REŠENE NALOGE IZ NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

Martin Raič

RAIČ, Martin
Rešene naloge iz navadnih diferencialnih enačb

Samozaložil avtor.
Prva izdaja
Ljubljana, 2018
Elektronska knjiga, dostopna na
`http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~raicm/Poucevanje/DE/DE_vaje_2018.pdf`

Katiložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=295266816

ISBN 978-961-288-525-0 (pdf)

Predgovor

Diferencialne enačbe so pomemben del matematike, so pa nepogrešljive tudi v številnih drugih vedah, naj omenim samo fiziko, ekonomijo in biologijo. Zato s tega področja obstaja že ogromno učbenikov in zbirk nalog. Ta zbirka je nastala po vajah iz diferencialnih enačb, ki sem jih izvajal na programu Praktična matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Skozi izvajanje pa se je izkazalo, da ni taka težava usvojiti receptur, težava pa je diferencialne enačbe reševati matematično korektno. Za ta namen je treba najprej rigorozno definirati pojme in ni vselej očitno, kako to storiti. Zatakne se že pri pojmu splošne rešitve diferencialne enačbe.

Namen te zbirke je poleg nalog prinesti v naš prostor tudi nekaj predlogov, kako diferencialne enačbe obravnavati na korekten način. Še zlasti v prvem delu drugega poglavja so primeri izbrani tako, da se pokaže, na kakšne težave naletimo in kako jih rešimo. Vesel bom, če bodo rešitve, predstavljene tukaj, prišle prav še kateremu drugemu izvajalcu.

V Ljubljani, junija 2018

Martin Raič
martin.raic@fmf.uni-lj.si

Kazalo

1. Uvod

Pojem diferencialne enačbe. Različni koncepti rešitve diferencialne enačbe. Obstoj in enoličnost rešitev.

Navadna diferencialna enačba reda n *je enačba, v kateri je neznanka funkcija* $y = h(x)$ *in je oblike:*

$$F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\,.$$

Klasična rešitev *tovrstne enačbe na dani neprazni odprti množici je funkcija, ki je* n*-krat zvezno odvedljiva in zadošča dani enačbi.*

1. Pri katerih a in b funkcija:
$$y = a\,e^{bx^2}$$
reši diferencialno enačbo $y' = xy$?

2. Dana je diferencialna enačba $2x^2y'' - 7xy' + 9y = 0$.
   a) Za katere λ je funkcija $y = x^\lambda$ klasična rešitev te diferencialne enačbe na $(0, \infty)$?
   b) Poiščite čim več klasičnih rešitev na $(0, \infty)$, na $(-\infty, 0)$ in na $\mathbb{R}$.

3. Dana je diferencialna enačba $y'^2 = 4y$.
   a) Poiščite vse polinome stopnje dve ali manj, ki rešijo to enačbo. Narišite!
   b) Poiščite še čim več drugih rešitev te enačbe.

V nalogah od 4. do 6. poiščite diferencialno enačbo, katere rešitev je dana družina funkcij.

4. $y = \dfrac{1}{x-a}$.

5. $y = a\,e^{bx}$.

6. $y = a\cos x + b\sin x$.

2. Enačbe prvega reda

Enačbe z ločljivima spremenljivkama. Homogena enačba. Linearna enačba. Bernoullijeva enačba. Eksaktna enačba. Riccatijeva enačba. Uporaba v fiziki.

Diferencialne enačbe prvega reda z ločljivima spremenljivkama *so tiste, ki se dajo prevesti na obliko:*

$$f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{$*$}$$

Tako enačbo lahko rešimo tako, da obe strani integriramo: če sta F in G primitivni funkciji funkcij f in g, vse klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih, zadoščajo zvezi:

$$F(x) + C = G(y)\,.$$

Natančneje, za vsako klasično rešitev $y = h(x)$ enačbe $(*)$, definirano na nekem intervalu, obstaja taka konstanta C, da povsod na tem intervalu velja $F(x) + C = G\big(h(x)\big)$.

1. Dana je diferencialna enačba $y' = e^y$.

   a) Poiščite vse klasične rešitve te enačbe, definirane na odprtih intervalih.

   b) Med rešitvami iz prejšnje točke poiščite partikularno rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$. Poiščite tudi maksimalni odprti interval, na katerem je definirana ta partikularna rešitev.

2. Poiščite vse klasične rešitve diferencialne enačbe $y' = -2xy^2$, definirane na odprtih intervalih.

3. Poiščite vse klasične rešitve diferencialne enačbe $x^2y' = y^2$, definirane na odprtih intervalih.

Splošna rešitev *diferencialne enačbe je družina klasičnih rešitev te enačbe, iz katerih lahko sestavimo vse klasične rešitve enačbe.*

Za enačbo n-tega reda to pomeni, da za vsako klasično rešitev h in vsako točko x_0 v njenem definicijskem območju obstaja funkcija g_L iz te družine, ki se v levi limiti pri x_0 ujema s h tako v vrednosti kot tudi v prvih n odvodih, prav tako pa tudi funkcija g_D iz te družine, ki se na ta način ujema s h v desni limiti.

Ob navajanju splošne rešitve se dogovorimo, da funkcije zožimo na množico točk, kjer so n-krat zvezno odvedljive.

Lahko se omejimo le na določen pogoj na $x, y, y, \ldots, y^{(n)}$.

Priključitev točke

Naj bo $a < x_0 < b$. Vsaka klasična rešitev enačbe prvega reda, definirana na (a, b), je zvezno odvedljiv zlepek neke klasične rešitve na (a, x_0) in neke klasične rešitve na (x_0, b).

Splošna rešitev enačbe pri pogoju $(x, y) \in E$, kjer je $E \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica, se ujema s splošno rešitvijo pri pogoju $(x, y) \in E, x \neq x_0$.

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $xy' = y^2$.

5. Poiščite klasično rešitev diferencialne enačbe $2xy' = y$, za katero je $y(-4) = -4$ in je definirana na maksimalnem možnem odprtem intervalu. Dokažite, da je taka rešitev ena sama.

Globalni eksistenčni izrek za enačbe prvega reda

Dana naj bo **začetna naloga**:

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0\,,$$

kjer je $f\colon (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ ter $x_0 \in (a, b)$ in $y_0 \in (c, d)$. Funkcija f naj bo zvezna v x.

Privzemimo, da je $(c, d) = \mathbb{R}$ in da je f **Lipschitzeva**[1] *v y, t. j. obstaja taka konstanta L, da za vse $x \in (a, b)$ in vse $y, z \in (c, d)$ velja $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$. Tedaj ima dana začetna naloga* **natanko eno** *klasično rešitev za $x \in (a, b)$.*

Brž ko je f parcialno odvedljiva po y, je f Lipschitzeva v y natanko tedaj, ko je parcialni odvod f_y omejen.

6. Dana je diferencialna enačba $(1 + x^2)y' = x|y|$.

   a) Preverite, da poljubna začetna naloga za to enačbo izpolnjuje pogoje globalnega eksistenčnega izreka za $x \in \mathbb{R}$ in $y \in \mathbb{R}$.

   b) Poiščite klasične rešitve, ki zadoščajo začetnim pogojem $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ in $y(0) = -1$.

   c) Poiščite vse klasične rešitve te enačbe, definirane na odprtih intervalih.

[1] Rudolf Lipschitz (1832–1903), nemški matematik

Picardova[2] iteracija

Začetna naloga:

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$$

je ekvivalentna integralski enačbi:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Le-to lahko rešimo iterativno:

$$h_0 \equiv y_0\,, \qquad h_{n+1} = h_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, h_n(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Iskana rešitev y je limita funkcij h_n.

7. S pomočjo Picardove iteracije rešite diferencialno enačbo $y' = y - x$ pri začetnem pogoju $y(0) = 2$.

Lokalni eksistenčni izrek za enačbe prvega reda

Spet naj bo dana začetna naloga:

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0\,,$$

kjer je $f\colon\ (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ ter $x_0 \in (a, b)$ in $y_0 \in (c, d)$, funkcija f pa zvezna v x.

Privzemimo, da je f **lokalno Lipschitzeva** *v y, t. j. za poljubna $x_1 \in (a, b)$ in $y_1 \in (c, d)$ obstajajo taka intervala (a_1, b_1) in (c_1, d_1) in taka konstanta L, da je $x_1 \in (a, b)$, $y_1 \in (c, d)$ ter da za vse $x \in (a_1, b_1)$ in vse $y, z \in (c_1, d_1)$ velja $|f(x, y) - f(x, z)| \le L|y - z|$. Tedaj ima dana začetna naloga* **največ eno** *klasično rešitev za $x \in (a, b)$, obstaja pa tudi tak interval (a^*, b^*), da je $x \in (a^*, b^*)$ in ima naloga rešitev za $x \in (a^*, b^*)$.*

Brž ko je f parcialno odvedljiva po y in parcialni odvod zvezen v obeh spremenljivkah, je f tudi lokalno Lipschitzeva v y.

8. Dana je diferencialna enačba $y' = y^2$.

   a) Preverite, ali so izpolnjeni pogoji globalnega eksistenčnega izreka za $x \in \mathbb{R}$ in $y \in \mathbb{R}$.

   b) Rešite enačbo pri začetnem pogoju $y(0) = 1$. Poiščite maksimalni odprt interval, na katerem je definirana rešitev.

[2] Charles Émile Picard (1856–1941), francoski matematik

9. Dana je diferencialna enačba $y' = y \ln y$.

   a) Preverite, ali so izpolnjeni pogoji globalnega eksistenčnega izreka za $x \in \mathbb{R}$ in $y \in \mathbb{R}$.

   b) Rešite enačbo pri začetnem pogoju $y(0) = a$, kjer je $a > 0$. Kje so definirane rešitve?

10. Poiščite čim več klasičnih rešitev enačbe $y' = y^{2/3}$, definiranih na odprtih intervalih. Komentirajte!

11. Poiščite čim več klasičnih rešitev enačbe $y' = y^{1/3}$, definiranih na odprtih intervalih. Komentirajte!

12. Dana je diferencialna enačba $xy' = 3y$.

   a) Poiščite njeno splošno rešitev.

   b) Poiščite vse klasične rešitve, definirane na celi realni osi, za katere je $y(-1) = 0$.

Poenostavitev izrazov z logaritmi

Če je stran enačbe z ločenima spremenljivkama, na kateri je odvisna spremenljivka, oblike $\frac{g'(y)}{g(y)}\,\mathrm{d}y$*, lahko le-to integriramo v* $\ln \frac{g(y)}{C}$ *(in potem seveda na drugi strani ne pišemo aditivne konstante). Na tem koraku je seveda* $C \neq 0$*, često pa se izkaže, da končna rešitev vsebuje tudi primer, ko je* $C = 0$*.*

Nato izrazimo odvisno spremenljivko. Na vsakem intervalu, kjer funkcija f *nima ničel, lahko družino funkcij* $C|h(x)|$*, kjer je* C *preteče množico, simetrično okoli izhodišča, nadomestimo kar z družino funkcij* $Cf(x)$*.*

13. Poiščite vse klasične rešitve enačbe $y' = xy$, definirane na odprtih intervalih.

14. Rešite začetno nalogo $y^2 = xyy' + 9, \quad y(2) = -1$. Poiščite tudi maksimalni interval, na katerem je rešitev definirana.

15. Pivo, ki ga vzamemo iz hladilnika, se z začetne temperature 4°C v 10 minutah ogreje na 7°C. Temperatura v sobi je 25°C. Kolikšna bo temperatura piva 20 minutah potem, ko ga damo iz hladilnika?

16. 100-litrski kotel je poln vode s temperaturo 10°C. Vanj s pretokom 1 l/s teče topla voda s temperaturo 30°C in se idealno meša, odvečna voda pa se poliva čez rob. Kolikšna bo temperatura vode čez eno minuto?

17. Zvone naroči eno veliko pivo (pol litra). Ko mu ga prinesejo, je to pivo v vrčku s polmerom 4 cm in ima temperaturo 6°C. Zunanja temperatura je 32°C. Zvone počasi in enakomerno srka pivo, tako da ga spije v pol ure.

    Pivo se segreva:

- premosorazmerno z razliko med svojo trenutno temperaturo in temperaturo okolice;
- premosorazmerno s svojo površino;
- obratnosorazmerno s svojo prostornino.

Privzamemo, da ima pivo ves čas obliko valja z danim polmerom in višino, ki s časom linearno pada, in da idealno prevaja temperaturo.

Na začetku se pivo segreva s hitrostjo 0˙3 stopinje na minuto. Kolikšna bo njegova temperatura, ko ga bo Zvone spil devet desetin?

Namig: če s t označimo čas, s T temperaturo, s h pa višino piva, zapišite h kot funkcijo t in $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ kot funkcijo h.

18. *Spreminjanje velikosti populacije pri omejenih naravnih virih.* Populacija ima ob času t velikost x. Stopnja razmnoževanja je enaka $r(1 - x/L)$, kjer r odslikuje fertilnost, $1 - x/L$ pa faktor upora okolja – L je ravnovesna velikost populacije. Dobimo *Verhulstovo oz. logistično enačbo*:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\left(1 - \frac{x}{L}\right)x\,.$$
Rešite to enačbo pri začetnem pogoju $x(0) = x_0$.

Ortogonalne trajektorije

Ortogonalne trajektorije na družino krivulj, določene z diferencialno enačbo:
$$F(x, y, y') = 0\,,$$
določa diferencialna enačba:
$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0\,.$$

19. Poiščite ortogonalne trajektorije na družino krivulj $y = Cx^3$.

Linearna diferencialna enačba *je tista, ki se da zapisati v obliki:*
$$y' + q(x)\,y = r(x)\,.$$
Če poznamo eno rešitev $y = h(x)$, lahko preostale iščemo v obliki $y = h(x) + z$.

20. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $xy' - 3y = x$.

    Namig: ena od rešitev je linearna funkcija.

21. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $(1 - x)^2 y' + (1 - x)y + 1 = 0$.

    Namig: rešitev iščite kot Taylorjevo vrsto okoli izhodišča.

    Opomba: to je primer *Frobeniusove metode* – glej 5. razdelek.

Če ne poznamo nobene rešitve linearne diferencialne enačbe, jo lahko rešimo tudi tako, da najprej poiščemo rešitev **homogenega dela enačbe***:*

$$y_H' + q(x)\, y_H = 0\,.$$

ki se da vedno zapisati v obliki $y_H = C\, h(x)$, kjer je C konstanta. Rešitev izvirne enačbe nato iščemo z **variacijo konstante***, kar pomeni, da jo nastavimo v obliki $y = h(x)\, z$, kjer je z zdaj* **funkcija***.*

Če torej poznamo eno netrivialno rešitev $y = h(x)$ **homogenega** *dela enačbe, lahko rešitve* **izvirne** *enačbe iščemo v obliki $y = h(x)\, z$.*

22. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$\bigl(e^x + 1\bigr)y' + e^x\, y = e^x - 1\,,$$

ki gre skozi izhodišče.

Bernoullijeva[3] **diferencialna enačba** *je tista, ki se da zapisati v obliki:*

$$y' + q(x)\, y = r(x)\, y^\alpha\,.$$

Enačbo lahko prevedemo na linearno, če uvedemo:

$$z = y^{1-\alpha}\,, \qquad z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y'\,.$$

Pred tem se splača deliti z y^α. A pozor: če je $\alpha > 0$, pri deljenju izgubimo rešitve z ničlami.

- *Če je $0 < \alpha < 1$, lahko vse rešitve z ničlami sestavimo iz preostalih in jih ni treba vključiti v splošno rešitev. Rešitev $y = 0$ dobimo kot ogrinjačo.*
- *Če je $\alpha \ge 1$, za vsako klasično rešitev, definirano na odprtem intervalu, velja, da je bodisi povsod enaka nič bodisi ni nikjer enaka nič. Rešitev $y = 0$ dobimo kot limito rešitev deljene enačbe in jo je treba vključiti v splošno rešitev.*

23. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $3y' + 2y = \bigl(1 + 3\, e^x\bigr)y^4$.

24. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $xy' + 3y = \sqrt[3]{y}\, \sin x$.

25. Poiščite ortogonalne trajektorije na družino krožnic:

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2\,; \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Narišite!

[3] Jakob Bernoulli (1655–1705), švicarski matematik

Riccatijeva[4] **diferencialna enačba** *ima obliko:*

$$y' = p(x) + q(x)\,y + r(x)\,y^2 \,.$$

Ta enačba se v splošnem ne da rešiti v kvadraturah, t. j. z integrali. Če pa poznamo eno rešitev $y = h(x)$*, lahko preostale nastavimo v obliki:*

$$y = h(x) + \frac{1}{w} \,.$$

Tako se enačba prevede na linearno.

26. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y' = x^2 y^2 + \frac{2}{x^4} \,.$$

Namig: za primerna a in p funkcija $y = ax^p$ reši enačbo.

Homogena *diferencialna enačba je tista, ki je oblike:*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \,.$$

Če v tako enačbo uvedemo $z = \dfrac{y}{x}$*, jo prevedemo na enačbo z ločljivima spremenljivkama.*

27. Poiščite partikularno rešitev diferencialne enačbe:

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \,,$$

ki zadošča začetnemu pogoju $y(3) = 8\pi$, skupaj z maksimalnim odprtim intervalom, kjer je definirana.

28. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $(y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$.

[4] Jacopo Francesco Riccati (1676–1754), italijanski matematik

Diferencialna enačba, zapisana v obliki:

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

je **eksaktna**, *če obstaja taka funkcija F, da je $M = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ in $N = \dfrac{\partial F}{\partial y}$. Splošna rešitev enačbe je potem $F(x,y) = C$.*

Diferencialna enačba je eksaktna natanko tedaj, ko velja $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$.

Funkciji F pravimo **prvi integral** *enačbe in jo lahko iščemo kot nedoločeni integral:*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = F_1(x,y) + A(y) = \\ &= \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = F_2(x,y) + B(x)\,; \end{aligned}$$

funkcije F_1, F_2, A in B nastavimo tako, da se izraza ujemata.

29. Dokažite, da je diferencialna enačba:

$$(2x^3 - y)\,\mathrm{d}x = (x + y)\,\mathrm{d}y$$

eksaktna, in jo rešite.

Integracijski multiplikator

Vsaka diferencialna enačbo prvega reda postane eksaktna, če jo pomnožimo s primerno funkcijo. Tej funkciji pravimo integracijski multiplikator. V splošnem je sicer iskanje integracijskega multiplikatorja prav tako zahtevna naloga kot iskanje rešitve same diferencialne enačbe, včasih pa se da za multiplikator uganiti nastavek.

30. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$\left(3\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)\mathrm{d}x + \frac{x}{x+y}\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Namig: enačba postane eksaktna, če jo pomnožite s primerno potenco določene spremenljivke.

3. Posebne linearne enačbe višjih redov

Znižanje reda. Enačba s konstantnimi koeficienti. Euler–Cauchyjeva enačba.

Znižanje reda, če manjka odvisna spremenljivka

Če je y odvisna spremenljivka v diferencialni enačbi, ki ne vsebuje $y, y', \ldots, y^{r-1}$, lahko enačbi znižamo red z uvedbo nove odvisne spremenljivke $z = y^{(r)}$.

1. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x^2 y''' = (y'')^2$.

2. Stiroporno kroglo z maso $m = 10\,\mathrm{g}$ izstrelimo navpično v zrak s hitrostjo $100\,\mathrm{m/s}$. Zračni upor povzroča silo, ki je enaka cv^2, kjer je v hitrost krogle in $c = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ns^2/m^2}$. Seveda pa na kroglo deluje še sila teže mg, kjer je $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Po kolikšnem času krogla doseže najvišjo točko in kolikšno višino doseže? Kako pa bi bilo, če ne bi bilo zračnega upora?

Znižanje reda, če manjka neodvisna spremenljivka

Če diferencialna enačba ne vsebuje neodvisne spremenljivke x, ji lahko prav tako znižamo red z uvedbo nove spremenljivke $v = y'$. Enačba se namreč da prevesti na diferencialno enačbo za funkcijsko zvezo med y in $y' = v$, saj se tudi višji odvodi dajo izraziti zgolj s tema dvema spremenljivkama, na primer:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,.$$

3. Homogena vrv, zvita v klobčič na robu mize, se začne odvijati navzdol. Opišite dinamiko tega odvijanja.

Linearna diferencialna enačba poljubnega reda

Diferencialna enačba reda n je linearna, če je oblike:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)\,.$$

Privzamemo, da so funkcije $a_n, \ldots, a_0, b$ zvezne.

Enačba je **homogena**, *če je $b = 0$. Množica rešitev take enačbe na določenem odprtem intervalu, kjer a_n nima ničel, se izraža v obliki:*

$$y = C_1\,h_1(x) + C_2\,h_2(x) + \cdots + C_n\,h_n(x)\,.$$

Funkcije $h_1, \ldots, h_n$ tvorijo **bazo** *prostora rešitev.*

V splošnem se taka enačba ne da rešiti v kvadraturah. A če poznamo eno rešitev pripadajoče homogene enačbe, denimo $y = h(x)$, lahko enačbi znižamo red z uvedbo nove odvisne spremenljivke $z = y/h(x)$.

Tehnično gledano, če poznamo eno rešitev, enačbi še ne znižamo reda, jo pa prevedemo na enačbo, ki ne vsebuje eksplicitno odvisne spremenljivke in se ji zato da znižati red.

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$(x^2 + x)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0\,.$$

Namig: ena od rešitev je oblike $y = x^p$.

Homogena linearna DE s konstantnimi koeficienti

Rešitev enačbe:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \qquad (*)$$

kjer so $a_0, \ldots, a_n$ konstante, poiščemo s pomočjo karakteristične enačbe:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \qquad (**)$$

Če ima enačba $(**)$ same enostavne rešitve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so vse klasične rešitve enačbe $(*)$, definirane na odprtih intervalih, oblike:

$$y = C_1\,e^{\lambda_1 x} + C_2\,e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\,e^{\lambda_n x}\,.$$

V nalogah od 5. do 12. poiščite splošno rešitev dane diferencialne enačbe.

5. $y'' - y' - 2y = 0$.

6. $y'' + 2y' = 0$.

Večkratne ničle karakterističnega polinoma

Pri večkratnih rešitvah množimo z x, dokler ne dobimo dovolj neodvisnih rešitev: če je torej λ r-kratna rešitev, iz nje dobimo člene oblike:

$$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{r-1} x^{r-1}) e^{\lambda x} \,.$$

7. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
8. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
9. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$.

Kompleksne ničle karakterističnega polinoma

Člene, dobljene iz (konjugirano) kompleksnih rešitev, spremenimo v trigonometrijo, npr. $C_1\, e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2\, e^{(\alpha-\beta i)x}$ se spremeni v $C_1\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2\, e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

10. $y'' + 2y' + 5y = 0$.
11. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$.
12. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$.

Nastavki za nehomogeno enačbo s konstantnimi koeficienti (brez trigonometrije)

Rešitev enačbe s konstantnimi koeficienti:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = P(x)\, e^{\alpha x} \,,$$

kjer je P polinom, iščemo v obliki $y = y_H + y_P$, kjer je y_H rešitev homogenega dela enačbe in $y_P = x^r\, \tilde{P}(x)\, e^{\alpha x}$, kjer je $\tilde{P}$ polinom, ki je iste stopnje kot P, r pa je večkratnost ničle α v karakteristični enačbi.

V nalogah od 13. do 17. poiščite splošno rešitev dane diferencialne enačbe.

13. $y'' - y' - 2y = x^2$.
14. $y'' - 2y' + y = e^{2x} + e^{-2x}$.
15. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.
16. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x} + e^{-2x}$.

Nastavki za nehomogeno enačbo s konstantnimi koeficienti (s trigonometrijo)

Rešitev enačbe s konstantnimi koeficienti:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x)\big)\,,$$

kjer sta P in Q polinoma, iščemo v obliki $y = y_H + y_P$, kjer je y_H rešitev homogenega dela enačbe in:

$$y_P = x^r\, e^{\alpha x}\big(\tilde{P}(x)\,\cos(\beta x) + \tilde{Q}(x)\,\sin(\beta x)\big)\,,$$

kjer se maksimalna stopnja polinomov $\tilde{P}$ in $\tilde{Q}$ ujema z maksimalno stopnjo polinomov P in Q, r pa je večkratnost ničle $\alpha+\beta i$ oziroma $\alpha-\beta i$ v karakteristični enačbi.

17. $y'' + 4y' + 3y = \sin x$.
18. $y'' + 9y = x\,\sin(3x)$.

Homogena Euler[5]–Cauchyjeva[6] diferencialna enačba

Rešitev enačbe:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0\,, \qquad (*)$$

kjer so $a_0, \ldots, a_n$ konstante, poiščemo s pomočjo karakteristične enačbe:

$$a_n\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \qquad (**)$$

Če ima enačba $(**)$ same enostavne rešitve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so pri $x > 0$ vse klasične rešitve $(*)$, definirane na odprtih intervalih, oblike:

$$y = C_1\, x^{\lambda_1} + C_2\, x^{\lambda_2} + \cdots + C_n\, x^{\lambda_n}\,.$$

Pri večkratnih rešitvah množimo z $\ln x$: če je recimo λ r-kratna rešitev, iz nje dobimo člene oblike:

$$\big(C_0 + C_1 \ln x + \cdots + C_{r-1}(\ln x)^{r-1}\big)x^{\lambda}\,.$$

Poleg tega pa člene, dobljene iz (konjugirano) kompleksnih rešitev, spremenimo v trigonometrijo, npr. $C_1\, x^{\alpha+\beta i} + C_2\, x^{\alpha-\beta i}$ se spremeni v $C_1\, x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) + C_2\, x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$.

Klasične rešitve pri $x < 0$ dobimo tako, da x zamenjamo z $-x$. Splošno rešitev dobimo tako, da x zamenjamo z $|x|$. V določenih členih menjava morda ni potrebna.

POZOR: pri $x = 0$ pogoji eksistenčnega izreka niso izpolnjeni!

19. Dana je diferencialna enačba $2x^2y'' - 7xy' + 9y = 0$. Poiščite njeno splošno rešitev in vse klasične rešitve, definirane na celi realni osi.

20. Dana je diferencialna enačba $x^2y'' = 2y$.

    a) Poiščite njeno splošno resitev.

    b) Obravnavajte začetno nalogo z $y(0) = a$, $y'(0) = b$ v odvisnosti od a in b.

21. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, ki zadošča začetnima pogojema $y(-1) = 1$ in $y'(-1) = 0$.

22. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x^2y'' - xy' + 10y = 0$.

23. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe $4x^2y'' - 8xy' + 5y = 0$, ki zadošča:

    a) začetnemu pogoju $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$;

    b) začetnemu pogoju $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -5$.

    V obeh primerih zapišite rešitev na maksimalnem definicijskem območju.

Nastavki za nehomogeno Euler–Cauchyjevo enačbo

Rešitev enačbe:

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1xy' + a_0y = x^\alpha\big(P(\ln x)\cos(\beta\ln x) + Q(\ln x)\sin(\beta\ln x)\big)\,,$$

kjer sta P in Q polinoma, iščemo v obliki $y = y_H + y_P$, kjer je y_H rešitev homogenega dela enačbe in:

$$y_P = (\ln x)^r\,x^\alpha\big(\tilde P(\ln x)\,\cos(\beta\ln x) + \tilde Q(\ln x)\,\sin(\beta\ln x)\big)\,,$$

kjer se maksimalna stopnja polinomov $\tilde P$ in $\tilde Q$ ujema z maksimalno stopnjo polinomov P in Q, r pa je večkratnost ničle $\alpha+\beta i$ oziroma $\alpha-\beta i$ v karakteristični enačbi.

Za $x < 0$ moramo morda x^α zamenjati z $(-x)^\alpha$ ali $|x|^\alpha$, $\ln x$ pa moramo zamenjati z $\ln(-x)$ ali $\ln|x|$.

V 24. in 25. nalogi poiščite splošno rešitev dane diferencialne enačbe.

24. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x$.

25. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2$

[5]Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematik

[6]Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francoski matematik

Variacija konstant pri linearnih DE višjih redov

Če je $h_1, h_2, \ldots, h_n$ baza rešitev homogenega dela enačbe:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)\,,$$

rešitev izvirne enačbe nastavimo v obliki $y = h_1(x)\, z_1 + \cdots + h_n(x)\, z_n$, kjer funkcije $z_1, \ldots, z_n$ zadoščajo enačbam:

$$\begin{aligned} h_1(x)\, z_1' + \cdots + h_n(x)\, z_n' &= 0 \\ &\vdots \\ h_1^{(n-2)}(x)\, z_1' + \cdots + h_n^{(n-2)}(x)\, z_n' &= 0 \\ h_1^{(n-1)}(x)\, z_1' + \cdots + h_n^{(n-1)}(x)\, z_n' &= \frac{b(x)}{a_n(x)}\,. \end{aligned}$$

26. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $4y'' + y = \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$.

27. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{1}{x-1}$.

4. Sistemi diferencialnih enačb

Reševanje s pomočjo lastnih in korenskih vektorjev ter diagonalizacije. Variacija konstant. Fazni portreti.

Linearni sistemi s konstantnimi koeficienti

Sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

lahko interpretiramo kot vektorsko enačbo $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$*. Homogen linearni sistem lahko zapišemo v obliki* $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y}$*, kjer je* $\mathbf{A}$ *matrična funkcija. Splošna rešitev takega sistema se izraža v obliki:*

$$\vec{y} = C_1\vec{h}_1(x) + C_2\vec{h}_2(x) + \cdots + C_n\vec{h}_n(x)\,,$$

kjer so $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$ *linearno neodvisne rešitve.*
Sistem ima konstantne koeficiente, če je $\mathbf{A}$ *konstantna matrika. Če je* $\vec{v}$ *lastni vektor matrike* $\mathbf{A}$ *za lastno vrednost* λ*, je* $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ *rešitev danega sistema. Za linearno neodvisne lastne vektorje dobimo linearno neodvisne rešitve. Če se torej matrika* $\mathbf{A}$ *da diagonalizirati, lahko na ta način dobimo vse rešitve danega sistema.*

V nalogah od 1. do 12. poiščite splošno rešitev danega sistema linearnih enačb. Če gre za sistem dveh enačb z dvema neznanima funkcijama, narišite še fazni portret.

1. $y_1' = 2y_1 + 3y_2\,,$
   $y_2' = \frac{1}{3}y_1 + 2y_2\,.$

2. $y_1' = -2y_1 + 2y_2\,,$
   $y_2' = y_1 - 3y_2\,.$

3. $y_1' = -3y_1 + y_2\,,$
   $y_2' = -4y_1 + 2y_2\,.$

4. $y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3\,,$
   $y_2' = -y_1 + 2y_2 - y_3\,,$
   $y_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3\,.$

5. $y_1' = y_1 + 2y_2\,,$
   $y_2' = 3y_1 + 6y_2\,.$

Kompleksne lastne vrednosti

Pri kompleksnih lastnih vrednostih dobimo realne bazne rešitve tako, da iz vsakega konjugiranega para izberemo eno lastno vrednost, nakar vzamemo realni in imaginarni del pripadajoče bazne rešitve.

6. $y_1' = 4y_1 - 3y_2\,,$
   $y_2' = 3y_1 + 4y_2\,.$

7. $y_1' = -4y_1 + 3y_2\,,$
   $y_2' = -6y_1 + 2y_2\,.$

8. $y_1' = 2y_1 - y_2\,,$
   $y_2' = 5y_1 - 2y_2\,.$

Reševanje sistemov pri korenskih vektorjih

V splošnem se matrika $\mathbf{A}$ *ne da diagonalizirati. V tem primeru za cel prostor potrebujemo lastne in korenske vektorje. Le-te lahko uredimo v verige:*

$$\vec{v}_{m+r} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \vec{v}_{m+r-1} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \vec{v}_{m+2} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \vec{v}_{m+1} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{0}$$

($\vec{v}_{m+1}$ *je lastni vektor, preostali vektorji pa so korenski). Iz take verige dobimo naslednje linearno neodvisne rešitve:*

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda x}\,\vec{v}_{m+1}\,,\\
&e^{\lambda x}\big(\vec{v}_{m+2} + x\,\vec{v}_{m+1}\big)\,,\\
&e^{\lambda x}\left(\vec{v}_{m+3} + x\,\vec{v}_{m+2} + \frac{x^2}{2!}\,\vec{v}_{m+1}\right),\\
&\cdots\\
&e^{\lambda x}\left(\vec{v}_{m+r} + x\,\vec{v}_{m+r-1} + \frac{x^2}{2!}\,\vec{v}_{m+r-2} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\,\vec{v}_{m+1}\right).
\end{aligned}$$

9. $y_1' = -2y_1 + y_2\,,$
   $y_2' = -y_1 - 4y_2\,.$

10. $y_1' = 4y_1 + 16y_2\,,$
    $y_2' = -y_1 - 4y_2\,.$

11. $y_1' = y_1 + 2y_2 + y_3\,,$
    $y_2' = -8y_1 - 9y_2 - 3y_3\,,$
    $y_3' = 12y_1 + 12y_2 + 3y_3\,.$

12. $y_1' = -2y_1 + y_2 + 3y_3\,,$
$y_2' = -2y_2 + 5y_3\,,$
$y_3' = -2y_3\,.$

Splošni sistemi diferencialnih enačb

Splošni sistem diferencialnih enačb lahko zapišemo v vektorski obliki $\vec{y}\,' = \vec{F}(x, \vec{y})$*. Če vektorska funkcija* $\vec{F}$ *ni odvisna od* x*, t. j. če lahko zapišemo kar* $\vec{y}\,' = \vec{F}(\vec{y})$*, pravimo, da je sistem* **avtonomen**.

Točka $\vec{y}$ *je* **ravnovesna**, *če je* $\vec{F}(\vec{y}) = 0$*. V ravnovesni točki sistem miruje, podobno kot homogen linearni sistem v izhodišču. Že pri slednjih smo videli, da imajo ravnovesne točke različne stopnje stabilnosti.*

Naj bo $\vec{F}$ *gladka vektorska funkcija in naj bo* $\vec{y}_0$ *ravnovesna točka. Privzemimo, da ima Jacobijeva matrika* $D\vec{F}(\vec{y}_0)$ *vse realne komponente lastnih vrednosti različne od nič.* **Hartman**[7]**–Grobmanov**[8] **izrek** *pravi, da je tedaj možno obnašanje sistema* $\vec{y}\,' = \vec{F}(\vec{y})$ *okoli* $\vec{y}_0$ *homeomorfno preslikati na obnašanje sistema* $\vec{z}\,' = \big(D\vec{F}(\vec{y}_0)\big)\vec{z}$ *okoli izhodišča. Z drugimi besedami, sistem se obnaša podobno kot ustrezen homogen linearni sistem.*

V nalogah od 13. do 15. poiščite ravnovesne točke. Pri vsaki premislite, ali lahko uporabimo Hartman–Grobmanov izrek, in skicirajte fazni portret sistema.

13. $y_1' = y_1(1 - y_1) - y_1 y_2\,,$
$y_2' = y_2(1 - y_1)\,.$

14. $y_1' = y_2\,,$
$y_2' = y_1^2 + y_2^2 - y_1\,.$

15. $y_1' = 2y_1^2 - 3y_1 y_2\,,$
$y_2' = 2y_1 y_2 + 2y_2^2\,.$
Namig: pretvorite v polarne koordinate.

[7] Philip Hartman (1915–2015), ameriški matematik

[8] David Matvejevič Grobman (1922–1998), ruski matematik in fizik, pionir računalništva v Sovjetski zvezi

Variacija konstant pri nehomogenih linearnih sistemih

Rešitev nehomogenega sistema linearnih diferencialnih enačb:

$$\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

lahko poiščemo s pomočjo splošne rešitve pripadajočega homogenega sistema $\vec{y}\,'_H = \mathbf{A}(x)\vec{y}_H$. *Naj se le-ta izraža v obliki:*

$$\vec{y}_H(x) = C_1\,\vec{h}_1(x) + C_2\,\vec{h}_2(x) + \cdots + C_n\,\vec{h}_n(x) = \mathbf{H}(x)\,\vec{C}\,,$$

kjer je:

$$\mathbf{H}(x) = \begin{bmatrix} \vec{h}_1(x) & \vec{h}_2(x) & \cdots & \vec{h}_n(x) \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}.$$

Matriki $\mathbf{H}(x)$ *pravimo* **matrika Wrońskega**[9].

Tedaj se rešitev danega nehomogenega sistema izraža v obliki $\vec{y} = \mathbf{H}(x)\,\vec{z}$, *kjer vektorska funkcija* $\vec{z}$ *reši sistem:*

$$\mathbf{H}(x)\,\vec{z}\,' = \vec{b}(x)\,.$$

16. Poiščite splošno rešitev sistema:

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 + e^{-x}\,, \\ y_2' &= -y_1 - 4y_2\,. \end{aligned}$$

Reševanje nehomogenih linearnih sistemov s pomočjo diagonalizacije

Kadar se da matrika sistema diagonalizirati, se splača to izkoristiti. Če je namreč $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, *se sistem* $\vec{y}\,' = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{b}(x)$ *s substitucijama* $\vec{y} = \mathbf{P}\vec{z}$ *in* $\vec{b}(x) = \mathbf{P}\vec{w}(x)$ *prevede na sistem* $\vec{z}\,' = \mathbf{D}\vec{z} + \vec{w}(x)$. *Prednost tega je namreč, da je potrebno rešiti le sistem linearnih enačb s številskimi in ne s funkcijskimi koeficienti.*

17. Poiščite splošno rešitev sistema:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + e^{x}\,, \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 - y_3\,, \\ y_3' &= -y_1 - y_2 + 2y_3\,. \end{aligned}$$

[9] Józef Maria Hoene-Wroński, rojen kot Josef Hoëné (1776–1853), poljski filozof, matematik, fizik, izumitelj, pravnik in ekonomist

5. Reševanje diferencialnih enačb s potenčnimi vrstami

Frobeniusova metoda. Besselove funkcije.

Frobeniusova[10] **metoda** *pomeni, da rešitev diferencialne enačbe nastavimo kot potenčno vrsto okoli določene točke* x_0.
Če je x_0 **regularna** *točka homogene linearne diferencialne enačbe:*

$$p_m(x)y^{(m)} + p_{m-1}(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + p_2(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0\,,$$

kar pomeni, da je $p_m(x_0) \neq 0$*, koeficienti* p_j *pa so funkcije, ki se dajo razviti v klasične potenčne vrste okoli* x_0*, ki v določenih okolicah konvergirajo, lahko tudi rešitev nastavimo kot klasično potenčno vrsto:*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\,.$$

Opomba. Funkcija, ki se da razviti v klasično potenčno vrsto, ki v določeni okolici konvergira, se da v neki kompleksni okolici razširiti do holomorfne funkcije. Tovrstne enačbe je zelo naravno gledati v kompleksnem.
V nalogah od 1. do 6. poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe. Vzemite $x_0 = 0$.

1. $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$.

[10]Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), nemški matematik

Koordinatno izhodišče je **pravilna singularna točka** *homogene diferencialne enačbe, če lahko le-to zapišemo v obliki:*

$$r_m(x)\,y^{(m)} + \frac{r_{m-1}(x)}{x}\,y^{(m-1)} + \cdots + \frac{r_2(x)}{x^{m-2}}\,y'' + \frac{r_1(x)}{x^{m-1}}\,y' + \frac{r_0(x)}{x^m}\,y = 0\,,$$

kjer je $r_m(0) \neq 0$, koeficienti r_j pa so funkcije, ki se dajo razviti v klasične potenčne vrste okoli izhodišča, ki v določenih okolicah konvergirajo. Posplošitev na razvoj okoli poljubne točke x_0 je premočrtna.

Če enačbo pomnožimo z x^m:

$$x^m r_m(x)\,y^{(m)} + x^{m-1} r_{m-1}(x)\,y^{(m-1)} + \cdots + x\,r_1(x)\,y' + r_0(x)\,y = 0,$$

vidimo, da jo lahko gledamo kot posplošitev Euler–Cauchyjeve enačbe.

Pri pravilnih singularnih točkah lahko prav tako izhajamo iz nastavka:

$$y = \sum_n c_n\,x^n\,,$$

a z naslednjimi prilagoditvami:

- *Sumacija ne gre nujno po $n = 0, 1, 2, \ldots$, temveč po $n = \lambda, \lambda+1, \lambda+2, \ldots$, kjer je* **izhodiščni eksponent** *λ realno število (torej ne nujno celo). Raje torej nastavimo:*

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j\,x^{j+\lambda}\,;$$

- *Morda je treba dodati še člene, ki vsebujejo faktorje $\ln x, (\ln x)^2, \ldots$ $\ldots, (\ln x)^{m-1}$.*

Tak nastavek velja za $x > 0$. Rešitve za $x < 0$ lahko dobimo tako, da $\tilde{c}_j\,x^{j+\lambda}$ zamenjamo z $(-1)^j \tilde{c}_j\,(-x)^{j+\lambda}$, $\ln x$ pa z $\ln(-x)$.

Označimo:

$$Dy := x^m r_m(x)\,y^{(m)} + x^{m-1} r_{m-1}(x)\,y^{(m-1)} + \cdots + r_1(x)\,y' + r_0(x)\,y\,.$$

Za $y = \sum_n c_n\,x^n$ velja:

$$Dy = \sum_k \Big[f_0(k)\,c_k + f_1(k)\,c_{k-1} + f_2(k)\,c_{k-2} + \cdots\Big]x^k\,,$$

kjer so koeficienti $f_0, f_1, \ldots$ polinomi stopnje največ m.

Polinom f_0 je stopnje m in mu pravimo **karakteristični polinom**. *Njegove ničle so možni izhodiščni eksponenti λ.*

Pri iskanju splošne rešitve se bomo omejili na enačbe drugega reda, t. j. $m = 2$. Splošno rešitev take enačbe tvorijo linearne kombinacije $y = \kappa_1 h_1(x) + \kappa_2 h_2(x)$.

Naj bosta λ_1 in λ_2 ničli karakterističnega polinoma f_0.

Če razlika $\lambda_1 - \lambda_2$ **ni** *celo število, lahko bazni funkciji h_1 in h_2 izberemo neodvisno, in sicer v obliki:*

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\, x^{j+\lambda_1}\,, \qquad h_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+\lambda_2}\,,$$

kjer izberemo $c_{1,0}, c_{2,0} \neq 0$.

Alternativna možnost izračuna splošne rešitve je, da izračunamo le h_1, nakar enačbi znižamo red s substitucijo $y = h_1(x)\, z$.

2. $4x^2y'' - 6xy' + (x+6)y = 0$.

Če je razlika $\lambda_1 - \lambda_2$ celo število, brez škode za splošnost privzemimo, da je $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Izkaže se, da lahko tedaj bazni rešitvi iščemo v obliki:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\, x^{j+\lambda_1}\,,$$

$$h_2(x) = A\, h_1(x) \ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+\lambda_2} \quad (x > 0)\,.$$

Če je $\lambda_1 > \lambda_2$, izberemo $c_{1,0}, c_{2,0} \neq 0$ in postavimo $c_{2,\lambda_1-\lambda_2} = 0$.
Če je $\lambda_1 = \lambda_2$, izberemo $c_{1,0}, A \neq 0$ in postavimo $c_{2,0} = 0$.

Tudi tu se lahko poslužimo alternativne možnosti izračuna splošne rešitve, da izračunamo le h_1, nakar enačbi znižamo red s substitucijo $y(x) = h_1(x)\, z$.

3. $x^2(1-x)y'' + x(x-2)y' + 2y = 0$.

4. $xy'' + 2y' - xy = 0$.

5. $(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x-2)y = 0$.

6. $(x^3 - 3x^2 + 2x)y'' + 2(x^2 - 3x + 1)y' - 2y = 0$.

Besselova[11] **diferencialna enačba***:*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

ima za $\nu \notin \mathbb{Z}$ *splošno rešitev:*

$$y = C_1\,J_\nu(x) + C_2\,J_{-\nu}(x)\,,$$

kjer so J_ν *Besselove funkcije prve vrste. Za* $\nu \in \mathbb{Z}$ *pa to ne zajame vseh rešitev, saj v tem primeru velja* $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$*. Tedaj lahko splošno rešitev izrazimo v obliki:*

$$y = C_1\,J_\nu(x) + C_2\,Y_\nu(x)\,,$$

kjer so Y_ν *Besselove funkcije druge vrste.*

7. Zapišite splošno rešitev diferencialne enačbe $4x^2y'' + 4xy' + \bigl(x - \frac{1}{36}\bigr)y = 0$. Omejite se na primer, ko je $x > 0$.
   Namig: uvedite $x = t^2$.

8. Zapišite splošno rešitev diferencialne enačbe $xy'' + 5y' + xy = 0$.
   Namig: uvedite $u = x^2y$.

9. Poiščite linearno diferencialno enačbo drugega reda, katere splošna rešitev je enaka:

$$y = \frac{C_1\,J_{3/2}(x) + C_2\,J_{-3/2}(x)}{x}\,.$$

[11] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), nemški astronom, matematik, fizik in geodet

REŠITVE

1. Uvod

1. Odvajamo:

$$y' = 2ab\,x\,e^{bx^2}$$

in dobimo, da je funkcija rešitev natanko tedaj, ko je bodisi $b = 1/2$ in a poljuben bodisi $a = 0$ in b poljuben. Prva možnost:

$$y = a\,e^{x^2/2}$$

zajema vse rešitve predpisane oblike.

Opomba: kasneje bomo videli, da ta družina rešitev zajema vse klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih: glej 13. nalogo iz 2. razdelka.

2. a) Vstavimo v enačbo in dobimo $2\lambda(\lambda-1)x^\lambda - 7\lambda x^\lambda + 9x^\lambda = 0$. To je res za vse $x > 0$, samo če je $2\lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$, torej za $\lambda = 3/2$ in $\lambda = 3$.

b) Na $(0, \infty)$ so klasične rešitve vse funkcije oblike $y = C_1\,x\sqrt{x} + C_2\,x^3$.

Na $(-\infty, 0)$ so klasične rešitve vse funkcije oblike $y = C_1\,x\sqrt{-x} + C_2\,x^3$.

Na $\mathbb{R}$ so klasične resitve vse funkcije oblike $y = C_2\,x^3$. Funkcij $y = x\sqrt{x}$ in $y = x\sqrt{-x}$ namreč za $x = 0$ ni možno razširiti do dvakrat zvezno odvedljive funkcije.

Klasične rešitve na $\mathbb{R}$ pa so tudi funkcije:

$$y = \begin{cases} C_2^- x^3 & ;\ x \le 0\,, \\ C_2^+ x^3 & ;\ x \ge 0\,, \end{cases}$$

kjer sta C_2^- in C_2^+ poljubni realni števili.

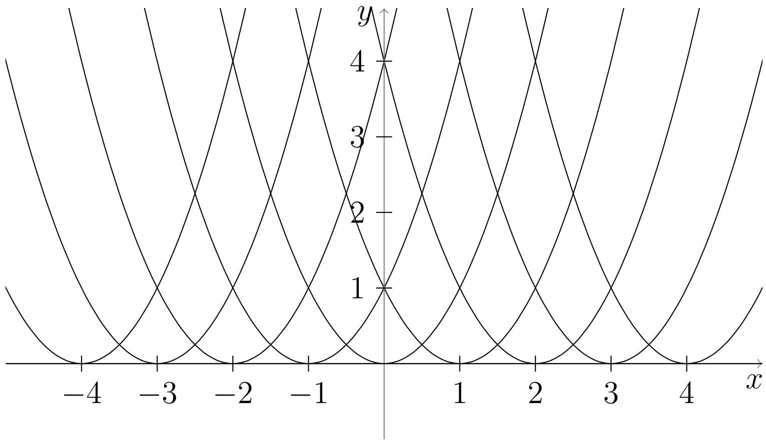
3. a) Nastavimo $y = ax^2 + bx + c$ in izračunamo:

$$y' = 2ax + b\,, \qquad y'^2 = 4a^2x^2 + 4abx + 4b^2\,.$$

Izenačimo s $4y = 4ax^2 + 4bx + c$ ter dobimo $a^2 - a$, $ab = b$ in $c = b^2/4$. Dobimo dve možnosti:

- $a = 1$, b poljuben, $c = b^2/4$. Dobimo funkcijo $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$.
- $a = b = c = 0$. Dobimo funkcijo $y = 0$.

Slika:



b) Še nekaj rešitev:

- $y = (x-p)^2$
- $y = 0$
- $y = \begin{cases} 0 & ; \; x \le q \\ (x-q)^2 & ; \; x \ge q \end{cases}$
- $y = \begin{cases} (x-p)^2 & ; \; x \le p \\ 0 & ; \; x \ge p \end{cases}$
- $y = \begin{cases} (x-p)^2 & ; \; x \le p \\ 0 & ; \; p \le x \le q \\ (x-q)^2 & ; \; x \ge q \end{cases}$

Izkaže se, da ima vsaka klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu, eno izmed teh oblik.

4. $y' = -y^2$.

5. $yy'' = y'^2$.

6. $y'' = -y$.

2. Enačbe prvega reda

1. a) V diferencialni obliki se enačba glasi:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y$$

in po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$e^{-y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\,,$$

kar se zintegrira v:

$$-e^{-y} = x + C\,,$$

kjer je C konstanta: slednje mora veljati za vsako klasično rešitev, definirano na odprtem intervalu. Izrazimo y in dobimo:

$$y = -\ln(-x - C)\,.$$

Vsaka klasična rešitev dane diferencialne enačbe, definirana na odprtem intervalu, je zožitev katere od zgornjih funkcij na ta interval.

b) Pri $x = 0$ in $y = 1$ dobimo $C = -1/e$, torej partikularno rešitev $y = -\ln\left(\frac{1}{e} - x\right)$. Maksimalni interval, na katerem je definirana, je $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$.

2. a) V diferencialni obliki se enačba glasi:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy^2$$

in po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2x\,\mathrm{d}x\,,$$

Pri tem smo delili z y^2. To pomeni, da bomo morali rešitve, pri katerih je v določeni točki $y = 0$ (z drugimi besedami, imajo vsaj eno ničlo) obravnavati posebej.

A najprej se posvetimo glavnini problema – enačbi z ločenima spremenljvkama. Ta se zintegrira v:

$$\frac{1}{y} = x^2 + C$$

oziroma:

$$y = \frac{1}{x^2 + C}\,.$$

Dobljene funkcije so vse brez ničel. Obravnavajmo sedaj še rešitve z ničlami. Opazimo, da je $y = 0$ klasična rešitev dane enačbe. To pa je tudi edina rešitev, ki ima ničle: pokazali bomo, da ni klasične rešitve $y = h(x)$, ki bi bila definirana na določenem odprtem intervalu I ter bi bila v določeni točki enaka nič, v določeni pa ne bi bila nič. Če bi bilo to res, bi namreč obstajal tudi odprt interval $J \subseteq I$, na katerem funkcija h ne bi bila enaka nič, v določenem krajišču x_0, ki bi bilo v I, pa bi bila enaka nič. Toda na celotnem intervalu J bi se morala funkcija h ujemati s katero od funkcij $y = \frac{1}{x^2+C}$, te pa niso nikjer enake nič. Torej limita funkcije h, ko bi šel argument iz J proti x_0, ne bi bila enaka nič. Glede na to, da je $h(x_0) = 0$, pa je to v nasprotju z zveznostjo, torej h ne bi bila klasična rešitev dane enačbe.

Sklep: vse klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih, so zožitve katere od funkcij:

$$y = \frac{1}{x^2 + C} \,;\ C \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad y = 0\,.$$

3. a) V diferencialni obliki se enačba glasi:

$$\frac{x^2 \, \mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$$

in po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,.$$

Pri tem smo delili z x^2 in y^2, kar pomeni, da bomo morali rešitve, pri katerih je v določeni točki $x = 0$ ali $y = 0$, obravnavati posebej.

A najprej se posvetimo glavnini problema – enačbi z ločenima spremenljvkama. Ta se zintegrira v:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$$

oziroma:

$$y = -\frac{x}{1 - Cx}\,.$$

Vsaka klasična rešitev dane enačbe, definirana na odprtem intervalu, ki ne vsebuje izhodišča, in ki je brez ničel, je te oblike.

Oglejmo si zdaj vse rešitve, definirane na odprtih intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča. Najprej opazimo, da je $y = 0$ rešitev enačbe. Ker limita nobene od funkcij $y = -\frac{x}{1-Cx}$, ko gre x proti točki, ki ni enaka nič, ni enaka nič, so vse klasične rešitve dane enačbe, definirane na intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča, zožitve ene od funkcij:

$$y = -\frac{x}{1 - Cx} \,;\ C \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad y = 0\,.$$

Oglejmo si še klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih, ki vsebujejo izhodišče, torej na intervalih oblike (a, b), kjer je $a < 0 < b$. Po prejšnjem za $a < x < 0$ velja $y = h_-(x)$, kjer je bodisi $h_-(x) = 0$ bodisi obstaja taka konstanta C_-, da je $h_-(x) = -\frac{x}{1-C_-x}$. Podobno za $0 < x < b$ velja $y = h_+(x)$, kjer je bodisi $h_+(x) = 0$ bodisi obstaja taka konstanta C_+, da je $h_+(x) = -\frac{x}{1-C_+x}$. Funkciji h_+ in h_- se dasta v vsakem primeru razširiti do zvezno odvedljivih funkcij okoli izhodišča. Če želimo, da je y klasična rešitev, torej zvezno odvedljiva funkcija, se morata v izhodišču ujemati tako funkciji h_+ in h_- kot tudi njuna odvoda. Funkciji h_+ in h_- sta v izhodišču v vsakem primeru obe enaki nič, odvod funkcije $y = -\frac{x}{1-Cx}$ pa je v izhodišču vedno enak -1 – ne glede na konstanto C. Torej bosta morali biti bodisi obe funkciji enaki 0 bodisi bosta morali biti obe oblike $y = -\frac{x}{1-Cx}$. Klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih, ki vsebujejo izhodišče, so torej oblike:

$$y = \begin{cases} -\frac{x}{1-C_- x} & ; x \le 0 \\ -\frac{x}{1-C_+ x} & ; x \ge 0 \end{cases} \quad ; \; C_+, C_- \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad y = 0 \,.$$

4. a) V diferencialni obliki se enačba glasi:

$$\frac{x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$$

in po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \,.$$

Pri tem smo delili z x in y^2. Ker iščemo le splošno rešitev, deljenje z x ni težava, pozornost pa bomo morali posvetiti primeru, ko je $y = 0$.

A najprej se posvetimo glavnini problema – enačbi z ločenima spremenljvkama. Ta se zintegrira v:

$$-\frac{1}{y} = \ln|x| + C$$

oziroma:

$$y = -\frac{1}{\ln|x| + C} \,.$$

Vsaka klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu, ki ne vsebuje izhodišča, in ki nima ničel, je te oblike.

Oglejmo si zdaj vse rešitve, definirane na odprtih intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča. Najprej opazimo, da je $y = 0$ rešitev enačbe. Ker limita nobene od funkcij $y = -\frac{1}{\ln|x|+C}$, ko gre x proti točki, ki ni enaka nič, ni enaka nič, so vse klasične rešitve dane enačbe, definirane na intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča, zožitve ene od funkcij:

$$y = -\frac{1}{\ln|x| + C} \,; \; C \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad y = 0 \,.$$

To je tudi splošna rešitev dane enačbe.

5. V diferencialni obliki se enačba glasi:

$$2x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \,.$$

Spremenljivki lahko ločimo, če delimo z x in y. Če se torej omejimo na območje, kjer je $x \ne 0$ in $y \ne 0$, je izvirna enačba ekvivalentna enačbi:

$$\frac{2\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \,,$$

ki se zintegrira v:

$$2\ln|y| = \ln|x| + C\,,$$

kjer je C konstanta: slednje mora veljati za vsako klasično rešitev, ki je definirana na odprtem intervalu, ki je vsebovan v $(-\infty, 0)$, in ki nima ničel. Iz začetnega pogoja dobimo $C = \ln 4$. Izrazimo y in dobimo:

$$y = \pm 2\sqrt{|x|}\,.$$

Spet upoštevamo začetni pogoj in definicijsko območje. Tako dobimo:

$$y = -2\sqrt{-x}\,.$$

Vsaka klasična rešitev dane enačbe skupaj z začetnim pogojem je na vsakem odprtem intervalu $J \subseteq (-\infty, 0)$, ki vsebuje -4 in kjer nima ničel, enaka zgornji funkciji. Ker pa zgornja funkcija v nobeni točki iz $(-\infty, 0)$ nima limite nič, to pomeni tudi, da je vsaka klasična rešitev dane enačbe skupaj z začetnim pogojem, definirana na $(-\infty, 0)$, enaka zgornji funkciji.

Vzemimo sedaj poljubno klasično rešitev, ki je definirana na nekem odprtem intervalu J in izpolnjuje začetni pogoj. Pokažimo, da J ne more vsebovati izhodišča. Če bi, bi vseboval tudi interval $(-4, 0)$, kjer pa bi moralo biti $y = -2\sqrt{-x}$, torej $y' = 1/\sqrt{-x}$. Slednja funkcija pa se ne da zvezno razširiti v 0.

Če je torej J interval, na katerem je definirana določena klasična rešitev, ki izpolnjuje začetni pogoj, mora biti $J \subseteq (-\infty, 0)$, rešitev pa mora biti oblike $y = -2\sqrt{-x}$. Brž ko J ni celoten interval $(-\infty, 0)$, to ni maksimalni interval, saj se da rešitev razširiti na $(-\infty, 0)$. Edina možnost je torej funkcija $y = -2\sqrt{-x}$, definirana na $(-\infty, 0)$.

6. a) Enačbo prepišemo v obliki $y' = f(x, y)$, kjer je $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2}\,|y|$. Funkcija f je očitno zvezna v x. S preprosto analizo funkcije ene spremenljivke vidimo, da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2}$. Torej je $|f(x, y) - f(x, z)| \le \frac{1}{2}\big||y| - |z|\big| \le \frac{1}{2}\big(|y| - |z|\big)$, kar pomeni, da je f res lokalno Lipschitzeva. Pogoji izreka so torej izpolnjeni.

b) Enačbo zapišemo v diferencialni obliki in ločimo spremenlljivki:

$$\frac{\mathrm{d}y}{|y|} = \frac{x}{1 + x^2}\,.$$

Pri tem smo sicer delili z y, a izkaže se, da nam eksistenčni izrek pomaga premostiti to težavo. Lotimo se najprej prvega začetnega pogoja $y(0) = 1$. Velja $y(0) > 0$. Recimo, da je *povsod* $y > 0$. Tedaj se enačba zintegrira v:

$$\ln y = \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C\,.$$

Če vstavimo $x = 0$ in $y = 1$, dobimo $C = 0$. Rešimo na y in dobimo rešitev:

$$y = \sqrt{1 + x^2}\,.$$

Zaradi enoličnosti je to *edina* klasična rešitev dane enačbe pri začetnem pogoju $y(0) = 1$. Eksistenčni izrek nam pove, da mora biti povsod $y > 0$, zato primera, ko je $y = 0$, pri tem začetnem pogoju ni treba posebej obravnavati.

Podobno obravnavamo enačbo pri začetnem pogoju $y(0) = -1$. Recimo, da je povsod $y < 0$. Tedaj dobi enačba obliko:

$$-\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln(-y) = -\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,.$$

Če vstavimo $x = 0$ in $y = -1$, dobimo $C = 0$. Rešimo na y in dobimo rešitev:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Zaradi enoličnosti v eksistenčnem izreku je to edina klasična rešitev, za katero je $y(0) = -1$.

Pri začetnem pogoju $y(0) = 0$ pa uganemo rešitev $y = 0$. Spet zaradi enoličnosti v eksistenčnem izreku je to edina rešitev.

c) Po ločitvi spremenljivk in integraciji dobimo, da so vse klasične rešitve, kjer je povsod $y > 0$, oblike:

$$y = e^C\sqrt{1+x^2}\ ; \quad C \in \mathbb{R}$$

ali ekvivalentno:

$$y = A\sqrt{1+x^2}\ ; \quad A > 0\,.$$

Nadalje so vse klasične rešitve, kjer je povsod $y < 0$, oblike:

$$y = -\frac{e^C}{\sqrt{1+x^2}}\ ; \quad C \in \mathbb{R}$$

ali ekvivalentno:

$$y = -\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}\ ; \quad A > 0\,.$$

Naj bo zdaj $y = h(x)$ poljubna klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu. Vzemimo točko x_0 iz tega intervala in naj bo $y_0 = h(x_0)$. Tedaj je y tudi rešitev ustrezne začetne naloge. Če je $y_0 > 0$, ima ta začetna naloga rešitev:

$$y = y_0\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

in funkcija h se mora povsod, kjer je definirana, ujemati s to rešitvijo. Če je $y_0 < 0$, ima ta začetna naloga rešitev:

$$y = y_0\,\frac{\sqrt{1+x_0^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

in funkcija h se mora spet povsod, kjer je definirana, ujemati s to rešitvijo. Če pa je $y_0 = 0$, mora biti povsod $h(x) = 0$. Vse klasične rešitve dane enačbe, definirane na odprtih intervalih, so torej oblike:

$$y = A\sqrt{1+x^2} \quad \text{ali} \quad y = -\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}\ ; \quad A > 0$$

ali pa $y = 0$.

7. Na podlagi prvih nekaj približkov:

$$\begin{aligned}
h_0(x) &= 2\,,\\
h_1(x) &= 2 + \int_0^x (2-t)\,\mathrm{d}t = 2 + 2x - \frac{x^2}{2}\,,\\
h_2(x) &= 2 + \int_0^x \left(2 + 2t - \frac{t^2}{2} - t\right)\,\mathrm{d}t = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\,,\\
h_3(x) &= 2 + \int_0^x \left(2 + 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} - t\right)\,\mathrm{d}t = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}
\end{aligned}$$

postavimo domnevo, da za $n = 2, 3, 4, \ldots$ velja:

$$h_n(x) = 2 + 2x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,.$$

Domnevo preverimo tako, da izračunamo:

$$\begin{aligned}
2 + \int_0^x \bigl(h_n(t) - t\bigr)\mathrm{d}t &= 2 + \int_0^x \left(2 + 2t + \sum_{k=2}^{n} \frac{t^k}{k!} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - t\right)\mathrm{d}t = \\
&= 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \\
&= 2 + 2x + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \\
&= h_{n+1}(x)\,.
\end{aligned}$$

Rešitev enačbe pa je:

$$y = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 2 + 2x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + e^x\,.$$

8. a) Pogoji globalnega eksistenčnega izreka niso izpolnjeni, saj za $f(x,y) = y^2$ velja $f_y(x,y) = 2y$, kar ni omejena funkcija. Pač pa so izpolnjeni pogoji lokalnega eksistenčnega izreka.

b) Ločimo spremenljivki:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x\,.$$

Pri ločitvi spremenljivk smo delili z y, a ponovno se izkaže, da nas možnosti, ko je $y = 0$, reši eksistenčni izrek. Integriramo:

$$-\frac{1}{y} = x + C\,,$$

vstavimo $x = 0$, $y = 1$ in dobimo $C = -1$. Torej je:

$$y = \frac{1}{1-x}$$

klasična rešitev, definirana na intervalu $(-\infty, 1)$. Ker enačba izpolnjuje pogoje lokalnega eksistenčnega izreka, je to edina rešitev na tem intervalu. Te rešitve ni možno (kot zvezno odvedljive funkcije) razširiti na noben večji interval: dobljeni interval je maksimalen.

9. a) Pogoji globalnega eksistenčnega izreka niso izpolnjeni, saj za $f(x, y) = y \ln y$ velja $f_y(x, y) = \ln y + 1$, kar ni omejena funkcija. Pač pa so izpolnjeni pogoji lokalnega eksistenčnega izreka.

b) Ločimo spremenljivki:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \mathrm{d}x$$

in integriramo:

$$\ln |\ln y| = x + C\,.$$

Zaenkrat smo privzeli, da je $\ln y \neq 0$, torej $y \neq 1$. Za $\ln y > 0$, torej $y > 1$, dobimo $\ln \ln y = x + C$. Če vstavimo $x = 0$ in $y = a$, kjer je $a > 1$, dobimo $C = \ln \ln a$. Vstavimo v enačbo, antilogaritmiramo in dobimo $y = a^{e^x}$. Podobno za $\ln y < 0$, torej $y < 1$, dobimo $\ln(-\ln y) = x + C$. Če vstavimo $x = 0$ in $y = a$, kjer je $a < 1$, dobimo $C = \ln(-\ln a)$. Vstavimo v enačbo, antilogaritmiramo in spet dobimo $y = a^{e^x}$.

Dokazali smo torej, da ima začetna naloga za $a \neq 1$ rešitev $y = a^{e^x}$. To brez težav preverimo tudi pri $a = 1$. Rešitve so torej definirane globalno, na celi realni osi, čeprav pogoji globalnega eksistenčnega izreka niso izpolnjeni.

Ker so izpolnjeni pogoji lokalnega eksistenčnega izreka, velja enoličnost – ta velja globalno. Torej je $y = a^{e^x}$ vselej edina klasična rešitev dane začetne naloge, definirana na odprtem intervalu, ki vsebuje izhodišče.

10. Po ločitvi spremenljivk dobimo $y^{-2/3}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, kar se zintegrira v $3y^{1/3} = x + C$ oziroma:

$$y = \left(\frac{x + C}{3}\right)^3.$$

Te funkcije imajo ničlo in glede na to, da smo delili z y, moramo to preveriti posebej. Ni težko preveriti, da so to res rešitve enačbe, niso pa edine. Še nekaj rešitev:

- $y = 0$
- $y = \begin{cases} 0 & ;\ x \leq q \\ \left(\frac{x-q}{3}\right)^3 & ;\ x \geq q \end{cases}$
- $y = \begin{cases} \left(\frac{x-p}{3}\right)^3 & ;\ x \leq p \\ 0 & ;\ x \geq p \end{cases}$
- $y = \begin{cases} \left(\frac{x-p}{3}\right)^3 & ;\ x \leq p \\ 0 & ;\ p \leq x \leq q \\ \left(\frac{x-q}{3}\right)^3 & ;\ x \geq q \end{cases}$

Izkaže se, da ima vsaka klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu, eno izmed teh oblik.

Nobena začetna naloga za to enačbo torej nima enolične rešitve. To se lahko zgodi zato, ker pogoji lokalnega eksistenčnega izreka tu niso izpolnjeni – funkcija $f(x,y) = y^{2/3}$ v okolici množice $y = 0$ ni Lipschitzeva.

11. Po ločitvi spremenljivk dobimo $y^{-1/3}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, kar se zintegrira v $\frac{3}{2}y^{2/3} = x + C$ oziroma:

$$y = \pm\left(\frac{2(x+C)}{3}\right)^{3/2}.$$

Te rešitve so definirane za $x > -C$, vendar jih je možno še podaljšati v:

$$y = \begin{cases} 0 & ;\ x \le -C \\ \pm\left(\frac{2(x+C)}{3}\right)^{3/2} & ;\ x \ge -C\,. \end{cases}$$

Tudi $y = 0$ je rešitev enačbe. Izkaže se, da ima vsaka klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu, eno izmed teh oblik.

Če predpišemo začetni pogoj $y(x_0) = y_0$, ima torej pri $y_0 \neq 0$ začetna naloga enolično rešitev, pri $y_0 \neq 0$ pa je nima. To se lahko zgodi zato, ker pogoji lokalnega eksistenčnega izreka tu niso izpolnjeni – funkcija $f(x,y) = y^{1/3}$ v okolici množice $y = 0$ ni Lipschitzeva.

12. a) Tudi pri tej enačbi lahko ločimo spremenljivke:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{3\,\mathrm{d}x}{x}\,,$$

a pri tem smo delili z x in y. Če gledamo le splošno rešitev, lahko primer, ko je $x = 0$, na koncu preprosto priključimo, posebej pa bo treba obravnavati primer, ko je $y = 0$.

A najprej se posvetimo glavnini problema – enačbi z ločenima spremenljvkama. Ta se zintegrira v:

$$\ln|y| = 3\ln|x| + C\,.$$

Dobimo dve družini rešitev: $y = e^{3\ln|x|+C}$ in $y = -e^{3\ln|x|+C}$, pri čemer C preteče $\mathbb{R}$. To je ekvivalentno $y = e^C|x|^3$ in $y = -e^C|x|^3$. To pa lahko parametriziramo tudi v obliki $y = A|x|^3$, pri čemer A preteče $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. To so torej klasične rešitve enačbe na vsakem odprtem intervalu, ki ne vsebuje izhodišča in ki so brez ničel. Parametrizacijo lahko poenostavimo kar v $y = Ax^3$ – po potrebi A zamenjamo z $-A$.

Zdaj pa se lotimo primera, ko ima klasična rešitev y ničle. Opazimo, da je $y = 0$ klasična rešitev. Z drugimi besedami, klasičnim rešitvam lahko dodamo primer, ko je $A = 0$. Potem pa velja, da, brž ko ima klasična rešitev kakšno ničlo, ta rešitev in rešitev $y = 0$ izpolnjujeta isti začetni pogoj. A ker enačba izpolnjuje pogoje lokalnega eksistenčnega izreka, se morata rešitvi ujemati. Vsaka klasična rešitev je torej bodisi povsod enaka nič bodisi povsod različna od nič.

Vse klasične rešitve na intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča, so torej oblike $y = Ax^3$, kjer je $A \in \mathbb{R}$. Te tvorijo tudi splošno rešitev za primer, ko je $x \neq 0$. Ker lahko izolirane točke priključimo, tvorijo splošno rešitev tudi za $x \in \mathbb{R}$.

b) Vsaka klasična rešitev, definirana na celi realni osi, je na $(-\infty, 0)$ oblike $y = A_1x^3$, na $(0, \infty)$ pa oblike $y = A_2x^3$. Iz začetnega pogoja sledi, da je $A_1 = 0$. Iz zveznosti sledi, da mora biti rešitev oblike:

$$y = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ Ax^3 & ; x \ge 0\,. \end{cases}$$

Vse te funkcije so zvezno odvedljive in vemo že, da zadoščajo dani diferencialni enačbi tako za $x < 0$ kot tudi za $x > 0$. Posebej preverimo, da ji zadoščajo tudi za $x = 0$ (tam je tako $y = 0$ kot tudi $y' = 0$). Torej so vse te funkcije (za vse $A \in \mathbb{R}$) tudi klasične rešitve dane enačbe in so edine, ki izpolnjujejo dani začetni pogoj.

13. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x\,.$$

Pri tem smo delili z y, kar pomeni, da bomo morali primer, ko je $y = 0$, obravnavati posebej. A zaenkrat se posvetimo enačbi z ločenima spremenljivkama, ki jo zintegriramo v:

$$\ln\frac{y}{C} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Antilogaritmiramo in dobimo $y = C\,e^{x^2/2}$.

Dobili smo, da so vse rešitve, kjer je ves čas $y \neq 0$, oblike $y = C\,e^{x^2/2}$. Funkcija $y = 0$ pa je prav tako rešitev enačbe, torej lahko rešitvam dodamo primer, ko je $C = 0$.

S tem smo zajeli vse klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih. Brž ko ima namreč klasična rešitev kakšno ničlo, ta rešitev in rešitev $y = 0$ izpolnjujeta isti začetni pogoj. A ker enačba izpolnjuje pogoje lokalnega eksistenčnega izreka, se morata rešitvi ujemati. Vsaka klasična rešitev je torej bodisi povsod enaka nič bodisi povsod različna od nič.

14. Da ločimo spremenljivke, moramo deliti z x in $y^2 - 9$:

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2 - 9} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Rešitve, kjer je v določeni točki bodisi $x = 0$ bodisi $y^2 - 9 = 0$, torej $y = \pm 3$, bomo torej morali obravnavati posebej. Opazimo, da je leva stran, pomnožena z 2, oblike $g'(y)/g(y)$, kjer je $g(y) = y^2 - 9$. Torej lahko enačbo integriramo v:

$$\ln\frac{y^2 - 9}{C} = 2\ln|x|\,.$$

Obrnemo in dobimo:
$$y^2 - 9 = C|x|^2 = Cx^2 \,.$$
Rešitev dobimo tudi pri $C = 0$ in vse klasične rešitve prvotne enačbe, definirane na odprtih intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča, so te oblike. Če je namreč y klasična rešitev dane enačbe, je spremenljivka $z = y^2 - 9$ rešitev enačbe $z' = \frac{2z}{x}$, ta pa na odprtih intervalih, ki ne vsebujejo izhodišča, izpolnjuje pogoje lokalnega eksistenčnega izreka. Brž ko je torej z v neki točki enak nič, mora biti povsod enak nič.

Izrazimo y in dobimo:
$$y = \pm\sqrt{Cx^2 + 9} \,.$$
Tudi vsi zvezno odvedljivi zlepki zgornjih funkcij okoli ničle so take oblike, zato so take oblike tudi vse klasične rešitve prvotne enačbe, definirane na kakršnih koli odprtih intevalih. Začetni pogoj nam da $-1 = -\sqrt{4C + 9}$ oziroma $C = -2$. Iskana rešitev je torej:
$$y = -\sqrt{9 - 2x^2} \,,$$
maksimalni interval, na katerem je definirana, pa je $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

15. Naj bo $T(t)$ temperatura piva po t pretečenih minutah. Iz fizikalnih eksperimentov vemo, da se temperatura T spreminja v skladu z diferencialno enačbo:
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_\mathrm{s}) \,,$$
kjer je $T_\mathrm{s} = 25°\mathrm{C}$ temperatura sobe. Po ločitvi spremenljivk dobimo:
$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_\mathrm{s}} = k\,\mathrm{d}t \,,$$
kar se zintegrira v:
$$\ln\frac{T - T_\mathrm{s}}{C} = kt$$
oziroma $T = T_\mathrm{s} + C\,e^{kt}$. Iz $T(0) = T_0 = 4°\mathrm{C}$ in $T(t_1) = T_1 = 7°\mathrm{C}$, kjer je $t_1 = 10\mathrm{min}$, tako po nekaj računanja dobimo:
$$T(t) = T_\mathrm{s} - (T_\mathrm{s} - T_0)\left(\frac{T_\mathrm{s} - T_1}{T_\mathrm{s} - T_0}\right)^{t/t_1}$$
in posledično $T(20\,\mathrm{min}) \doteq 9{\cdot}6°\mathrm{C}$.

16. Označimo z $V = 100\,\mathrm{l}$ volumen posode, s $T_0 = 10°\mathrm{C}$ začetno temperaturo vode v posodi, s $T_\mathrm{p} = 30°\mathrm{C}$ temperaturo vode, ki priteka v posodo, in s $\Phi = 1\,\mathrm{l/s}$ pretok vode v posodo. Nadalje naj bo T temperatura vode v posodi ob danem času t.

V infinitezimalno majhnem času $\mathrm{d}t$ priteče v posodo $\Phi\,\mathrm{d}t$ vode s temperaturo T_p, izteče pa prav tako $\Phi\,\mathrm{d}t$ vode s temperaturo, za katero lahko privzamemo, da ima temperaturo T (za strogo utemeljitev tega privzetka glej spodaj; rešitev se sicer šteje kot popolna tudi brez te utemeljitve). Tako se zmeša $V - \Phi\,\mathrm{d}t$ vode s temperaturo T in $\Phi\,\mathrm{d}t$ vode s temperaturo T_p. Mešanica ima temperaturo:

$$\frac{\big(V - \Phi\,\mathrm{d}t\big)T + \Phi\,\mathrm{d}t\,T_\mathrm{p}}{V} = T + \frac{(T_\mathrm{p} - T)\Phi}{V}\,\mathrm{d}t\,,$$

od koder dobimo diferencialno enačbo:

$$\mathrm{d}T = \frac{(T_\mathrm{p} - T)\Phi}{V}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (*)$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_\mathrm{p}} = -\frac{\Phi}{V}\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{T - T_\mathrm{p}}{C} = -\frac{\Phi t}{V}$$

oziroma:

$$T = T_\mathrm{p} + C\,e^{-\Phi t/V}\,.$$

Ker je temperatura ob času $t = 0$ enaka T_0, je $C = T_0 - T_\mathrm{p}$. Odvisnost temperature od časa je tako določena s formulo:

$$T = T_\mathrm{p} + (T_0 - T_\mathrm{p})\,e^{-\Phi t/V}\,.$$

Ko vstavimo konkretne številke iz naloge, dobimo, da temperatura po eni minuti znaša približno 19°C.

Stroga izpeljava diferencialne enačbe $(*)$**:** Oglejmo si, kakšna zveza mora veljati med temperaturama ob časih t_1 in t_2, kjer je $t_1 \le t_2$. V tem časovnem intervalu v posodo priteče $\Phi(t_2 - t_1)$ vode s temperaturo T_p, odteče pa prav toliko vode, ki pa ima temperaturo nekje med $T(t_1)$ in T_p.

V časovnem intervalu od t_1 do t_2 z novo vodo pride v posodo $c\rho T_\mathrm{p}\Phi(t_2 - t_1)$ toplotne energije, kjer je c specifična toplota, ρ pa gostota vode. Obenem pa posodo zapusti med $c\rho T(t_1)\Phi(t_2 - t_1)$ in $c\rho T_\mathrm{p}\Phi(t_2 - t_1)$ toplote. Če s $Q(t)$ označimo toplotno energijo vode v posodi ob času t, dobimo, da $Q(t_2) - Q(t_1)$ leži med 0 in $c\rho\big(T(t_1) - T_\mathrm{p}\big)\Phi(t_2 - t_1)$, torej je:

$$|Q(t_2) - Q(t_1)| \le c\rho\big(T(t_1) - T_\mathrm{p}\big)\Phi(t_2 - t_1)\,,$$

od koder sledi, da je:

$$|T(t_2) - T(t_1)| \le k(t_1)(t_2 - t_1)\,, \qquad (**)$$

kjer je $k(t) := |T(t) - T_\mathrm{p}|\Phi/V$.

Zgornja ocena je še premalo natančna, da bi lahko iz nje izpeljali diferencialno enačbo $(*)$. Vseeno pa iz nje dobimo, da je $T(t)$, z njo pa tudi $k(t)$ na vsakem omejenem intervalu omejena funkcija.

Da dobimo diferencialno enačbo $(*)$, bo potrebno zgornji premislek narediti še enkrat, pri čemer pa bomo grobo oceno za temperaturo vode, ki izteka, zamenjali z oceno $(**)$. V posodo torej priteče $\Phi(t_2 - t_1)$ vode s temperaturo T_p, odteče pa prav toliko vode, ki ima temperaturo v intervalu:

$$[T(t_1) - k(t_1)(t_2 - t_1),\ T(t_1) + k(t_1)(t_2 - t_1)]\,.$$

Kot bomo videli, je ta ocena že dovolj natančna, da lahko rečemo "voda, ki v infinitezimalnem času $\mathrm{d}t$ odteče, ima temperaturo T" in izpeljemo diferencialno enačbo $(*)$. Za ta namen moramo, če izpeljujemo strogo, spet najprej oceniti razliko toplot:

$$\begin{aligned} c\rho\Phi(t_2 - t_1)\big(T_\mathrm{p} - T(t_1) - k(t_1)(t_2 - t_1)\big) &\le Q(t_2) - Q(t_1) \le \\ &\le c\rho\Phi(t_2 - t_1)\big(T_\mathrm{p} - T(t_1) + k(t_1)(t_2 - t_1)\big) \end{aligned}$$

oziroma:

$$\Big|Q(t_2) - Q(t_1) - c\rho\Phi\big(T_\mathrm{p} - T(t_1)\big)(t_2 - t_1)\Big| \le c\rho\Phi\,k(t_1)\,(t_2 - t_1)^2\,.$$

Sledi:

$$\left|T(t_2) - T(t_1) - \frac{\Phi\big(T_\mathrm{p} - T(t_1)\big)}{V}\,(t_2 - t_1)\right| \le \frac{\Phi\,k(t_1)}{V}\,(t_2 - t_1)^2\,.$$

Če pišemo $t_1 = t$ in $t_2 = t + \tau$ in delimo s τ, dobimo, da za $\tau \ge 0$ velja:

$$\left| \frac{T(t+\tau) - T(t)}{\tau} - \frac{\Phi(T_\mathrm{p} - T(t))}{V} \right| \le \frac{\Phi\, k(t)}{V}\, \tau$$

Če pa pišemo $t_2 = t$ in $t_1 = t + \tau$ in delimo z $-\tau$, dobimo, da za $\tau \le 0$ velja:

$$\left| \frac{T(t) - T(t+\tau)}{-\tau} - \frac{\Phi(T_\mathrm{p} - T(t))}{V} \right| \le \frac{\Phi\, k(t+\tau)}{V}\, (-\tau)\,.$$

Tako dobimo, da za poljubna $t \ge 0$ in $\tau \ge -t$ velja:

$$\left| \frac{T(t+\tau) - T(t)}{\tau} - \frac{\Phi(T_\mathrm{p} - T(t))}{V} \right| \le \frac{\Phi \max\{k(t), k(t+\tau)\}}{V}\, |\tau|\,.$$

Naredimo sedaj limito, ko gre τ proti nič, pri čemer upoštevamo, da je k omejena na vsakem omejenem intervalu. Dobimo:

$$T'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{T(t+\tau) - T(t)}{\tau} = \frac{\Phi(T_\mathrm{p} - T(t))}{V}\,,$$

kar natančno ustreza diferencialni enačbi $(*)$.

17. Spreminjanje temperature piva opisuje diferencialna enačba:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{c(2\pi r h + 2\pi r^2)(T_1 - T)}{\pi r^2 h} = 2c(T_1 - T)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h}\right), \qquad (*)$$

kjer je $T_1 = 32°\mathrm{C}$ zunanja temperatura, $r = 4\,\mathrm{cm}$ polmer vrčka, h pa je višina še preostalega piva. Spreminjanje višine je opisuje enačba:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}\,\frac{t_1 - t}{t_1}\,,$$

kjer je $V = 0{\cdot}5\,\mathrm{l} = 500\,\mathrm{cm}^3$ začetni volumen piva, $t_1 = 30\,\mathrm{min}$ pa je čas, v katerem Zvone spije pivo. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 2c(T_1 - T)\left(\frac{t_1}{t_1 - t}\,\frac{\pi r^2}{V} + \frac{1}{r}\right).$$

Ločimo spremenljivki:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T_1 - T} = 2c\left(\frac{t_1}{t_1 - t}\,\frac{\pi r^2}{V} + \frac{1}{r}\right)\mathrm{d}t$$

in po integraciji pride:

$$\ln\frac{T_1 - T}{a} = 2c\left(t_1\,\frac{\pi r^2}{V}\ln(t_1 - t) - \frac{t}{r}\right).$$

Rešimo na T in dobimo:

$$T = T_1 - a(t_1 - t)^{2\pi c t_1 r^2/V} e^{-2ct/r}\,.$$

Pri $t = 0$ mora biti temperatura enaka $T_0 = 6°\mathrm{C}$, torej mora biti:

$$\Delta T := T_1 - T_0 = a t_1^{2\pi c t_1 r^2/V}\,.$$

Nadalje mora pri $t = 0$ veljati $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = v := 0{\cdot}3°\mathrm{C/min}$. Kar v diferencialno enačbo $(*)$ vstavimo $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = v$, $T = T_0$ in $h = V/\pi r^2$. Dobimo:

$$v = 2c\,\Delta T\left(\frac{1}{r} + \frac{\pi r^2}{V}\right) = \frac{2c\,\Delta T(V + \pi r^3)}{Vr}\,,$$

torej

$$c = \frac{Vvr}{2\Delta T\,(\pi r^3 + V)}\,.$$

Izrazimo še a:

$$a = \frac{\Delta T}{t_1^{2\pi c t_1 r^2/V}}\,.$$

To vstavimo v splošno rešitev enačbe in dobimo:

$$T = T_1 - \Delta T\left(\frac{t_1 - t}{t_1}\right)^{\pi v t_1 r^3/(\Delta T\,(\pi r^3 + V))} e^{-Vvt/(\Delta T\,(\pi r^3+V))}\,.$$

Pri $t = 9t_1/10$ pride $T \doteq 15{\cdot}4°\mathrm{C}$.

18. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{L\,\mathrm{d}x}{x(L-x)} = r\,\mathrm{d}t\,.$$

Razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{L-x} + \frac{1}{x} = r\,\mathrm{d}t$$

in integriramo:

$$\ln\left(\frac{1}{C}\,\frac{x}{L-x}\right) = rt\,.$$

Ob upoštevanju začetnega pogoja dobimo $C = \frac{x_0}{L-x_0}$. Tako dobimo:

$$\frac{L-x_0}{x_0}\,\frac{x}{L-x} = e^{rt}\,,$$

od koder izračunamo:

$$x = \frac{Lx_0}{x_0 + (L-x_0)e^{-rt}}\,.$$

Posebej preverimo, da ta oblika ustreza tudi pri $x_0 = 0$ in $x_0 = L$. Pri $0 < x_0 < L$ dobimo znano *logistično krivuljo*.

19. Odvajamo: $y' = 3Cx^2$ in dobimo, da krivulje zadoščajo diferencialni enačbi:

$$xy' = 3y\,.$$

Ortogonalne trajektorije pa zadoščajo enačbi:

$$-\frac{x}{y'} = 3y$$

oziroma:

$$y\,\mathrm{d}y + \frac{x\,\mathrm{d}x}{3} = 0\,,$$

kar se zintegrira v:

$$x^2 + 3y^2 = D\,.$$

Dobimo torej družino elips.

20. Ko v enačbo vstavimo $y = kx + n$, dobimo, da enačba velja za $k = -\frac{1}{2}$ in $n = 0$. Nastavimo torej $y = z - \dfrac{x}{2}$ in dobimo enačbo:

$$xz' - 3z = 0\,.$$

Ločimo spremenljivki:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = 3\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\,,$$

integriramo in dobimo $\ln\dfrac{z}{C} = 3\ln|x|$ oziroma $z = C|x|^3$, kar lahko nadomestimo z $z = Cx^3$. Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$y = Cx^3 - \frac{x}{2}\,.$$

21. Nastavimo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

in enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} + 1 = 0\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in upoštevamo, da lahko nekatere koeficiente izpustimo, ker so enaki nič:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)c_{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k + 1 = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$1 + c_0 + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(k+1)c_{k+1} + (1-2k)c_k + (k-2)c_{k-1}\Big]x^k = 0\,,$$

od koder sledi, da mora veljati:

$$c_1 = -1 - c_0\,, \quad c_{k+1} = \frac{(2k-1)c_k - (k-2)c_{k-1}}{k+1}\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Rekurzivno izračunamo prvih nekaj členov in dobimo:

$$c_2 = -\tfrac{1}{2}\,,\ c_2 = -\tfrac{1}{2}\,,\ c_4 = -\tfrac{1}{2}\,,$$

nakar z indukcijo dokažemo, da za vse $k = 2, 3, 4, \ldots$ velja $c_k = -\frac{1}{2}$. Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y = c_0 - (1 + c_0)x - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} x^k\,.$$

Če vpeljemo substitucijo $c_0 = A - \frac{1}{2}$, dobimo rešitev še v malo lepši obliki:

$$y = A(1 - x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = A(1 - x) - \frac{1}{2(1 - x)}\,.$$

Opomba. Z razvojem v Taylorjevo vrsto smo dokazali veljavnost rešitve le tam, kjer Taylorjeva vrsta in prvi odvod konvergirata, to pa je za $-1 < x < 1$. Neposredno pa lahko preverimo, da rešitev dobimo povsod na $(-\infty, 1)$ in tudi povsod na $(1, \infty)$.

22. Najprej rešimo homogeni del:

$$\frac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = -\frac{e^x}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \ln\frac{y_H}{C} = -\ln\bigl(e^x + 1\bigr)\,, \qquad y_H = \frac{C}{e^x + 1}\,.$$

Konstanto C nadomestimo s funkcijo z in odvajamo:

$$y = \frac{z}{e^x + 1}\,, \qquad y' = \frac{z'\bigl(e^x + 1\bigr) - z\,e^x}{\bigl(e^x + 1\bigr)^2}\,.$$

Vstavimo v prvotno enačbo, uredimo in dobimo $z' = e^x - 1$, torej $z = e^x - x + C$. Splošna rešitev dane enačbe je torej:

$$y = \frac{e^x - x + C}{e^x + 1}\,.$$

Vstavimo $x = y = 0$ in dobimo $C = -1$. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = \frac{e^x - x - 1}{e^x + 1}\,.$$

23. Delimo z y^4:

$$\frac{3y'}{y^4} + \frac{2}{y^3} = 1 + 3\,e^x$$

in uvedemo $w = \dfrac{1}{y^3}$, $w' = -\dfrac{3y'}{y^4}$. Sledi:

$$-w' + 2w = 1 + 3\,e^x\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$-\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} + 2 = 0\,, \qquad -\ln\frac{w_H}{C} + 2x = 0\,, \qquad w_H = C\,e^{2x}\,,$$
$$w = e^{2x}z\,, \qquad w' = 2\,e^{2x}z + e^{2x}z'\,,$$
$$z' = -e^{-2x} - 3\,e^{-x}\,, \qquad z = \tfrac{1}{2}\,e^{-2x} + 3\,e^{-x} + C\,,$$
$$w = \tfrac{1}{2} + 3\,e^x + C\,e^{2x}\,.$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \left(\tfrac{1}{2} + 3\,e^{x} + C\,e^{2x}\right)^{-1/3}$$

skupaj z rešitvijo $y = 0$, ki je limita zgornjih rešitev, ko gre C proti neskončno.

24. Delimo s $\sqrt[3]{y}$:

$$xy^{-1/3}y' + 3y^{2/3} = \sin x$$

in uvedemo $w = y^{2/3}$, $w' = -\frac{2}{3}y^{-1/3}y'$. Sledi:

$$\frac{3xw'}{2} + 3w = \sin x\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} + \frac{2}{x} = 0\,, \qquad \ln\frac{w_H}{C} + 2\ln|x| = 0\,, \qquad w_H = \frac{C}{x^2}\,,$$

$$w = \frac{z}{x^2}\,, \qquad w' = \frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}\,,$$

$$z' = \tfrac{2}{3}x\sin x\,, \qquad z = \tfrac{2}{3}\big(-x\cos x + \sin x + C\big)\,,$$

$$w = \frac{2\big(-x\cos x + \sin x + C\big)}{3x^2}\,.$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \pm\left(\frac{2\big(-x\cos x + \sin x + C\big)}{3x^2}\right)^{3/2}$$

ali ekvivalentno:

$$y = \pm\frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\big(-x\cos x + \sin x + C\big)^{3/2}\,.$$

Rešitev $y = 0$ je ogrinjača rešitev iz te družine.

25. Odvajamo:

$$2x + 2(y-a)y' = 0\,,$$

izrazimo $a = y + \frac{x}{y'}$ in dobimo, da je dana družina določena z diferencialno enačbo:

$$x^2 = y^2 + \frac{2xy}{y'}\,.$$

Družina ortogonalnih trajektorij je torej določena z diferencialno enačbo:

$$x^2 = y^2 + 2xyy'\,. \qquad (*)$$

Če enačbo delimo z y, dobimo Bernoullijevo enačbo v kanonični obliki. Po uvedbi nove spremenljivke $w = y^2$ dobimo linearno enačbo:

$$x^2 = z - xw'\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} - \frac{1}{x} = 0\,, \qquad \ln\frac{w_H}{C} - \ln x = 0\,, \qquad w_H = C|x| \longrightarrow Cx\,,$$
$$w = xz\,, \qquad w' = z + xz'\,,$$
$$z' = -1\,, \qquad z = -x + C\,,$$
$$w = -x^2 + Cx\,.$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = \pm\sqrt{Cx - x^2}\,.$$

Funkcija $y = 0$ ni rešitev enačbe $(*)$. Kot bomo videli, nobena klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu, nima ničel.

Iskane ortogonalne trajektorije so določene z enačbo:

$$y^2 = Cx - x^2$$

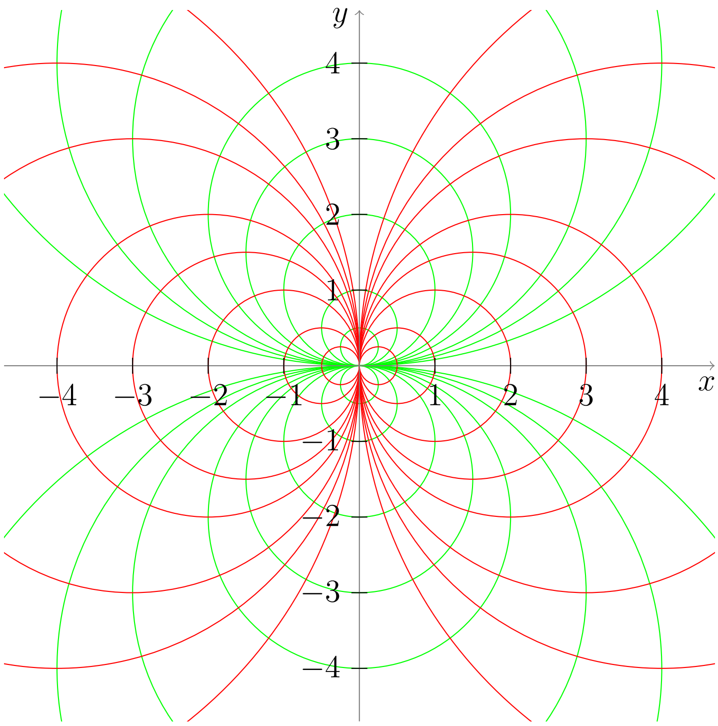
oziroma:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}C\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}C^2\,.$$

oziroma:

$$(x - b)^2 + y^2 = b^2\,.$$

Gre torej spet za družino krožnic. Slika:



Vidimo, da trajektorije sicer sekajo abscisno os, a le navpično. Zato nobena klasična rešitev enačbe $(*)$ nima ničel.

26. Za $y = ax^p$ dobimo:

$$apx^{p-1} = a^2 x^{2p+2} + 2x^{-4}\,.$$

Za vse x lahko to velja le, če je $p = -3$ in $a^2 + 3a + 2 = 0$, torej $a = -1$ ali $a = -2$. Torej lahko nadaljujemo na dva načina.

Prvi način: $y = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{w}$. Po ureditvi dobimo:

$$-\frac{w'}{w^2} = -\frac{2}{xw} + \frac{x^2}{w^2}\,.$$

Množimo z w^2, pri čemer se zavedamo, da lahko s tem pridobimo rešitve. Dobimo:

$$w' - \frac{2w}{x} + x^2 = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} = \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \ln\frac{w_H}{C} = 2\ln|x|\,, \quad w_H = Cx^2\,,$$
$$w = x^2 z\,, \qquad w' = 2xz + x^2 z'\,,$$
$$z'\,x^2 + x^2 = 0\,, \quad z = -x + C\,, \quad w = -x^3 + Cx^2\,.$$

Točke, kjer je $w = 0$, so izločene iz rešitve. Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{Cx^2 - x^3}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{1}{x^3}$.

Drugi način: $y = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{w}$. Po ureditvi dobimo:

$$-\frac{w'}{w^2} = -\frac{4}{xw} + \frac{x^2}{w^2}\,.$$

Množimo z w^2, pri čemer se zavedamo, da lahko s tem pridobimo rešitve. Dobimo:

$$w' - \frac{4w}{x} + x^2 = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} = \frac{4\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \ln\frac{w_H}{C} = 4\ln|x|\,, \quad w_H = Cx^4\,,$$
$$w = x^4 z\,, \qquad w' = 4x^3 z + x^4 z'\,,$$
$$z'\,x^4 + x^2 = 0\,, \quad z = \frac{1}{x} + D\,, \quad w = x^3 + Dx^4\,.$$

Točke, kjer je $w = 0$, so izločene iz rešitve. Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3 + Dx^4}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{2}{x^3}$.

Opomba. Splošni rešitvi, dobljeni na posamezen način, sta na prvi pogled videti različni, vendar v resnici določata isto družino funkcij. Posamezni rešitvi se ujemata, če je $CD = -1$; poleg tega pa se rešitev za $C = 0$ iz prvega načina ujema z izhodiščno rešitvijo iz drugega načina, rešitev za $D = 0$ iz drugega načina pa se ujema z izhodiščno rešitvijo iz prvega načina.

27. Enačba je homogena, ker jo lahko prepišemo v obliki:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,.$$

S substitucijo $z = y/x$, $y = xz$, $y' = z + xz'$ se enačba prevede v obliko:

$$xz' = \operatorname{tg} z\,.$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\operatorname{ctg} z\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \ln\frac{\sin z}{C} = \ln|x|\,, \qquad \sin z = C|x| \longrightarrow Cx\,.$$

Preverimo, da tudi pri $C = 0$ dobimo rešitev. Izrazimo z in nato y ter dobimo dve družini rešitev:

$$y = x\bigl(\arcsin(Cx) + 2k\pi\bigr) \quad \text{in} \quad y = x\bigl(\pi - \arcsin(Cx) + 2k\pi\bigr)\,; \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ker je lahko C poljubno realno število, ga smemo pri drugi družini zamenjati z $-C$. Tako lahko splošno rešitev poenotimo v:

$$y = x\bigl(\arcsin(Cx) + n\pi\bigr)\,; \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Pri danem začetnem pogoju dobimo $k = 3$ in $C = -\sqrt{3}/6$. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = x\left[3\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\,x\right)\right]\,,$$

maksimalni odprt interval, na katerem je definirana, pa je $\bigl(0,\, 2\sqrt{3}\,\bigr)$: čeprav je namreč sama funkcija definirana na intervalu $\bigl[-2\sqrt{3},\, 2\sqrt{3}\,\bigr]$, enačba pri $x = 0$ nima pomena.

28. Enačba je homogena, ker jo lahko zapišemo v obliki:

$$y' = 2\,\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

(za splošno rešitev lahko primer $x = 0$ izločimo). Uvedemo $y = xz$, $y' = z + xz'$ in dobimo:

$$xz' = z - z^2 \qquad (*)$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^2 - z} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Pri tem smo delili z $z^2 - z$, kar pomeni, da bomo morali rešitve, pri katerih je v določeni točki $z = 0$ ali $z = 1$, obravnavati posebej.

A najprej se posvetimo glavnini problema – enačbi z ločenima spremenljvkama, ki jo integriramo v:

$$\ln \frac{z-1}{Cz} = -\ln|x|$$

in antilogaritmiramo:

$$\frac{z-1}{z} = \frac{C}{|x|} \longrightarrow \frac{C}{x}\,.$$

Rešimo na z in dobimo:

$$z = \frac{x}{x - C}\,.$$

Ko C preteče $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, je to splošna rešitev enačbe na množici $E := \{(x, y)\ ;\ x \neq 0, z \neq 0, z \neq 1\}$. Še več, vsaka klasična rešitev enačbe $(*)$, katere graf je vsebovan v E, je zožitev katere od zgornjih funkcij.

Oglejmo si zdaj vse rešitve, definirane na odprtih intervalih, ki ne vsebujejo točke nič. Najprej opazimo, da sta $z = 0$ in $z = 1$ rešitvi enačbe. Ker limita nobene od funkcij $z = \frac{x}{x-C}$, $C \neq 0$, ko gre x proti točki, ki ni enaka nič, ni enaka 0 ali 1, so vse klasične rešitve enačbe $(*)$, definirane na intervalih, ki ne vsebujejo točke nič, zožitve ene od funkcij:

$$z = \frac{x}{x - C}\ ;\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{ali} \quad z = 0 \quad \text{ali} \quad z = 1\,,$$

kar lahko zapišemo tudi krajše:

$$z = \frac{x}{x - C}\ ;\ C \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad z = 0\,.$$

To je torej splošna rešitev enačbe $(*)$. Splošna rešitev prvotne enačbe pa je:

$$y = \frac{x^2}{x - C}\ ;\ C \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad y = 0\,.$$

29. Preverimo eksaktnost:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(x + y) = -1\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - y) = -1$$

in integriramo:

$$\int (2x^3 - y)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{2} - xy + A(y)\,, \qquad -\int (x + y)\,\mathrm{d}y = -xy - \frac{y^2}{2} + B(x)\,.$$

Integrala se ujemata, če postavimo $A(y) = -\dfrac{y^2}{2}$ in $B(x) = \dfrac{x^4}{2}$. Tedaj je $F(x, y) = \dfrac{x^4}{2} - xy - \dfrac{y^2}{2}$. Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y^2 + 2xy = x^4 + C$$

oziroma

$$y = -x \pm \sqrt{x^4 + x^2 + C}\,.$$

30. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left[x^p\left(3\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)\right] &= \frac{2x^{p+1} + 3x^p y}{(x+y)^2}\,, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left[x^p\,\frac{x}{x+y}\right] &= \frac{p\,x^{p+1} + (p+1)x^p y}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

dobimo, da je enačba eksaktna, če jo pomnožimo z x^2. Integriramo:

$$\begin{aligned}
\int\left(3x^2\ln(x+y) + \frac{x^3}{x+y}\,\mathrm{d}x\right) &= x^3\ln(x+y) + A(y)\,, \\
\int \frac{x^3}{x+y}\,\mathrm{d}y &= x^3\ln(x+y) + B(x)
\end{aligned}$$

in vidimo, da se integrala ujemata, če je $A(y) = B(x) = 0$ (pri logaritmu ni absolutne vrednosti, ker je logaritem brez absolutne vrednosti že v sami enačbi in mora biti zato $x + y > 0$). Rešitev enačbe je torej:

$$x^3\ln(x+y) = C$$

oziroma:

$$y = e^{C/x^3} - x\,.$$

3. Posebne linearne enačbe višjih redov

1. Po uvedbi $z = y''$ dobimo:

$$x^2 z' = z^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \,, \qquad z = \frac{x}{1 + Cx} \ \text{ in še } \ z = 0 \,.$$

Zdaj moramo to dvakrat integrirati. Za $z = 0$ dobimo:

$$y = Dx + E \,,$$

za $C = 0$ dobimo:

$$y = \frac{x^3}{6} + Dx + E \,,$$

za $C \neq 0$ pa dobimo:

$$y = \frac{x^2}{2C} - \frac{(1 + Cx)\ln(1 + Cx)}{C^3} + Dx + E \,.$$

2. Na kroglo delujeta sila zračnega upora in sila teže, obe v smeri, nasprotni njenemu gibanju. Po drugem Newtonovem zakonu je seštevek sil enak:

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - cv^2 \,.$$

Ločimo spremenljivke:

$$\frac{m\,\mathrm{d}v}{mg + cv^2} = -\mathrm{d}t \,,$$

pripravimo za integracijo:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 + \frac{c}{mg}\,v^2} = -g\,\mathrm{d}t \,,$$

integriramo:

$$\sqrt{\frac{mg}{c}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v\right) = g(t_0 - t)$$

in izrazimo:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}}\ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t_0 - t)\right) \,.$$

Pri $t = t_0$ je $v = 0$, torej je t_0 ravno čas, ko krogla doseže najvišjo točko. Če ga želimo izračunati, vstavimo $t = 0$, ko mora biti $v = 0$. Dobimo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{m}{cg}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v_0\right) \doteq 9{\cdot}4\,\mathrm{s}\,.$$

Označimo zdaj s h višino, na kateri je krogla. Dobimo jo neposredno z integriranjem:

$$h = \int v\,\mathrm{d}t = \frac{m}{c}\ln\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,(t_0 - t)\right) + h_0 \,.$$

Najvišja točka je dosežena pri $t = t_0$, zato je višina, ki jo doseže krogla, ravno h_0. Če jo želimo izračunati, vstavimo $t = 0$, ko je $h = 0$. Dobimo:

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{m}{c} \ln \cos \left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\, t_0 \right) = \\ &= -\frac{m}{c} \ln \cos \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\, v_0 \right) = \\ &= \frac{m}{2c} \ln \left(1 + \frac{c}{mg} v_0^2 \right) \doteq \\ &\doteq 460\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Če ne bi bilo zračnega upora, bi lahko postavili $c = 0$. Ustrezno rešitev lahko dobimo bodisi kot limito splošne rešitve, ko gre c proti nič, bodisi tako, da diferencialno enačbo rešimo posebej, kar je v resnici elementarna fizika. Pride:

$$t_0 = \frac{v_0}{g} = 10\,\mathrm{s}\,, \qquad h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 500\,\mathrm{m}\,.$$

3. Označimo z y dolžino dela vrvi, ki se je že odvil in visi z mize, z $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ pa hitrost, s katero se spušča. Ta del vrvi deluje na preostanek s silo $\mu g y$, kjer je μ dolžinska gostota vrvi. Uporabimo različico drugega Newtonovega zakona za gibalno količino:

$$\mathrm{d}G = F\,\mathrm{d}t\,.$$

Sprememba gibalne količine je sestavljena iz dveh delov. Del vrvi, ki je že odvit in ima maso μy, pospešuje postopoma; to poveča gibalno količino za $\mu y\,\mathrm{d}v = \mu y\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mu y\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t$. Infinitezimalni delček vrvi, ki se pravkar odvija in ima maso $\mu \mathrm{d}y = \mu v\,\mathrm{d}t$, pa hipoma pospeši do hitrosti v; to poveča gibalno količino za $\mu v^2\,\mathrm{d}t = \mu\big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\big)^2\,\mathrm{d}t$. Dobimo torej:

$$\mathrm{d}G = \mu y\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t + \mu \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 \mathrm{d}t\,.$$

Vstavimo v Newtonov zakon, delimo z $\mu\,\mathrm{d}t$ in dobimo diferencialno enačbo:

$$gy = y\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 .$$

Ker enačba ne vsebuje eksplicitno časa, ji lahko znižamo red. Dobimo:

$$gy = v^2 + yv\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,.$$

Če enačbo delimo z v, dobimo Bernoullijevo enačbo. S substitucijo $w = v^2$ se le-ta prevede na linearno enačbo:

$$gy = \frac{y}{2}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} + w\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} = -\frac{2\,\mathrm{d}y}{y}\,, \quad \ln\frac{w_H}{A} = -2\ln|y|\,, \quad w_H = By^{-2}\,,$$
$$w = b(y)\,y^{-2}\,, \qquad w' = b'(y)\,y^{-2} - 2\,b(y)\,y^{-3}\,,$$
$$b'(y) = 2gy^2\,, \quad b(y) = \frac{2gy^3}{3} + C\,, \quad w = \frac{2gy}{3} + \frac{C}{y^2}\,.$$

Izrazimo v in dobimo še eno diferencialno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2gy}{3} + \frac{C}{y^2}}\,.$$

Zdaj pa upoštevamo, da je hitrost v odvijanja vrvi pozitivna in da sta na začetku, denimo takrat, ko je $t = 0$, tako hitrost v kot tudi dolžina y enaki nič. Od tod dobimo, da mora biti $C = 0$, koren pa pozitiven. Sledi:

$$\sqrt{\frac{3}{2g}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mathrm{d}t\,, \quad \sqrt{\frac{6y}{g}} = t + D\,.$$

Če se vrv začne odvijati ob času 0, dobimo $D = 0$, od tod pa iskano dinamiko odvijanja:

$$y = \frac{gt^2}{6}\,.$$

4. Za $y = x^p$ dobimo:

$$(p^2 - 3p + 2)x^p + (p^2 - 2p)x^{p-1} = 0\,,$$

kar je mogoče le pri $p = 2$. Torej je $y = x^2$ rešitev enačbe. Za splošno rešitev pišemo:

$$y = x^2 z\,, \qquad y' = 2xz + x^2 z'\,, \qquad y'' = 2z + 4xz' + x^2 z''\,.$$

Vstavimo v enačbo in po ureditvi dobimo:

$$(2x + 3)z' + x(x + 1)z'' = 0\,.$$

Vidimo, da enačba ne vsebuje eksplicitno z (kar se v takem primeru vedno zgodi), torej lahko uvedemo $w = z'$ in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{2x + 3}{x(x + 1)}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x\,, \qquad w = \frac{A(x + 1)}{x^3}\,.$$

Integriramo in dobimo:

$$z = -\frac{A}{x} - \frac{A}{2x^2} + B\,.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$y = -A\big(x + \tfrac{1}{2}\big) + Bx^2$$

ali ekvivalentno:

$$y = Bx^2 + C(2x + 1)\,.$$

5. $y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}$.

6. $y = C_1 + C_2\, e^{-2x}$.

7. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$.

8. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x}$.

9. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + C_3\, e^{-2x}$.

10. $y = e^{-x}\big(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\big)$.

11. $y = (C_1 + C_2\, x) \cos\big(\sqrt{3}\, x\big) + (C_3 + C_4\, x) \sin\big(\sqrt{3}\, x\big)$.

12. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)e^{x}$.

13. $y = -\frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{4} + C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}$.

14. $y = e^{2x} + \frac{1}{9}\, e^{-2x} + (C_1 + C_2 x)e^{x}$.

15. $y = (-x + C_1)e^{2x} + C_2\, e^{3x}$.

16. $y = \frac{1}{16}\, e^{2x} + \frac{1}{2} x^2\, e^{-2x} + (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

17. $y = \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-3x}$.

18. $y = -\frac{1}{12} x^2 \cos(3x) + \frac{1}{36} x \sin(3x) + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$.

19. Splošna rešitev je $y = C_1\, |x|^{3/2} + C_2\, x^3$.

Vse klasične rešitve, definirane na realni osi, so zlepki funkcij $C_1^-(-x)^{3/2} + C_2^- x^3$ in $C_1^+ x^{3/2} + C_2^+ x^3$. Tak zlepek pa je dvakrat zvezno odvedljiva funkcija natanko tedaj, ko je $C_1^- = C_1^+ = 0$; C_2^- in C_2^+ sta lahko poljubna. Dobimo torej funkcije:

$$y = \begin{cases} C_2^- x^3 & ;\ x \le 0 \\ C_2^+ x^3 & ;\ x \ge 0\,. \end{cases}$$

Opomba: zdaj vidimo, da so rešitve, navedene v rešitvi točke b) 2. naloge iz 1. razdelka, tudi vse klasične rešitve.

20. a) $y = C_1\, x^2 + \dfrac{C_2}{x}$.

b) Iz $y(0) = 0$ sledi $a = 0$. Nadalje vemo, da je poljubno rešitev začetne naloge možno sestaviti iz splošne rešitve. Iz $\lim_{x \to 0} y = 0$ dobimo, da mora biti $C_2 = 0$, torej je rešitev začetne naloge lahko kvečjemu sestavljanka funkcij oblike $C_1\, x^2$. Sestavljanje sicer pride do izraza kvečjemu pri $x = 0$, ki ni regularna točka enačbe: rešitev bi bila lahko oblike $C_- x^2$ za $x \le 0$ in $C_+ x^2$ za $x \ge 0$. Toda klasično, t. j. dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo dobimo samo pri $C_- = C_+$. Edine možne rešitve so torej $y = Cx^2$. Za vse velja $y(0) = 0$, torej mora biti $b = 0$.

Sklep: pri $a = b = 0$ ima naloga neskončno mnogo rešitev – vse funkcije $y = Cx^2$, kjer je C poljubno realno število. Sicer pa naloga nima rešitve.

21. $y = \big(1 - 2\ln(-x)\big)x^2$.

Funkcija $y = \big(1 - 2\ln|x|\big)x^2$ ni rešitev, ker pri $x = 0$ ni dvakrat zvezno odvedljiva (res pa je enkrat zvezno odvedljiva).

22. $y = x\big(C_1 \cos(3\ln|x|) + C_2 \sin(3\ln|x|)\big)$.

23. a) $y = \frac{1}{4}(5 - x^2)\sqrt{-x}$, definirana je na $(-\infty, 0)$.

b) Na $(-\infty, 0)$ obstaja le ena rešitev $y = 2(-x)^{5/2}$. Obstaja pa tudi neskončno mnogo rešitev, definiranih na celi realni osi, in sicer:

$$y = \begin{cases} 2(-x)^{5/2} & ; x \le 0 \\ A\,x^{5/2} & ; x \ge 0\,, \end{cases}$$

kjer je A poljubno realno število.

24. $y = \frac{1}{6}\ln x + \frac{5}{36} + C_1x^2 + C_2x^3$.

25. $y = x^2\big(C_1 + C_2\ln|x| + \frac{1}{2}(\ln|x|)^2\big)$.

26. Iz rešitve homogenega dela $y_H = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}$ dobimo naslednji sistem za rešitev izvirne enačbe:

$$\begin{aligned} \cos\frac{x}{2}\,z_1' + \sin\frac{x}{2}\,z_2' &= 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\,z_1' + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,z_2' &= \frac{1}{4\sin\frac{x}{2}}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} z_1' &= -\frac{1}{2}\,, & z_1 &= -\frac{1}{2}x + C_1 \\ z_2' &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,, & z_2 &= -\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C_2\,, \end{aligned}$$

splošna rešitev naše enačbe pa:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\,x + C_1\right)\cos\frac{x}{2} + \left(-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C_2\right)\sin\frac{x}{2}\,.$$

27. Iz rešitve homogenega dela $y_H = C_1x + C_2x^2$ dobimo naslednji sistem za rešitev izvirne enačbe:

$$\begin{aligned} xz_1' + x^2z_2' &= 0 \\ z_1' + 2xz_2' &= \frac{1}{x^2(x-1)}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} z_1' &= -\frac{1}{x^2(x-1)}\,, & z_1 &= -\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C_1\,, \\ z_2' &= \frac{1}{x^3(x-1)}\,, & z_2 &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{2x+1}{2x^2} + C_2\,, \end{aligned}$$

splošna rešitev naše enačbe pa:

$$y = (x^2 - x) \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + x - \frac{1}{2} + C_1 x + C_2 x^2 \, .$$

4. Sistemi diferencialnih enačb

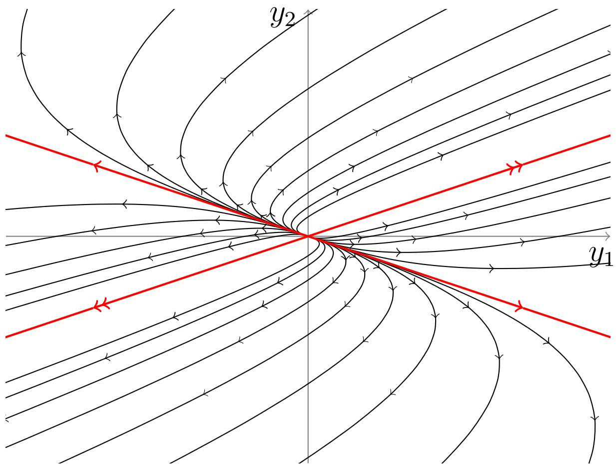
1. Lastna para:

$$\lambda_1 = 1: \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_2 = 3: \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$y_1 = -3C_1\,e^x + 3C_2\,e^{3x},$$
$$y_2 = C_1\,e^x + C_2\,e^{3x}.$$

Gre za *izvir*. Fazni portret:



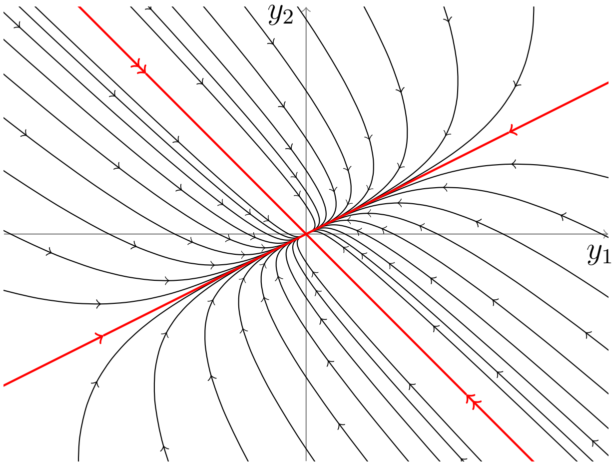
2. Lastna para:

$$\lambda_1 = -1, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_2 = -4, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$y_1 = 2C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-4x},$$
$$y_2 = C_1\,e^{-x} - C_2\,e^{-4x}.$$

Gre za *ponor*. Fazni portret:



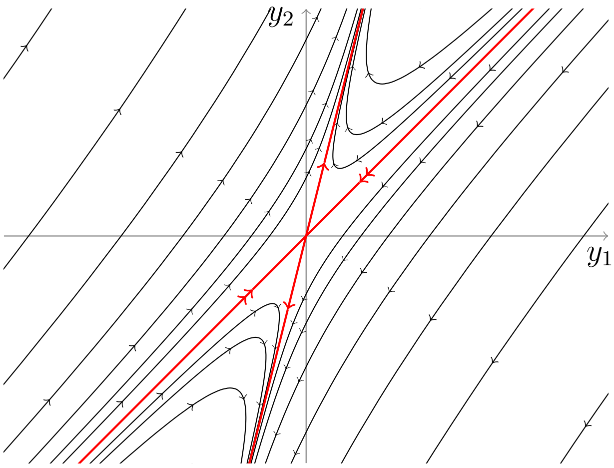
3. Lastna para:

$$\lambda_1 = -2\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,; \qquad \lambda_2 = 1\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\,.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\,, \\ y_2 &= C_1\, e^{-2x} + 4C_2\, e^{x}\,. \end{aligned}$$

Gre za *sedlo*. Fazni portret:



4. Karakteristični polinom: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda - 3)^2$. Lastni pari:

$$\lambda_1 = 0: \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_2 = 3: \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_3 = 3: \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 + C_2\, e^{3x} + C_3\, e^{3x}, \\ y_2 &= C_1 - C_2\, e^{3x}, \\ y_3 &= C_1 - C_3\, e^{3x}. \end{aligned}$$

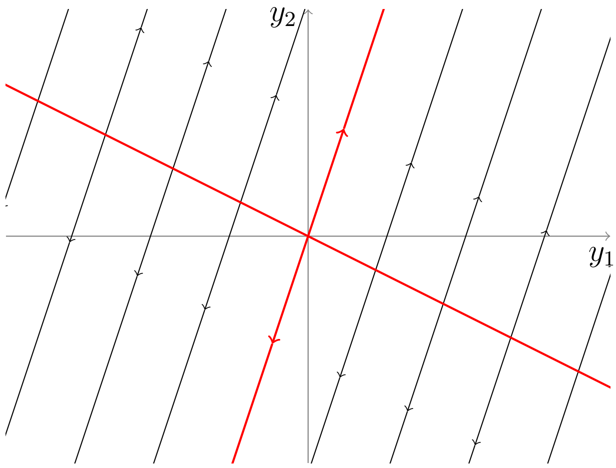
5. Lastna para:

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_2 = 7, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2C_1 + C_2\, e^{7x}, \\ y_2 &= -C_1 + 3C_2\, e^{7x}. \end{aligned}$$

Gre za *degenerirano nestabilno kritično točko.* Fazni portret:



6. Lastna para:

$$\lambda_1 = 4 + 3i\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\;; \qquad \lambda_2 = 4 - 3i\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\,.$$

Za lastno vrednost λ_1 dobimo kompleksno bazno rešitev:

$$\tilde{\vec{h}}_1(x) = \begin{bmatrix} i\,e^{(4+3i)x} \\ e^{(4+3i)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{4x}\sin(3x) \\ e^{4x}\cos(3x) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{4x}\cos(3x) \\ e^{4x}\sin(3x) \end{bmatrix}\,,$$

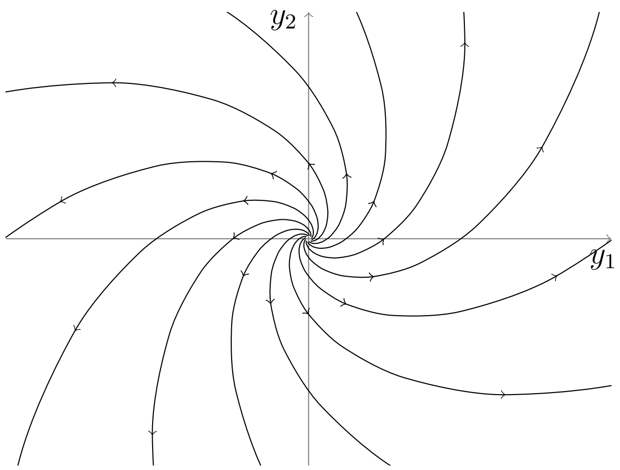
iz katere dobimo realni bazni rešitvi:

$$\vec{h}_1(x) = \begin{bmatrix} -e^{4x}\sin(3x) \\ e^{4x}\cos(3x) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{h}_2(x) = \begin{bmatrix} e^{4x}\cos(3x) \\ e^{4x}\sin(3x) \end{bmatrix}\,.$$

Splošna rešitev v realnem je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{4x}\big(-C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x)\big)\,, \\ y_2 &= e^{4x}\big(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\big)\,. \end{aligned}$$

Gre za *spiralni izvir*. Fazni portret:



7. Lastna para:

$$\lambda_1 = -1 + 3i\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}\;; \qquad \lambda_2 = -1 - 3i\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}\,.$$

Za lastno vrednost λ_1 dobimo kompleksno bazno rešitev:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{h}}_1(x) &= \begin{bmatrix} e^{(-1+3i)x} \\ (1+i)e^{(-1+3i)x} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-x}\cos(3x) \\ e^{-x}\big(\cos(3x) - \sin(3x)\big) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{-x}\sin(3x) \\ e^{-x}\big(\sin(3x) + \cos(3x)\big) \end{bmatrix}\,, \end{aligned}$$

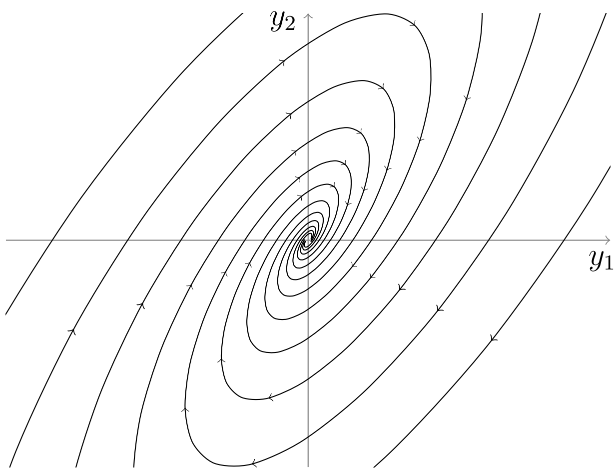
iz katere dobimo realni bazni rešitvi:

$$\vec{h}_1(x) = \begin{bmatrix} e^{-x}\cos(3x) \\ e^{-x}\big(\cos(3x) - \sin(3x)\big) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{h}_2(x) = \begin{bmatrix} e^{-x}\sin(3x) \\ e^{-x}\big(\sin(3x) + \cos(3x)\big) \end{bmatrix} .$$

Splošna rešitev v realnem je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}\big(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\big) , \\ y_2 &= e^{-x}\big(C_1\cos(3x) - C_1\sin(3x) + C_2\sin(3x) + C_2\cos(3x)\big) . \end{aligned}$$

Gre za *spiralni ponor*. Fazni portret:



8. Lastna para:

$$\lambda_1 = i , \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} ; \qquad \lambda_2 = -i , \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix} .$$

Za lastno vrednost λ_1 dobimo kompleksno bazno rešitev:

$$\tilde{\vec{h}}_1(x) = \begin{bmatrix} e^{ix} \\ (2-i)e^{ix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin x \\ 2\sin x - \cos x \end{bmatrix} .$$

iz katere dobimo realni bazni rešitvi:

$$\vec{h}_1(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{h}_2(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ 2\sin x - \cos x \end{bmatrix} .$$

Splošna rešitev v realnem je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\cos x + C_2\sin x , \\ y_2 &= 2C_1\cos x + C_1\sin x + 2C_2\sin x - C_2\cos x . \end{aligned}$$

Gre za *center*, torej so trajektorije elipse. Te se splača izračunati podrobneje. Za izračun polosi (razmerja med polmeroma in smeri) izberemo eno bazno rešitev, recimo za $C_1 = 1$ in $C_2 = 0$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos x\,, \\ y_2 &= 2\cos x + \sin x \end{aligned}$$

in pogledamo, kje je oddaljenost od izhodišča minimalna oz. maksimalna. Velja:

$$y_1^2 + y_2^2 = 5\cos^2 x + 4\cos x \sin x + \sin^2 x\,.$$

Odvajamo:

$$\big(y_1^2 + y_2^2\big)' = 4\cos^2 x - 8\cos x \sin x - 4\sin^2 x = -4\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1)\,.$$

Stacionarna točka je dosežena pri:

$$\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Izračunajmo sedaj $\cos x$ in $\sin x$. Lahko se omejimo na primer, ko je $\cos x > 0$. V tem primeru je:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}}\,, \qquad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}}\,.$$

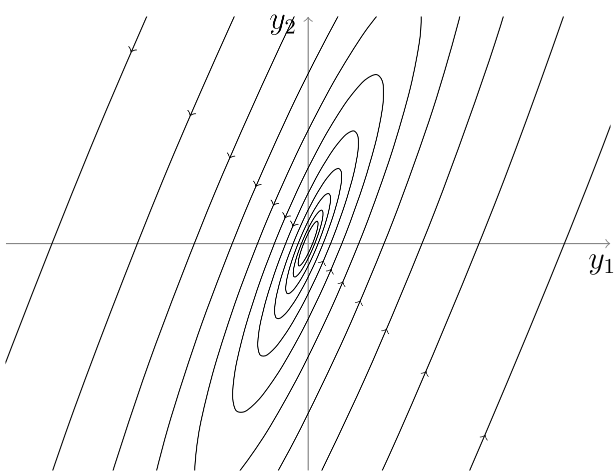
Temena ene izmed elips trajektorij so torej:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\big(1, 1 + \sqrt{2}\big) \quad \text{in} \quad \pm\frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}\big(1, 1 - \sqrt{2}\big)$$

ali numerično:

$$\pm(0{\cdot}924, 2{\cdot}230) \quad \text{in} \quad \pm\,(0{\cdot}383, -0{\cdot}159)\,.$$

(vloga predznaka $\pm$ se je zdaj zamenjala). Fazni portret:



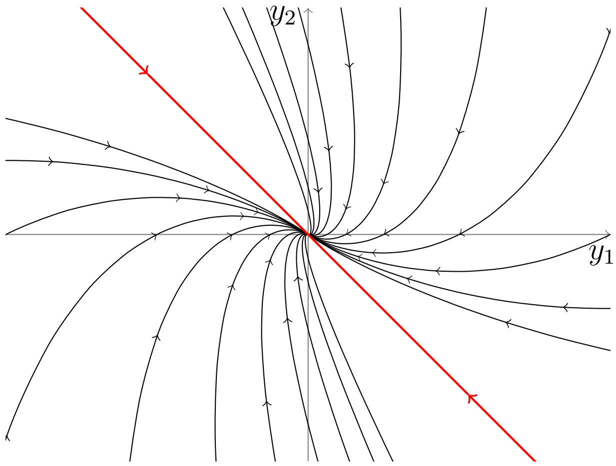
9. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = -3$ dobimo verigo:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Splošna rešitev:

$$y_1 = \big(C_1 + C_2(1 + x)\big)e^{-3x} ,$$
$$y_2 = (-C_1 - C_2 x)e^{-3x} .$$

Fazni portret:



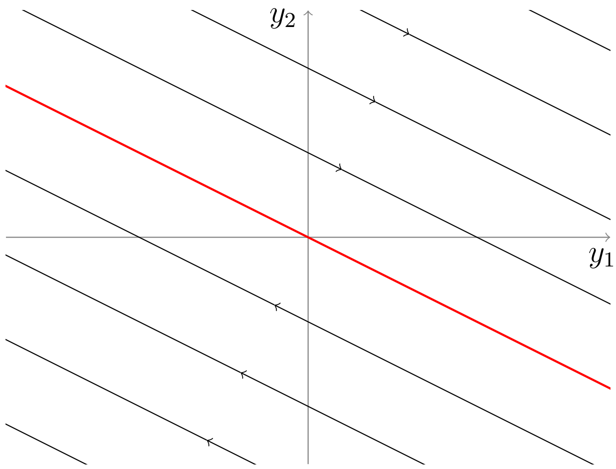
10. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 0$ dobimo verigo:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Splošna rešitev:

$$y_1 = 4C_1 + C_2(1 + 4x) ,$$
$$y_2 = -C_1 - C_2 x .$$

Gre za *degenerirano nestabilno točko*. Fazni portret:



11. Karakteristični polinom: $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda - 3 = -(\lambda+1)^2(\lambda+3)$. Dobimo dve verigi:

$$\lambda_1 = -3\colon \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{2,3} = -1\colon \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_2\, e^{-x} + C_3(-1+x)\, e^{-x}\,, \\ y_2 &= C_1\, e^{-3x} - C_2\, e^{-x} - C_3\, x\, e^{-x}\,, \\ y_3 &= -2C_1\, e^{-3x} + 3C_3\, e^{-x}\,. \end{aligned}$$

12. Karakteristični polinom: $-(\lambda+2)^3$. Dobimo eno samo verigo:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(C_1 + C_2\, x + \tfrac{1}{2}\, C_3\, x^2\right) e^{-2x}\,, \\ y_2 &= \left(C_2 + C_3\, x - \tfrac{3}{5}\, C_3\right) e^{-2x}\,, \\ y_3 &= \tfrac{1}{5}\, C_3\, e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Opomba. Ta sistem bi lahko rešili tudi tako, da bi rešili najprej tretjo enačbo, nato drugo in nazadnje prvo. Prvič bi dobili homogeno, drugič in tretjič pa nehomogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda.

13. Krajši račun pokaže, da sta ravnovesni točki sistema $T_0(0,0)$ in $T_1(1,0)$. Sistem zapišemo v vektorski obliki $\vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$, kjer je:

$$\vec{F}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} y_1(1-y_1) - y_1 y_2\,, \\ y_2(1-y_1)\,. \end{bmatrix}.$$

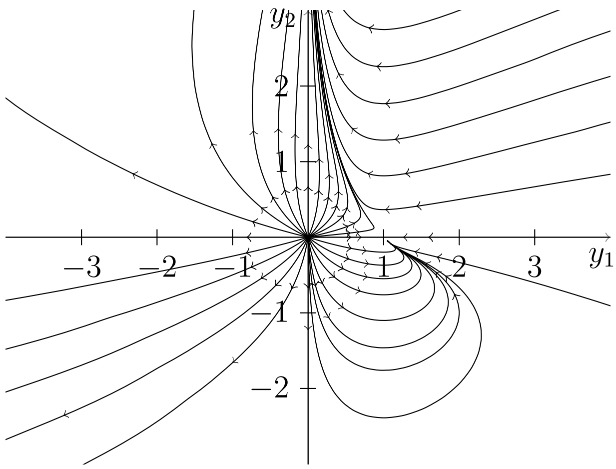
Jacobijeva matrika je:

$$D\vec{F} = \begin{bmatrix} 1-2y_1-y_2 & y_1 \\ y_2 & 1-y_1 \end{bmatrix}.$$

V T_0 je $D\vec{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, torej lahko uporabimo Hartman–Grobmanov izrek: tam je izvir. V T_1 pa je $D\vec{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Lastna para sta:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\;; \qquad \lambda_2 = -1\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

kar pomeni, da je tam Hartman–Grobmanovega izreka ne moremo uporabiti, saj ima ustrezni linearni sistem degenerirano stabilno točko. Fazni portret:



kaže, da se sistem okoli točke T_1 ne obnaša tako kot ustrezni linearni sistem.

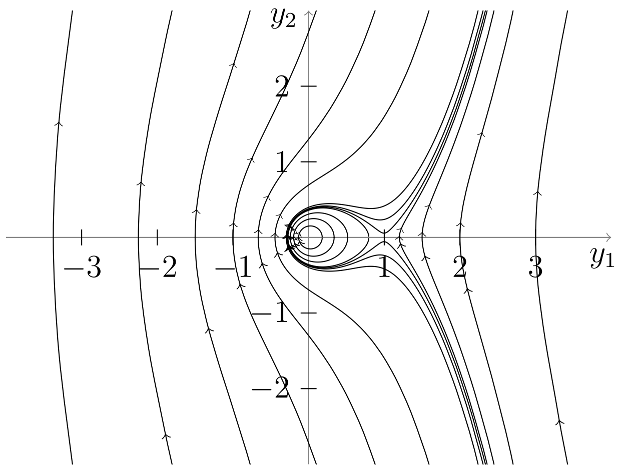
14. Krajši račun pokaže, da sta ravnovesni točki sistema spet $T_0(0,0)$ in $T_1(1,0)$. Sistem spet zapišemo v vektorski obliki $\vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$. Jacobijeva matrika je:

$$D\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2y_1 - 1 & 2y_2 \end{bmatrix}.$$

V T_0 je $D\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Lastni vrednosti sta i in $-i$, torej tam Hartman–Grobmanovega izreka ne moremo uporabiti. V T_1 pa je $D\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Lastna para sta:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}\;; \qquad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\,,$$

kar pomeni, da tam Hartman–Grobmanov izrek lahko uporabimo: dobimo sedlo. Fazni portret:



pa kaže na to, da v tem primeru tudi obnašanje okoli izhodišča ustreza obnašanju ustreznega linearnega sistema: krogi se sicer zverižijo, ni pa videti, da bi se spremenili v spirale.

15. Krajši premislek pokaže, da je edina ravnovesna točka izhodišče. Jacobijeva matrika odvodov ustrezne vektorske funkcije $\vec{F}$ je tam enaka nič, zato Hartman–Grobmanovega izreka tam ne moremo uporabiti.

V skladu z namigom vpeljimo polarne koordinate:

$$y_1 = r\cos\varphi\,, \qquad y_2 = r\sin\varphi$$

in sistem se pretvori v:

$$\begin{aligned} r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi' &= r^2\big(2\cos^2\varphi - 3\cos\varphi\sin\varphi\big) \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi' &= r^2\big(2\cos\varphi\sin\varphi + 2\sin^2\varphi\big)\,. \end{aligned}$$

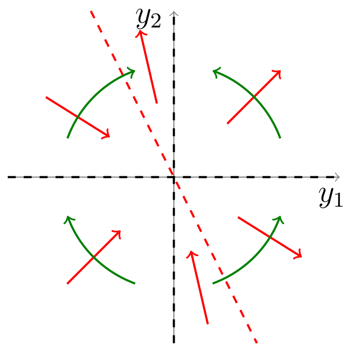
Razrešimo:

$$\begin{aligned} r' &= r^2\big(2\cos^3\varphi - 3\cos^2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi + 2\sin^3\varphi\big) \\ \varphi' &= 5r\cos\varphi\sin^2\varphi\,. \end{aligned}$$

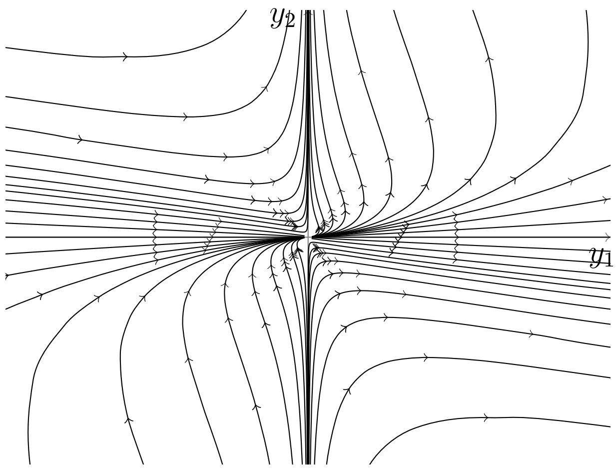
Krajši račun pokaže, da je funkcija:

$$h(\varphi) = 2\cos^3\varphi - 3\cos^2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi + 2\sin^3\varphi$$

za $-\pi/2 < \varphi - \operatorname{arctg} 2$ negativna in za $-\operatorname{arctg} 2 < \varphi < \pi/2$ pozitivna. Tako lahko skiciramo smeri spreminjanja oddaljenosti od izhodišča in kota (z rdečo je označena oddaljenost, z zeleno pa kot):



Fazni portret:



Vidimo, da se za izhodišča blizu abscisne osi kot ustali. To je mogoče zato, ker se oddaljenost od izhodišča manjša, z njo pa tudi odvod kota.

16. Iz rešitve 9. naloge razberemo matriko Wrońskega:

$$\mathbf{H}(x) = e^{-3x} \begin{bmatrix} 1 & 1+x \\ -1 & -x \end{bmatrix},$$

iz nje pa sistem:

$$\begin{aligned} z_1' + (1+x)z_2' &= e^{2x}, \\ -z_1' - x\, z_2' &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev:

$$\begin{aligned} z_1' &= -x\, e^{2x}, & z_1 &= \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\right)e^{2x} + C_1, \\ z_2' &= e^{2x}, & z_2 &= \tfrac{1}{2}\, e^{2x} + C_2. \end{aligned}$$

Splošna rešitev sistema je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{3}{4}\, e^{-x} + \big(C_1 + C_2(1+x)\big)e^{-3x}, \\ y_2 &= -\tfrac{1}{4}\, e^{-x} + \big(-C_1 - C_2\, x\big)e^{-3x}. \end{aligned}$$

17. Iz rešitve 4. naloge razberemo:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešitev sistema:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= e^x, \\ w_1 - w_2 &= 0, \\ w_1 - w_3 &= 0 \end{aligned}$$

je:

$$w_1 = \tfrac{1}{3}\, e^x, \quad w_2 = \tfrac{1}{3}\, e^x, \quad w_3 = \tfrac{1}{3}\, e^x.$$

Od tod dobimo diferencialne enačbe:

$$z_1' = \tfrac{1}{3}\, e^x, \quad z_2' = 3z_2 + \tfrac{1}{3}\, e^x, \quad z_3' = 3z_3 + \tfrac{1}{3}\, e^x,$$

ki jih lahko rešimo vsako zase:

$$z_1 = \tfrac{1}{3}\, e^x + C_1, \quad z_2 = -\tfrac{1}{6}\, e^x + C_2\, e^{3x}, \quad z_3 = -\tfrac{1}{6}\, e^x + C_3\, e^{3x}.$$

Rešitev prvotnega sistema pa je:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 + C_2\, e^{3x} + C_3\, e^{3x}, \\ y_2 &= \tfrac{1}{2}\, e^x + C_1\, e^{3x}, \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}\, e^x + C_1\, e^{3x} - C_3\, e^{3x}. \end{aligned}$$

5. Reševanje diferencialnih enačb s potenčnimi vrstami

1. Nastavimo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

in enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in upoštevamo, da lahko nekatere koeficiente izpustimo, ker so enaki nič:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + 4\sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+1)(k+2)c_{k+2} + (k+1)(k+2)c_k\Big]x^k = 0\,,$$

od koder sledi, da mora veljati:

$$c_{k+2} = -c_k\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

torej:

$$c_{2j} = (-1)^j c_0\,, \quad c_{2j+1} = (-1)^j c_1\,; \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Splošna rešitev dane diferencialne enačbe je torej:

$$y = c_0 \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} + c_1 \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j+1} = \frac{c_0 + c_1 x}{1 + x^2}\,.$$

Opomba. Z razvojem v vrsto smo dokazali, da je te funkcije rešijo dano diferencialno enačbo tam, kjer potenčne vrste konvergirajo, to pa je za $|x| < 1$. Neposredno pa lahko preverimo, da jo v resnici rešimo na celi realni osi. To sledi tudi iz *principa identitete* za holomorfne funkcije.

2. Najprej izračunamo diferencialni operator:

$$Dy := 4x^2 y'' - 6xy' + (x+6)y$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y = \sum_n c_n\, x^n\,.$$

Velja:

$$Dy = 4\sum_n n(n-1)c_n\,x^n - 6\sum_n n\,c_n x^n + \sum_n c_n\,x^{n+1} + 6\sum_n c_n\,x^n\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned} Dy &= 4\sum_k k(k-1)c_k\,x^k - 6\sum_k k\,c_k x^k + \sum_k c_{k-1}\,x^k + 6\sum_k c_k\,x^k = \\ &= \sum_k \Big[(2k-2)(2k-3)c_k + c_{k-1}\Big]x^k\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda) = (2\lambda-2)(2\lambda-3)$ ter ima ničli – izhodiščna eksponenta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Ker razlika ni celo število, za vsak izhodiščni eksponent dobimo linearno neodvisno bazno rešitev.

Za izhodiščni eksponent $\lambda_1 = 1$ nastavimo:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\,x^{j+1}\,.$$

S substitucijo $n = j+1$ to zapišemo v obliki:

$$h_1(x) = \sum_n c_{1,n-1}\,x^n\,,$$

pri čemer se razume, da za $j \notin \mathbb{N}_0$ velja $c_{1,j} = 0$. Vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$Dh_1(x) = \sum_k \Big[(2k-2)(2k-3)c_{1,k-1} + c_{1,k-2}\Big]x^k\,,$$

s substitucijo $k = j+1$ pa dobimo:

$$Dh_1(x) = \sum_j \Big[2j(2j-1)c_{1,j} + c_{1,j-1}\Big]x^{j+1}\,.$$

Izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1, 2, 3, \ldots$ pa dobimo:

$$c_{1,j} = -\frac{c_{1,j-1}}{2j(2j-1)}\,.$$

Razrešimo rekurzijo in dobimo:

$$c_{1,j} = \frac{(-1)^j}{(2j)!}\,c_{1,0}\,.$$

Izberimo $c_{1,0} = 1$ in dobimo prvo bazno rešitev:

$$h_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{k+1}\,.$$

Ta vrsta je definirana na celi realni osi in tam poljubnokrat zvezno odvedljiva, torej je klasična rešitev dane diferencialne enačbe. Enaka je:

$$h_1(x) = \begin{cases} x\cos\sqrt{x} & ; \ x \geq 0 \\ x\,\mathrm{ch}\sqrt{-x} & ; \ x \leq 0\,. \end{cases}$$

Podobno za izhodiščni eksponent $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ nastavimo:

$$h_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+3/2}\,.$$

S substitucijo $n = j + \frac{3}{2}$ to zapišemo v obliki:

$$h_2(x) = \sum_{n} c_{2,n-3/2}\, x^n\,,$$

pri čemer se razume, da za $j \notin \mathbb{N}_0$ velja $c_{2,j} = 0$. Vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$Dh_2(x) = \sum_{k} \Big[(2k-2)(2k-3)c_{2,k-3/2} + c_{2,k-5/2}\Big] x^k\,,$$

s substitucijo $k = j + \frac{3}{2}$ pa dobimo:

$$Dh_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big[2j(2j+1)c_{2,j} + c_{2,j-1}\Big] x^{j+1}\,.$$

Izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ spet dobimo identiteto, za $j = 1, 2, 3, \ldots$ pa dobimo:

$$c_{2,j} = -\frac{c_{2,j-1}}{2j(2j+1)}\,.$$

Razrešimo rekurzijo in dobimo:

$$c_{2,j} = \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\, c_{2,0}\,.$$

Izberimo $c_{2,0} = 1$ in dobimo drugo bazno rešitev:

$$h_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{k+3/2} = x\sin\sqrt{x}\,.$$

Ta funkcija pa je definirana le za $x \geq 0$. Za $x \leq 0$ modificiramo vrsto v:

$$h_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, (-x)^{k+3/2} = -x\,\mathrm{sh}\sqrt{-x}\,.$$

Ti dve funkciji se ne dasta sestaviti v funkcijo, ki bi bila dvakrat zvezno odvedljiva na celi realni osi.

Splošno rešitev enačbe raje zapišemo posebej za pozitivne in negativne x (funkciji h_2 lahko zamenjamo predznak):

$$\begin{aligned} y &= \kappa_1 x \cos\sqrt{x} + \kappa_2 x \sin\sqrt{x} &&; \ x > 0\,,\\ y &= \kappa_1 x \operatorname{ch}\sqrt{-x} + \kappa_2 x \operatorname{sh}\sqrt{-x} &&; \ x < 0\,. \end{aligned}$$

Možno pa je tudi s pomočjo potenčne vrste izračunati le eno rešitev, nato pa znižati red diferencialne enačbe: če izhajamo iz h_1, splošno rešitev nastavimo v obliki $y = h_1(x)\,z$. Za $x > 0$ računamo:

$$\begin{aligned} y &= zx\cos\sqrt{x}\,,\\ y' &= z'x\cos\sqrt{x} + z\cos\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,,\\ y'' &= z''x\cos\sqrt{x} + 2z'\cos\sqrt{x} - z'\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \tfrac{3}{4}\,zx^{-1/2}\sin\sqrt{x} - \tfrac{1}{4}\,z\cos\sqrt{x} \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$4z''x^3\cos\sqrt{x} + 2z'x^2\cos\sqrt{x} - 4z'x^{5/2}\sin\sqrt{x} = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{c} = -\tfrac{1}{2}\ln x - 2\ln\cos\sqrt{x}$$

oziroma:

$$z' = \frac{c}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = 2c\operatorname{tg}\sqrt{x} + a\,.$$

Če pišemo $b = 2c$, od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = bx\sin\sqrt{x} + ax\cos\sqrt{x}\,.$$

Za $x < 0$ pa računamo:

$$\begin{aligned} y &= zx\operatorname{ch}\sqrt{-x}\,,\\ y' &= z'x\operatorname{ch}\sqrt{-x} + z\operatorname{ch}\sqrt{-x} + \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{-x}\operatorname{sh}\sqrt{-x}\,,\\ y'' &= z''x\operatorname{ch}\sqrt{-x} + 2z'\operatorname{ch}\sqrt{-x} + z'\sqrt{-x}\operatorname{sh}\sqrt{-x} - \tfrac{3}{4}\,z(-x)^{-1/2}\operatorname{sh}\sqrt{-x} - \tfrac{1}{4}\,z\operatorname{ch}\sqrt{-x} \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$4z''x^3\operatorname{ch}\sqrt{-x} + 2z'x^2\operatorname{ch}\sqrt{-x} + 4z'(-x)^{5/2}\operatorname{sh}\sqrt{-x} = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{th}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{c} = -\tfrac{1}{2}\ln(-x) - 2\ln\operatorname{ch}\sqrt{-x}$$

oziroma:

$$z' = \frac{c}{\sqrt{-x}\operatorname{ch}^2\sqrt{-x}}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = -2c\operatorname{th}\sqrt{-x} + a\,.$$

Če pišemo $b = -2c$, od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = bx\operatorname{sh}\sqrt{-x} + ax\operatorname{ch}\sqrt{-x}\,.$$

Vidimo, da tako za $x > 0$ kot tudi za $x < 0$ pride isto kot prej.
Podobno je možno tudi rešitev za $\lambda = 1$ dobiti iz rešitve za $\lambda = \frac{3}{2}$.

3. Izračunajmo diferencialni operator:

$$Dy := x^2(1-x)y'' + x(x-2)y' - 2y$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y = \sum_n c_n\,x^n\,.$$

Velja:

$$Dy = \sum_n n(n-1)c_n\,x^n - \sum_n n(n-1)c_n\,x^{n+1} + \sum_n nc_n\,x^{n+1} - \\ - 2\sum_n nc_n\,x^n + 2\sum_n c_n\,x^n\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned} Dy &= \sum_k k(k-1)c_k\,x^k - \sum_k (k-1)(k-2)c_{k-1}\,x^k + \sum_k (k-1)c_{k-1}\,x^k - \\ &\qquad - 2\sum_k kc_k\,x^k + 2\sum_k c_k\,x^k = \\ &= \sum_k \Big[(k-2)(k-1)c_k - (k-3)(k-1)c_{k-1}\Big]x^k\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$ ter ima ničli – izhodiščna eksponenta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 1$. Ker je razlika celo število, moramo rešitev za nižji izhodiščni eksponent izvajati iz rešitve za višji izhodiščni eksponent.

Za višji eksponent $\lambda_1 = 2$ nastavimo:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\,x^{j+2} = \sum_n c_{1,n-2}\,x^n \qquad (c_{1,j} = 0 \text{ za } j \notin \mathbb{N}_0)\,,$$

vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \sum_k \Big[(k-2)(k-1)c_{1,k-2} - (k-3)(k-1)c_{1,k-3}\Big] x^k = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[j(j+1)c_{1,j} - (j-1)(j+1)c_{1,j-1}\Big] x^{j+2} . \end{aligned}$$

Izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1$ dobimo $c_{1,1} = 0$. Z indukcijo sledi, da za vse $j = 1, 2, 3, \dots$ velja $c_{1,j} = 0$. Če torej izberemo $c_{1,0} = 1$, prva bazna rešitev pride $h_1(x) = x^2$.

Rešitev za nižji eksponent $\lambda_2 = 0$ oz. splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$h_2(x) = Ax^2 \ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+1} ,$$

kjer vzamemo še $c_{2,1} = 0$. Odvajamo:

$$(x^2 \ln x)' = x + 2x \ln x , \qquad (x^2 \ln x)'' = 3 + 2 \ln x$$

in po krajšem računu dobimo:

$$D\big(x^2 \ln x\big) = x^2 - 2x^3 .$$

Nadalje po formuli $(*)$ dobimo:

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+1}\right) &= D\left(\sum_n c_{2,n-1}\, x^n\right) = \\ &= \sum_k \Big[(k-1)(k-2)c_{2,k-1} - (k-1)(k-3)c_{2,k-2}\Big] x^k = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[j(j-1)c_{2,j} - j(j-2)c_{2,j-1}\Big] x^{j+1} . \end{aligned}$$

Spomnimo se še, da je $c_{2,1} = 0$ in $c_{2,j} = 0$ za $j \notin \mathbb{N}_0$, ustrezno seštejemo, izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Dobimo:

$$\begin{aligned} &j = 0: && \text{identiteta} \\ &j = 1: && A = -c_{2,0} \\ &j = 2: && c_{2,2} = A \\ &j = 3, 4, 5, \dots: && c_{2,j} = \frac{j-2}{j-1}\, c_{2,j-1} . \end{aligned}$$

Izberimo $c_{2,0} = 1$. Naračunamo prvih nekaj koeficientov:

$$A = -1 , \qquad c_{2,2} = -1 , \qquad c_{2,3} = -\frac{1}{2} , \qquad c_{2,4} = -\frac{1}{3}$$

in postavimo domnevo, da za $j = 2, 3, 4, \ldots$ velja $c_{2,j} = -1/(j-1)$. To domnevo zlahka dokažemo z indukcijo. Druga bazna rešitev je torej:

$$\begin{aligned} h_2(x) &= -x^2 \ln x - x - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{j-1} = \\ &= -x^2 \ln x - x - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \\ &= -x^2 \ln x - x + x^2 \ln(1-x) \,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je za $0 < x < 1$ torej:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_2 x^2 \ln(1-x) - C_2 x^2 \ln x \,.$$

Z neposrednim preizkusom dane diferencialne enačbe dobimo, da na $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ in $(1, \infty)$ velja splošna rešitev:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_2 x^2 \ln|1-x| - C_2 x^2 \ln|x| \,.$$

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\, z$ in izračunamo:

$$\begin{aligned} y &= x^2 z \,, \\ y' &= 2xz + x^2 z' \,, \\ y'' &= 2z + 4xz' + x^2 z'' \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$(x^2 - x) z'' + (3x - 2) z' = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{2 - 3x}{x(x-1)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln \frac{z'}{b} = -2 \ln x - \ln(x-1)$$

oziroma:

$$z' = \frac{b}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \,,$$

to pa se zintegrira v:

$$z = b \left(\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} \right) + a$$

Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = a x^2 + b x^2 \ln|x-1| - b x^2 \ln|x| + bx \,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

4. Enačbo pomnožimo z x, da dobimo standardno obliko:

$$x^2y'' + 2xy' - x^2y = 0\,.$$

Izračunajmo torej diferencialni operator:

$$Dy := x^2y'' + 2xy' - x^2y$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y = \sum_n c_n\,x^n\,.$$

Velja:

$$Dy = \sum_n n(n-1)c_n\,x^n + 2\sum_n nc_n\,x^n - \sum_n c_n\,x^{n+2}\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned} Dy &= \sum_k k(k-1)c_k\,x^k + 2\sum_k kc_k\,x^k - \sum_k c_{k-2}\,x^k = \\ &= \sum_k \Big[k(k+1)c_k - c_{k-2}\Big]x^k\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$ ter ima ničli – izhodiščna eksponenta $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = -1$. Ker je razlika celo število, moramo rešitev za nižji izhodiščni eksponent izvajati iz rešitve za višji izhodiščni eksponent.

Za višji eksponent $\lambda_1 = 0$ nastavimo:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\,x^j\,,$$

vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$Dh_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big[j(j+1)c_{1,j} - c_{1,j-2}\Big]x^j\,,$$

pri čemer se razume, da za $j \notin \mathbb{N}_0$ velja $c_{1,j} = 0$. Ob upoštevanju slednjega izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Dobimo, da mora biti $c_{1,1} = 0$, za $j = 2, 3, 4, \ldots$ pa mora veljati $j(j+1)c_j - c_{j-2} = 0$. Od tod sledi:

$$c_{1,j} = \begin{cases} 0 & ;\ j \text{ lih} \\ \dfrac{c_{1,0}}{(j+1)!} & ;\ j \text{ sod.} \end{cases}$$

Izberimo $c_{1,0} = 1$ in dobimo prvo bazno rešitev:

$$h_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l+1)!} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 1 & ;\ x = 0\,. \end{cases}$$

Rešitev za nižji eksponent $\lambda_2 = -1$ oz. splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$h_2(x) = A h_1(x) \ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j} x^{j-1} ,$$

kjer vzamemo še $c_{2,1} = 0$. Odvajamo:

$$\big(h_1(x) \ln x\big)' = \frac{h_1(x)}{x} + h_1'(x) \ln x \,, \qquad \big(h_1(x) \ln x\big)'' = \frac{2x\, h_1'(x) - h_1(x)}{x^2} + h_1''(x) \ln x$$

in po krajšem računu dobimo:

$$D\big(h_1(x) \ln x\big) = 2x\, h_1'(x) + h_1(x) = 1 + \frac{5}{3!}\, x^2 + \frac{9}{5!}\, x^4 + \frac{13}{7!}\, x^6 + \cdots$$

Nadalje po formuli $(*)$ dobimo:

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j-1}\right) &= D\left(\sum_n c_{2,n+1}\, x^n\right) = \\ &= \sum_k \Big[k(k+1) c_{2,k+1} - c_{2,k-1}\Big] x^k = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[j(j-1) c_{2,j} - c_{2,j-2}\Big] x^{j-1} . \end{aligned}$$

Spomnimo se še, da je $c_{2,1} = 0$ in $c_{2,j} = 0$ za $j \notin \mathbb{N}_0$, ustrezno seštejemo, izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1$ pa $A = 0$. Ob upoštevanju tega dobimo, da za $j = 2, 3, 4, \ldots$ velja $j(j-1) c_{2,j} - c_{2,j-2} = 0$. Sledi:

$$c_{2,j} = \begin{cases} 0 & ; \ j \text{ lih} \\ \dfrac{c_{2,0}}{j!} & ; \ j \text{ sod.} \end{cases}$$

Izberimo $c_{2,0} = 1$ in dobimo drugo bazno rešitev:

$$h_2(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l-1}}{(2l)!} = \frac{\operatorname{ch} x}{x} .$$

Dobljena rešitev velja tudi za $x < 0$. A ker je v izhodišču singularnost, je funkcija h_2 klasična rešitev diferencialne enačbe le na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pri splošni rešitvi nam za to ni treba skrbeti:

$$y = \frac{\kappa_1 \operatorname{sh} x + \kappa_2 \operatorname{ch} x}{x} .$$

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\, z$. Za $x \neq 0$ računamo:

$$\begin{aligned} y &= z\,\frac{\operatorname{sh} x}{x}\,, \\ y' &= z'\,\frac{\operatorname{sh} x}{x} + z\,\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{x^2}\,, \\ y'' &= z''\,\frac{\operatorname{sh} x}{x} + 2z'\,\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{x^2} + z\,\frac{(2 + x^2)\operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x}{x^3} \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$z'' \operatorname{sh} x + 2z' \operatorname{ch} x = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -2 \operatorname{cth} x\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln \frac{z'}{b} = -2 \ln |\operatorname{sh} x|$$

oziroma:

$$z' = \frac{b}{\operatorname{sh}^2 x}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = b \operatorname{cth} x + a$$

Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = \frac{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}{x}\,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

5. Enačbo pomnožimo z x, da dobimo standardno obliko:

$$x^2(x-2)y'' - x(x^2-2)y' + (2x^2-2x)y = 0\,.$$

Izračunajmo torej diferencialni operator:

$$Dy := x^2(x-2)y'' - x(x^2-2)y' + (2x^2-2x)y$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y = \sum_n c_n\, x^n\,.$$

Velja:

$$\begin{aligned} Dy = \sum_n n(n-1)c_n\, x^{n+1} - 2\sum_n n(n-1)c_n\, x^n - \sum_n nc_n\, x^{n+2} + {} \\ + 2\sum_n nc_n\, x^n + 2\sum_n c_n\, x^{n+2} - 2\sum_n c_n\, x^{n+1}\,. \end{aligned}$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned} Dy &= \sum_k (k-1)(k-2)c_{k-1}\,x^k - 2\sum_k k(k-1)c_k\,x^k - \sum_k (k-2)c_{k-2}\,x^k + \\ &\qquad + 2\sum_k kc_k\,x^k + 2\sum_k c_{k-2}\,x^k - 2\sum_k c_{k-1}\,x^k = \\ &= \sum_k \Big[-2k(k-2)c_k + k(k-3)c_{k-1} - (k-4)\,c_{k-2}\Big]x^k\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda) = -2\lambda(\lambda-2)$ ter ima ničli – izhodiščna eksponenta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 0$. Ker je razlika celo število, moramo rešitev za nižji izhodiščni eksponent izvajati iz rešitve za višji izhodiščni eksponent.

Za višji eksponent $\lambda_1 = 2$ nastavimo:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\,x^{j+2} = \sum_n c_{1,n-2}\,x^n \qquad (c_{1,j} = 0 \text{ za } j \notin \mathbb{N}_0)\,,$$

vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \sum_k \Big[-2k(k-2)c_{1,k-2} + k(k-3)c_{1,k-3} - (k-4)c_{1,k-4}\Big]x^k = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[-2j(j+2)c_{1,j} + (j-1)(j+2)c_{1,j-1} - (j-2)\,c_{1,j-2}\Big]x^{j+2}\,. \end{aligned}$$

Izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1$ dobimo $c_{1,1} = 0$ in za $j = 2$ prav tako $c_{1,2} = 0$. Z indukcijo sledi, da za vse $j = 1, 2, 3, \ldots$ velja $c_{1,j} = 0$. Če torej izberemo $c_{1,0} = 1$, prva bazna rešitev pride $h_1(x) = x^2$.

Rešitev za nižji eksponent $\lambda_2 = 0$ oz. splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$h_2(x) = A\,h_1(x)\ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\,x^j\,,$$

kjer vzamemo še $c_{2,2} = 0$. Odvajamo:

$$\big(h_1(x)\ln x\big)' = \frac{h_1(x)}{x} + h_1'(x)\ln x\,, \qquad \big(h_1(x)\ln x\big)'' = \frac{2x\,h_1'(x) - h_1(x)}{x^2} + h_1''(x)\ln x$$

in ob upoštevanju, da je $Dh_1 = 0$, dobimo:

$$D\big(h_1(x)\ln x\big) = -x^4 + 3x^3 - 4x^2\,,$$

Neposredno iz $(*)$ sledi:

$$D\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\,x^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big[-2j(j-2)c_{2,j} + j(j-3)c_{2,j-1} - (j-4)\,c_{2,j-2}\Big]x^j\,,$$

kjer se razume, da za $j \notin \mathbb{N}_0$ velja $c_{2,j} = 0$. Ob upoštevanju tega ustrezno seštejemo, izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1$ dobimo $c_{2,1} = c_{2,0}$, za $j = 2$ pa $A = 0$. Ob upoštevanju slednjega za $j = 3, 4, \ldots$ dobimo:

$$-2j(j-2)c_{2,j} + j(j-3)c_{2,j-1} - (j-4)c_{2,j-2} = 0\,.$$

Ob upoštevanju, da je $c_{2,2} = 0$, naračunamo:

$$c_{2,3} = \frac{c_0}{6}\,, \quad c_{2,4} = \frac{c_0}{24}\,, \quad c_{2,5} = \frac{c_0}{120}$$

in postavimo domnevo, da je $c_{2,j} = c_0/j!$ za vse j razen za $j = 2$. To domnevo z indukcijo zlahka dokažemo. Če izberemo $c_0 = 0$, druga bazna rešitev pride:

$$h_2(x) = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\,,$$

a glede na to, da je prva bazna rešitev $h_1(x) = x^2$, lahko vzamemo tudi kar:

$$h_2(x) = e^x\,.$$

Splošna rešitev dane enačbe je torej:

$$y = \kappa_1\, x^2 + \kappa_2\, e^x$$

in velja na celi realni osi.

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\, z$ in izračunamo:

$$\begin{aligned} y &= x^2 z\,, \\ y' &= 2xz + x^2 z'\,, \\ y'' &= 2z + 4xz' + x^2 z'' \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$(x^2 - 4x + 6)z' = x(x-2)z''$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x^2 - 4x + 6}{x(x-2)} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x-2}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{b} = x - 3\ln x + \ln(x-2)$$

oziroma:

$$z' = \frac{b(x-2)e^x}{x^3}\,,$$

to pa lahko z nekaj spretnosti spet zintegriramo v:

$$z = \frac{b\, e^x}{x^2} + a$$

Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = ax^2 + b\, e^x\,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

6. Enačbo pomnožimo z x, da dobimo standardno obliko:

$$x^2(x^2-3x+2)y''+2x(x^2-3x+1)y'-2xy=0\,.$$

Izračunajmo torej diferencialni operator:

$$Dy:=x^2(x^2-3x+2)y''+2x(x^2-3x+1)y'-2xy$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y=\sum_n c_n\,x^n\,.$$

Velja:

$$\begin{aligned}Dy=\sum_n n(n-1)c_n\,x^{n+2}-3\sum_n n(n-1)c_n\,x^{n+1}+2\sum_n n(n-1)c_n\,x^n+\\+2\sum_n nc_n\,x^{n+2}-6\sum_n nc_n\,x^{n+1}+2\sum_n nc_n\,x^n-2\sum_n c_n\,x^{n+1}\,.\end{aligned}$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned}Dy=\sum_k(k-2)(k-3)c_{k-2}\,x^k-3\sum_k(k-1)(k-2)c_{k-1}\,x^k+&\\+2\sum_k k(k-1)c_k\,x^k+2\sum_k(k-2)c_{k-2}\,x^k-&\\-6\sum_k(k-1)c_{k-1}\,x^k+2\sum_k kc_k\,x^k-&\qquad(*)\\-2\sum_k c_{k-1}\,x^k=&\\=\sum_k\Big[2k^2c_k-(3k^2-3k+2)c_{k-1}+(k-1)(k-2)c_{k-2}\Big]x^k\,.&\end{aligned}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda)=\lambda^2$ in ima dvojno ničlo – izhodiščni eksponent $\lambda_{1,2}=0$. To pomeni, da moramo splošno rešitev izvajati iz osnovne bazne rešitve za ta eksponent. Slednjo nastavimo v obliki:

$$h_1(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_{1,j}\,x^j\,.$$

vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$Dh_1(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\Big[2j^2c_{1,j}-(3j^2-3j+2)c_{1,j-1}+(j-1)(j-2)c_{1,j-2}\Big]x^j\,,$$

pri čemer se razume, da za $j\notin\mathbb{N}_0$ velja $c_{1,j}=0$. Ob upoštevanju slednjega izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j=0$ dobimo identiteto, za $j=1$ dobimo $c_{1,j}=c_{0,j}$, za $j=2,3,4,\ldots$ pa dobimo:

$$2j^2c_{1,j}-(3j^2-3j+2)c_{1,j-1}+(j-1)(j-2)c_{1,j-2}=0\,.$$

Izberimo $c_{1,0} = 1$ in naračunajmo prvih nekaj koeficientov:

$$c_{1,1} = 1\,, \qquad c_{1,2} = 1\,, \qquad c_{1,3} = 1\,.$$

Postavimo domnevo, da za vse j velja $c_{1,j} = 1$, kar zlahka dokažemo z indukcijo. Dobimo prvo bazno rešitev:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}\,.$$

Frobeniusova medoda sicer zagotavlja, da je to rešitev enačbe v okviru konvergenčnega polmera vrste, t. j. za $-1 < x < 1$. Neposredno pa lahko preverimo, da ta rešitev velja povsod, torej za $x < 1$ in za $x > 1$.

Splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$h_2(x) = A\,h_1(x)\ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\,x^j\,,$$

kjer vzamemo še $c_{2,2} = 0$. Odvajamo:

$$\big(h_1(x)\ln x\big)' = \frac{h_1(x)}{x} + h_1'(x)\ln x\,, \qquad \big(h_1(x)\ln x\big)'' = \frac{2x\,h_1'(x) - h_1(x)}{x^2} + h_1''(x)\ln x$$

in ob upoštevanju, da je $Dh_1 = 0$, po krajšem računu dobimo:

$$D\big(h_1(x)\ln x\big) = x\,.$$

Neposredno iz $(*)$ sledi:

$$D\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\,x^j\right) = \sum_k \Big[2j^2 c_{2,j} - (3j^2 - 3j + 2)c_{2,j-1} + (j-1)(j-2)c_{2,j-2}\Big]x^j\,.$$

kjer se razume, da za $j \notin \mathbb{N}_0$ velja $c_{2,j} = 0$. Ob upoštevanju tega ustrezno seštejemo, izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto. Upoštevajoč, da je $c_{2,2} = 0$, za $j = 1$ dobimo $2c_{2,1} + A = 0$, za $j = 2$ dobimo $8c_{2,2} - 8c_{2,1} = 0$, za $j = 3, 4, 5, \ldots$ pa dobimo:

$$2j^2 c_{2,j} - (3j^2 - 3j + 2)c_{2,j-1} + (j-1)(j-2)c_{2,j-2} = 0\,.$$

Izberimo $A = -2$, spet naračunajmo prvih nekaj koeficientov:

$$c_{2,1} = 1\,, \qquad c_{2,2} = 1\,, \qquad c_{2,3} = 1$$

in podobno kot prej z indukcijo pokažemo, da za vse $j = 1, 2, 3, \ldots$ velja $c_{2,j} = 1$. Druga bazna rešitev je torej:

$$h_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j - 2h_1(x)\ln x = \frac{x - 2\ln x}{1-x}\,.$$

Splošna rešitev za $0 < x < 1$ je torej:

$$y = \frac{\kappa_1 + \kappa_2(x - 2\ln x)}{1 - x}\,.$$

Neposredno lahko preverimo, da ta rešitev velja tudi za $x > 1$, za $x < 0$ pa lahko vzamemo:

$$y = \frac{\kappa_1 + \kappa_2(x - 2\ln(-x))}{1 - x}\,.$$

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\,z$ in računamo:

$$y = \frac{z}{1-x}\,, \qquad y' = \frac{(1-x)z' + z}{(1-x)^2}\,, \qquad y'' = \frac{(1-x)^2 z'' + 2(1-x)z' + 2z}{(1-x)^3}$$

in ko vstavimo v dano diferencialno enačbo, po ureditvi dobimo:

$$x(x-2)z'' - 2z' = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{2}{x(x-2)}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{b} = \ln\frac{x-2}{x}$$

oziroma:

$$z' = \frac{b(x-2)}{x}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = a + b(x - 2\ln|x|)$$

od koder dobimo splošno rešitev:

$$y = \frac{a + b(x - 2\ln|x|)}{1-x}\,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

7. Če označimo $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ in $\dot u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, velja:

$$\dot u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t\,\dot u\,, \quad \text{torej} \quad u' = \frac{\dot u}{2t}\,.$$

Torej je:

$$y' = \frac{\dot y}{2t}\,, \qquad y'' = \left(\frac{\dot y}{2t}\right)' = \frac{1}{2t}\left(\frac{\dot y}{2t}\right)^{\cdot} = \frac{t\,\ddot y - \dot y}{4t^3}\,.$$

Vstavimo v dano enačbo, uredimo in dobimo:

$$t^2\,\ddot y + t\,\dot y + \left(t^2 - \tfrac{1}{36}\right)y = 0\,,$$

kar je Besselova diferencialna enačba in ima rešitev:

$$y = C_1\, J_{1/6}(t) + C_2\, J_{-1/6}(t)\,.$$

Za $x > 0$ je to enako:

$$y = C_1\, J_{1/6}\big(\sqrt{x}\big) + C_2\, J_{-1/6}\big(\sqrt{x}\big)\,.$$

Opomba: za $x < 0$ dobimo *modificirane Besselove funkcije*:

$$y = C_1\, I_{1/6}\big(\sqrt{-x}\big) + C_2\, I_{-1/6}\big(\sqrt{-x}\big)\,.$$

8. Izračunamo:

$$y = \frac{u}{x^2}\,, \quad y' = \frac{x\,u' - 2u}{x^3}\,, \quad y'' = \frac{x^2u'' - 4x\,u' + 6u}{x^4}\,,$$

vstavimo v dano enačbo, uredimo in dobimo:

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - 4)u = 0\,,$$

kar je Besselova diferencialna enačba in ima rešitev:

$$u = C_1\, J_2(x) + C_2\, Y_2(x)\,.$$

Rešitev izvirne enačbe je torej:

$$y = \frac{C_1\, J_2(x) + C_2\, Y_2(x)}{x^2}\,.$$

9. Če označimo $z = xy$, te funkcije karakterizira Besselova diferencialna enačba:

$$x^2z'' + x\,z' + \big(x^2 - \tfrac{9}{4}\big)y = 0$$

oziroma:

$$4x^2z'' + 4x\,z' + (4x^2 - 9)y = 0\,.$$

Iz $z' = y + xy'$ in $z'' = 2y' + xy''$ dobimo iskano enačbo:

$$8x^2y' + 4x^3y'' + 4xy + 4x^2y' + (4x^2 - 9)xy = 0$$

oziroma:

$$4x^2y'' + 12x\,y' + (4x^2 - 5)y = 0\,.$$