ima največji obseg.

4. Poiščite stacionarne točke funkcije:

$$f(x, y) = (x + y) e^{-x^2 - y^2}$$

in jih klasificirajte.

5. Poiščite tisto posebno rešitev diferencialne enačbe:

$$(2x + 1)y' - y = \frac{\sqrt{2x + 1}}{x},$$

ki zadošča pogoju $y(1) = -\sqrt{3} \ln 3$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
29. januar 2007

1. Izračunajte limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^n + 2^n}{4^n + 1} \right)^{2^{n-1}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x \cos x - x}.$$

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \ln(x+1)^2 x^2 + 1.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter narišite njen graf.

3. Dani sta krivulji $y = (\ln x)^2$ in $y = \ln x$. Določite njuni presečišči in izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji.

4. Poiščite stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = xy^2 + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$$

in jih klasificirajte.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$(1 + x^2)y' = xy + \sqrt{1 + x^2},$$

za katero je $y(0) = 2$.

2004/05

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

17. januar 2005

A

1. Rešite neenačbo:

$$||2x + 4| - x - 3| < 1.$$

2. Zaporedje zadošča enačbam $a_1 = 4$ in $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ za vsak $n \geq 1$. Dokažite, da je a_n konvergentno, in izračunajte njegovo limito.

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 2004}{n + 2005} \right)^{\frac{(2n+1)^2}{n}} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n+1} + 1}{2 \cdot 2^{2n} - 4^{2n}}.$$

4. a) Ugotovite, ali vrsta konvergira ali divergira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+2)}}.$$

b) Določite, za katere vrednosti parametra $a > 0$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a^n}{(n+1)3^n}$$

konvergentna.

5. Dana je funkcija:

$$f(x) = e^{\frac{\sqrt{x}}{x-2}}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti in asimptote funkcije f ter narišite njen graf.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
17. januar 2005

B

1. Rešite neenačbo:

$$||2x - 4| + x - 3| < 1.$$

2. Zaporedje zadošča enačbam $a_1 = 5$ in $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ za vsak $n \geq 1$. Dokažite, da je a_n konvergentno, in izračunajte njegovo limito.

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 2004}{n - 2005} \right)^{\frac{(2n-1)^2}{n}} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{4n+1} + 1}{3 \cdot 3^{2n} - 9^{2n}}.$$

4. a) Ugotovite, ali vrsta konvergira ali divergira:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(n-2)}}.$$

b) Določite, za katere vrednosti parametra $b > 0$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{(n+1)b^n}$$

konvergentna.

5. Dana je funkcija

$$f(x) = e^{\frac{\sqrt{x}}{3-x}}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti in asimptote funkcije f ter narišite njen graf.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

9. april 2005

A

1. Dana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x + 2) + \frac{2}{x + 5}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja in narišite njen graf. Pokažite, da funkcija nima ničel.

2. Napišite začetek razvoja funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{x^2 - 2x + 1} & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

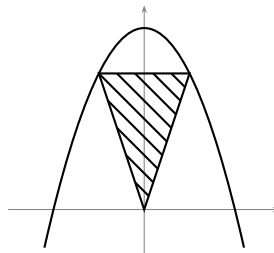
v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 1$ do vključno člena z $(x - 1)^3$.

3. Določite a , tako da boste za limito

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^x + e^{-2x+3} + a}{(\ln x)^2}$$

lahko uporabili L'Hôpitalovo pravilo, in jo nato izračunajte.

4. Med parabolo $y = 3 - 2x^2$ in os x včrtajte enakokrak trikotnik, tako kot kaže slika. Določite višino, tako da bo ploščina največja.



5. Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \cos x} dx.$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

9. april 2005

B

1. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{2}{4-x} - \operatorname{arctg}(x-1).$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja in narišite njen graf. Pokažite, da funkcija nima ničel.

2. Napišite začetek razvoja funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \pi x + 1}{x^2 + 2x + 1} & ; x \neq -1 \\ \frac{\pi^2}{2} & ; x = -1 \end{cases}$$

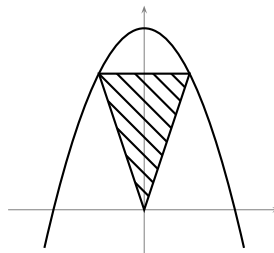
v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = -1$ do vključno člena $z (x+1)^3$.

3. Določite b , tako da boste za limito

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} + 2e^{-x+3} + b}{(\ln x)^2}$$

lahko uporabili L'Hôpitalovo pravilo, in jo nato izračunajte.

4. Med parabolo $y = 2 - 3x^2$ in os x včrtajte enakokrak trikotnik, tako kot kaže slika. Določite višino, tako da bo ploščina največja.



5. Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin x} dx.$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

28. maj 2005

A

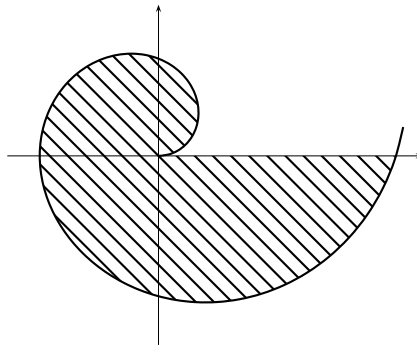
1. Izračunajte nepravi integral:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{x \, dx}{x^4 + 4}$$

2. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulja, podana v polarni obliki:

$$r = \varphi + \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

in poltrak $\varphi = 0$.



3. Izračunajte ločno dolžino krivulje:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

4. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije dveh spremenljivk:

$$f(x, y) = (3x + 2y^2) e^{-2x+2y}$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$(x - 1)y' + 3y = \frac{1}{(x - 1)^2}$$

za katero velja $y(2) = 1$.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

28. maj 2005

B

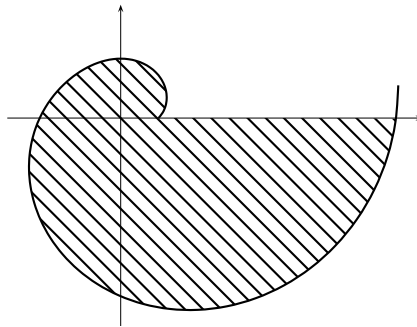
1. Izračunajte nepravi integral:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x \, dx}{x^4 + 9}$$

2. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulja, podana v polarni obliki:

$$r = \varphi + \cos \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

in poltrak $\varphi = 0$.



3. Izračunajte ločno dolžino krivulje:

$$y = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{8x}; \quad 1 \leq x \leq 2$$

4. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije dveh spremenljivk:

$$f(x, y) = (2x - y^2) e^{-3x+3y}$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$(x + 1)y' + 2y = \frac{1}{x + 1}$$

za katero velja $y(1) = 1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
13. junij 2005

1. Poiščite vsa realna števila x , za katera je

$$|x^2 - 1| + 2 > 2|x|.$$

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter narišite njen graf.

3. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji

$$y = (\ln x)^2 \quad \text{in} \quad y = \ln x$$

4. Naj bo

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x}$$

- a) Določite definicijsko območje in narišite nivojnice za $z = 1, 4, -4$.
b) Poiščite stacionarne točke in jih klasificirajte.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 2y' - 3y = 6x^2 - 2x - 4$$

za katero je $y(0) = -4$ in $y'(0) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
27. junij 2005

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi x}{1 - e^{x^2}}$

2. Dana je funkcija

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, ekstreme, prevoje, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti. Izračunajte še, pod kakšnim kotom se funkcija približuje osi x na robu definicijskega območja. Narišite njen graf!

3. Naj bo s predpisoma $x = \sqrt{1 + t}$ in $y = \sqrt{1 - t}$ podana krivulja.

- Določite vsa realna števila t , za katera je krivulja definirana.
- Izračunajte dolžino krivulje.

4. Naj bo

$$f(x, y) = \ln(x - y^2) - 2x^2.$$

- Določite definicijsko območje in ga narišite.
- Poiščite stacionarne točke in jih klasificirajte.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$(x^2 - 1)y' - xy = x^3,$$

za katero je $y(2) = 3$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
1. september 2005

1. [15%] Naj bo x pozitivno realno število. Z matematično indukcijo dokažite, da za vsako naravno število n velja neenakost

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2. [30%] Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{(x - 1)e^x}{(x + 1)^6}$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, vodoravne asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter narišite njen graf.

3. [15%] Razvijte funkcijo:

$$f(x) = (x^3 + 15x^2 + 75x + 125) \cdot \ln\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = -5$ in določite $f^{(10)}(-5)$.

4. [20%] Poiščite najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x, y) = xy$$

pri pogoju $x^2 + y^2 = 2a^2$.

5. [20%] Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$(x + 1)y' - (x + 2)y = 2(x + 1)^2 e^{-x}$$

za katero velja $y(0) = -1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

15. september 2005

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n + 2005} - \sqrt{n - 2004} \right) \left(\sqrt{n - 2002} - \sqrt{n - 2003} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x + 1}{2x - 1} \right)^{1/(x-2)}$

2. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2 + x - 1}$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter narišite njen graf.

3. Izračunajte ločno dolžino krivulje:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); \quad 1 \leq x \leq 3$$

4. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$xy' + 3y = \frac{1}{1 + x^2}$$

za katero velja $y(-1) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
23. januar 2006

1. Poiščite vsa realna števila x , za katera velja:

$$|x^2 - 1| + |x - 1| \leq 2.$$

2. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 2n}),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x \ln(1 + x)}.$

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter narišite njen graf.

4. Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepa krivulja:

$$y = (2x + 1) \sin x$$

z osjo x na intervalu $[0, \pi]$.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$xy' + y + xy = e^{-x},$$

za katero je $y(1) = 0$.

2003/04

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

17. januar 2004

1. Zaporedje zadošča enačbam $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ in $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ za vsak $n \geq 2$. S popolno indukcijo dokažite, da velja $a_n = 2^n + 1$.

2. Rešite neenačbo:

$$|x^2 + 4x - 1| \geq 4$$

3. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9n^2 + 3n)^n}{(3n - 1)^{2n}} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - 2}}$$

4. a) Izračunajte vrednost vrste:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n - 3}$$

b) Določite, za katere celoštevilске k je vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n)!}{(3n)!} 3^{kn}$$

konvergentna.

5. Določite parameter a tako, da bo funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x) - \sin(3\pi x)}{x - 1} & ; x > 1 \\ ax & ; x \leq 1 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

31. marec 2004

1. Dana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \ln |x| & ; x \neq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Natančno narišite graf funkcije f ter poiščite še morebitne ničle, pole, asimptote, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje.

2. Napišite člene razvoja funkcije:

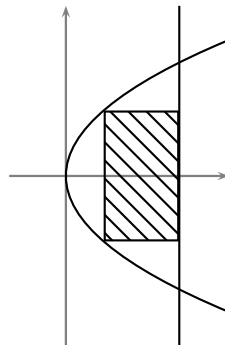
$$f(x) = (x - 2)\sqrt{x}$$

v Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 1$ do vključno člena $(x - 1)^3$.

3. Izračunajte limito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x \cos \sqrt{x}}{x^3}$$

4. Med parabolo $y^2 = x$ in premico $x = 1$ vrtamo pravokotnik, kot kaže slika. Kje naj bo leva stranica, da bo njegova ploščina največja?



5. Izračunajte nedoločeni integral:

$$\int \frac{\ln^3 x \, dx}{x(1 + \ln^2 x)}$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

26. maj 2004

1. Izračunajte določeni integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

2. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = -3x$, $y = x^2 - x + 1$ in $y = x^3$.
3. Izračunajte površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo:

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}; \quad 1 \leq x \leq e$$

zavrtimo okoli osi x .

4. Poiščite lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$$

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$(x^2 + x)yy' = 1 + y^2$$

za katero velja $y(1) = 1$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija - univerzitetni študij
10. junij 2004

1. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2 + 2004)^n}{(2n - 1)^{2n}}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3) \ln(x - 1)}{1 + \cos \frac{\pi x}{2}}$.

2. Naj bo:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln|x|$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja, ekstrema, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje. Narišite še graf.

3. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobite, če okoli osi x zavrtite krivuljo:

$$y = (x + 1)e^{-x}; \quad x \geq 0$$

4. Poiščite lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = \ln x + \frac{3}{4} \ln y - 2x^2 - 4xy + 2$$

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-x} + x + 1$$

ki zadošča pogojev $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

21. junij 2004

1. Rešite neenačbo:

$$|x| + |x^2 - 3| \leq 3$$

2. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n} - 2n}{n + 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sqrt{1+x} \ln(1+x) - x}$.

Namig: Taylorjeva vrsta

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$$

Določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme. Narišite še graf.

4. Izračunajte nedoločeni integral:

$$\int \sqrt{e^{2x} - 1} dx$$

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$3(x^2 - 1)y^2y' - xy^3 = -x$$

ki ustreza začetnemu pogoju $y(\sqrt{5}) = 2$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
30. avgust 2004

1. Pokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenačba:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 2\sqrt{n}$$

Namig: popolna indukcija.

2. Izračunajte:

a) limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^n}$.

b) vrednost vrste $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$.

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2x \quad ; \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

Določite zalogo vrednosti, pole, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti ter ekstreme in prevoje. Narišite še graf.

4. Zapišite Taylorjev razvoj funkcije:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

okoli točke $x_0 = 2$ do vključno člena z $(x-2)^4$.

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$(1+x^2)y' - xy = \sqrt{1+x^2}$$

ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

13. september 2004

1. Določite, za katere celoštevilске k konvergira vrsta:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n 2^{kn+1} - 1}$$

2. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1})$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$.

3. Narišite graf funkcije:

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}}$$

ter določite definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, intervale naraščanja in padanja ter ekstreme.

4. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če krivuljo:

$$y = \sin x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

zavrtimo okoli osi x .

5. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = e^{-y^2}(x^2 + 4xy)$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
27. januar 2005

1. S popolno indukcijo dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^n n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{x^2}) \ln(1 + x)}{\sin x - x}$$

3. Narišite graf funkcije:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 8 \sin x$$

ter poiščite ničle, pole, intervale naraščanja in padanja in ekstreme.

4. Izračunajte določeni integral:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}} dx$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' \operatorname{tg} x - y = \sin^2 x$$

za katero velja $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Vse naloge so enakovredne.

2002/03

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

11. januar 2003

1. S popolno indukcijo pokažite, da za vsako naravno število n velja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

2. V realnih številih rešite neenačbo:

$$\frac{1 + |x - 1|}{1 - |x - 1|} \leq 1$$

3. V kompleksnih številih rešite enačbo:

$$z^3 = (2 + 2i)^{100}$$

4. Izračunajte:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} + 7 \cdot 3^n}{4^{n+1} + 5n}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{n-1} - \sqrt{n-2})^{\sqrt{n-3}}$$

5. Za katere vrednosti parametra a konvergirata naslednji vrsti:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+2} \right)^{n^2-n}, \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-2}}{n^a}$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

29. marec 2003

1. Izračunajte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{tg} x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{2x} + x^2 - 4x}{\sin(\pi x)}$$

2. Določi parametra a in b tako, da bo funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(3-x) & ; x \leq 2 \\ ax + b & ; x > 2 \end{cases}$$

zvezno odvedljiva na celi realni osi.

3. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = x^3 \sqrt{1-x^2}$$

Določite še definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti ter morebitne ničle, pole, ekstreme in prevoje.

4. Izračunajte kot, pod katerim se sekata krivulji

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad y = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

5. Iz vsakega vogala kvadrata s stranico a izrežemo kvadrateg, pri čemer so vsi štirje izrezani kvadratki enako veliki (glej sliko). Iz dobljenega lika sestavimo škatlo. Kako naj izrežemo, da bo prostornina škatle največja?

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

24. maj 2003

1. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - x^2 - 6}$$

S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunajte $f^{(4)}(0)$.

2. Izračunajte limito:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \frac{2x-2}{x+1}}{\sin^3(\pi x)}$$

3. Izračunajte nedoločeni integral:

$$\int \frac{x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

4. Izračunajte dolžino krivulje:

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

ko t preteče interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če okoli osi x zavrtimo funkcijo:

$$y = \sin x + \cos x$$

med dvema zaporednima ničloma.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
9. junij 2003

1. Narišite množico kompleksnih števil z , ki zadoščajo enačbi:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{3}$$

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-2}) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

3. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = 3 \operatorname{arctg}(2x) - 2 \operatorname{arctg} x$$

Določite še definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti ter poiščite morebitne ničle, pole, ekstreme in prevoje.

4. Izračunajte:

a) nedoločeni integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$$

b) volumen vrtenine, ki nastane, če krivuljo:

$$y = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}; \quad x \geq 0$$

zavrtimo okoli osi x .

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$y' = -\sin x \cos^2 y$$

ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
27. junij 2003

1. S popolno indukcijo (ali kako drugače) dokažite, da je število:

$$9^n - (-1)^n$$

deljivo z 10 za vsak $n \in \mathbb{N}$.

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{n+1} - 2^{-n+1})(3^{n-1} + 3^{-n-1})}{6^n - 6^{-n}} \quad \text{b) } \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \cos \sqrt{x} - 2 + x}{xe^x - x}$$

3. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = e^{\frac{x+2}{x^3}}$$

Določite še definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja ter poiščite morebitne ničle, pole, linearne asimptote in prevoje.

4. Izračunajte:

- a) nedoločeni integral:

$$\int \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} dx$$

- b) dolžino parametrično podane krivulje:

$$x = 2e^{2t} + e^{-t}, \quad y = 8e^{t/2}; \quad 0 \leq t \leq \ln 2$$

5. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = 1 + xy - x^2y - xy^2$$

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
4. september 2003

1. Določite, za katere α konvergira vrsta:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2 + \alpha 2^n}$$

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 3}) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}(x^2)}$$

3. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x}}$$

Določite še definicijsko območje, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja ter poiščite morebitne ničle, pole, linearne asimptote in prevoje.

4. Izračunajte:

a) nedoločeni integral:

$$\int \frac{x}{\sin^4 x} dx$$

b) površino telesa, ki ga dobimo, če krivuljo $y = \sin x$ med dvema zaporednima ničloma zavrtimo okoli abscisne osi.

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$y' = (x + 1)y + xe^x$$

ki zadošča začetnemu pogoju $y(-2) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
18. september 2003

1. Poiščite vse kompleksne rešitve enačbe $z^6 = -1$.

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n+3} (\sqrt[3]{8^n + 3} - \sqrt[3]{8^n - 3}) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{\sin^2(x - 1)}$$

3. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = \ln(5x^2 - 4x^4)$$

ter določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, asimptote, intervale naraščanja in padanja, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje.

4. Izračunajte:

a) nedoločeni integral:

$$\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$$

b) ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji:

$$y = \frac{\pi}{4} x \quad \text{in} \quad y = \operatorname{tg}^3 x$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$y' = \frac{y}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$$

za katero velja $y(1/2) = 0$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
6. januar 2004

1. Poiščite vse kompleksne rešitve enačbe $z^4 = (1 + i\sqrt{3})^{20}$.

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + e^n}{e^{-n} + e^n} \right)^{e^n} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{(\ln(1 + x))^3}$$

3. Natančno narišite graf funkcije:

$$f(x) = e^{\frac{x}{(x+1)^2}}$$

ter določite definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, asimptote, intervale naraščanja in padanja, ekstreme in izračunajte drugi odvod.

4. Izračunajte:

a) nedoločeni integral:

$$\int \ln(x^2 + 1) dx$$

b) ploščino lika pod krivuljo:

$$y = \frac{1}{2 + \sin^2 x},$$

ko x preteče interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

5. Poiščite stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

in jih klasificirajte.

2001/02

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

12. januar 2002

1. Poiščite vsa kompleksna števila $z \in \mathbb{C}$, za katera so absolutne vrednosti števil z , $1 - z$ in $1/z$ enake.

2. Določite množico realnih števil x , za katera velja:

$$\sqrt{\cos x} < \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}$$

Zapišite jo kot interval ali unijo intervalov.

3. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \ln \frac{e^n + e^{-n}}{2} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2 + 2n} \right)^{2n+3}$

4. S popolno indukcijo pokažite, da za vsak $0 < h < 1$ in vsako naravno število n velja neenakost:

$$(1 + h)^n \leq 1 + (2^n - 1)h$$

5. Določite, za katera realna števila x je vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

konvergentna.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
23. marec 2002

1. Narišite graf funkcije:

$$y = \arccos(\cos(x - 3)) + 2$$

2. Funkcija f je definirana z enačbo $f(x) = g(g(g(x)))$, kjer je:

$$g(x) = \frac{1}{3 - x}$$

Določite definicijsko območje funkcije f in nato f dopolnite tako, da bo povsod zvezna.

3. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg\left(\frac{2}{\pi} \arctg(-5x)\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[16]{1 + \sin x} - 1}{\operatorname{tg} x}$

4. a) Določite, ali je funkcija $y(x)$, ki je implicitno podana z enačbo $xy + \ln y = 0$, rešitev diferencialne enačbe $(1 + xy)y' = -y^2$.
b) Poiščite enačbi tangente in normale pri $x = 0$ na krivuljo:

$$y(x) = (3x + e)^{\sin x + \cos x}$$

5. Kateri enakokraki trikotnik z danim obsegom $2s$ ima največjo ploščino?

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
28. junij 2002

1. S popolno izdukcijo pokažite, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva z 9!

2. a) Določite x tako, da bo zaporedje:

$$a_n = \frac{(-2)^n + 5^n}{(-2)^{n+1} + 5^{n+1}} + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n + (1+x) \sin \frac{n\pi}{2}$$

konvergentno, in izračunajte njegovo limito!

b) Razvijte funkcijo:

$$f(x) = e^{x^3 - 15x^2 + 75x - 118}$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 5$ in izračunajte $f^{(45)}(5)$.

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Določite definicijsko območje, ničle, vodoravni asimptoti, ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje ter območja konveksnosti in konkavnosti. Narišite še graf!

4. a) Pokažite, da za primerne konstante A, B, C, D in E , odvisne od a, b in c , velja zveza:

$$\int (ax^2 + bx + c)\sqrt{1+x^2} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{1+x^2} + E \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) Izračunajte površino in prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik:

$$D := \left\{ (x, y); x^2 + 2x + 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \right\}$$

zavrtimo okoli osi x .

Namig: Pomagajte si s točko a).

5. Poiščite točko na ploskvi $z = 3x + 6y + 2$, ki je najbližje koordinatnemu izhodišču.

Namig: Vezani ekstrem.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

6. september 2002

1. Poiščite vsa realna števila x , za katera velja:

$$x^2 - 2|x + 3| - 2 > 0$$

2. Izračunajte limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\ln(4^x + 1) - 2 \ln(2^x - 1) \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

3. Dana je funkcija:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{1+x}$$

Določite definicijsko območje, ničle, asimptote, ekstreme ter intervale naraščanja in padanja. Izračunajte še drugi odvod ter narišite graf.

4. Izračunajte:

a) nedoločeni integral:

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$$

b) prostornino telesa, ki ga dobimo, če okoli osi x zavrtimo lik, omejen s krivuljama:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{2}$$

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y$$

za katero velja $y(0) = 2$.

IZPIT IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij
20. september 2002

1. Poiščite vsa kompleksna števila z , za katera velja:

$$z\bar{z} + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} + 4 = 0 \text{ in}$$

$$(1 - i)z + (1 + i)\bar{z} + 4 = 0$$

2. Izračunajte limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x + 1} \right)^{x+1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

3. Naj bo funkcija f definirana po predpisu:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x^3}$$

Določite definicijsko območje, ničle, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter kje je funkcija konveksna in kje konkavna. Narišite še graf.

4. Izračunajte:

a) nedoločeni integral:

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2) dx$$

b) dolžino krivulje $y = \sin x + \cos x$ med dvema zaporednima ničloma.

5. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$y' \operatorname{ctg} x + y = 2 \sin x$$

za katero velja $y(0) = 1$.