

KOLOKVIJI IN IZPITI IZ ANALIZE 3
IŠRM

Zbral: Martin Raič

2009/10

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE 3

IŠRM

22. april 2010

1. Naj bo $a, b > 0$. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx.$$

Bonus (dodatnih 10 točk): pokažite ustrezno enakomerno konvergenco.

2. Izračunajte dvojni integral:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2},$$

kjer je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq xy \leq 2\}$.

3. Izračunajte težišče polovice astroide, natančneje krivulje, podane parametrično po predpisu:

$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Privzemite, da je krivulja homogena.

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$3y^2 - 16xy + 20x^2 + 2xyy' - 4x^2y' = 0.$$

Namig: če enačbo pomnožite z x^a za primeren a , postane eksaktna.

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE 3

IŠRM

3. junij 2010

1. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$\frac{y'^2}{y(1+y^2)} + y'' = 0.$$

2. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe:

$$x^2 y'' + xy' - 4y = x,$$

ki zadošča začetnemu pogoju $y(1) = y'(1) = 0$.

3. Dokažite, da je funkcija:

$$v(x, y) = ax + b$$

imaginarni del neke analitične funkcije spremenljivke $z = x + iy$ za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$. Določite to analitično funkcijo!

4. Izračunajte integral:

$$\int_0^\infty e^{-2x} \sin x \, dx.$$

Namig: integrand izrazite s kompleksno eksponentno funkcijo in naredite primerno substitucijo. Privzamete lahko, da je vseeno, v katero smer gre integracijska pot proti neskončnosti, le da integral konvergira.

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

7. junij 2010

1. Za $t \geq 0$ izračunajte:

$$\int_0^t u e^u \sin(t-u) \, du.$$

Namig: Laplaceova transformacija.

2. Izračunajte:

$$\iint_D \frac{1}{y} \, dx \, dy,$$

kjer je D območje, ki ga omejujejo krivulje:

$$y = e^x, \quad y = 3e^x, \quad y = e^{-x} \quad \text{in} \quad y = 2e^{-x}.$$

Namig: uporabite primerne nove koordinate.

3. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' = y' - y'^2.$$

4. Označimo z A polkrog v kompleksni ravnini, določen po predpisu:

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Definirajmo še:

$$f(z) := \frac{1}{z-i}$$

Skicirajte množici A in $f(A)$.

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

21. junij 2010

1. Izračunajte integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2) - \ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx .$$

Namig: odvajajte.

2. Izračunajte trojni integral:

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} (x \cos z - y \sin z)^2 dx dy dz .$$

Namig: vpeljite cilindrične koordinate in upoštevajte adicijski izrek za kosinus.

3. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $yy'' + y'^2 = 0$.
4. Poiščite konformno preslikavo, ki notranjost kroga s središčem v 1 in polmerom 2, ki ji odvzamemo središče, bijektivno preslika na zunanost kroga s središčem v i in polmerom 2.

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

13. september 2010

1. Naj bo $a \geq 0$. Izračunajte integral:

$$\int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x^2} \right) dx.$$

Namig: odvajajte.

2. Izračunajte trojni integral:

$$\iiint_K \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz,$$

kjer je K enotska kroгла.

3. Poiščite rešitev sistema diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 3y + e^{-t} \\ \dot{y} &= 2x - 6y, \end{aligned}$$

ki se začne v izhodišču, t. j. $x(0) = y(0) = 0$.

4. Izračunajte integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \cos t} dt.$$

Namig: s substitucijo $z = e^{it}$ ga prevedite na integral ustrezne analitične funkcije, le-tega pa izračunajte s pomočjo Cauchyjeve integralske formule.

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

21. marec 2011

1. Dokažite, da je integral:

$$\int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} \frac{y^x}{\ln y} dy$$

neodvisen od x .

Namig. Najprej pokažite, da to velja na poltrakih $(-\infty, -1)$ in $(-1, \infty)$. Nato pa s substitucijo $z = 1/y$ pokažite še, da se vrednost na prvem poltraku ujema z vrednostjo na drugem poltraku.

2. Izračunajte volumen telesa, ki ga omejujejo ravnine $z = 0$, $z = y$, $y = 1 - x^2$ in $y = 2 - 2x^2$.

3. Dana je vektorska funkcija:

$$f(x, y) = 2 \sin(x + 3y) + \cos(x + 3y), \quad g(x, y) = 3 \cos(x + 3y).$$

- Dokažite, da obstaja natanko en $a \in \mathbb{R}$, za katerega je vektorska funkcija $(e^{ax}f(x, y), e^{ax}g(x, y))$ potencialna.
- Izračunajte potencial tako dobljene vektorske funkcije.
- Rešite diferencialno enačbo $3y' + 2 \operatorname{tg}(x + 3y) + 1 = 0$.

4. Določite $f(A)$, kjer je $A = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 2\}$ in $f(z) = \frac{1}{z - i}$.

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

29. junij 2011

1. Izračunajte $F'(\pi/3)$, kjer je:

$$F(x) = \int_{3x-\pi}^x \cos(x \cos y) \operatorname{tg} y \, dy.$$

2. Rešite sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= 2x + 2y + e^t\end{aligned}$$

pri začetnih pogojih $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

3. Izračunajte $\iint_D \frac{1}{y} \, dx \, dy$, kjer je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 \leq y \leq x\}$.

4. Dokažite, da je funkcija:

$$f(x, y) = e^y \cos x$$

realni del neke analitične funkcije. Določite to analitično funkcijo!

2008/09

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE 3

IŠRM

7. april 2009

1. Dana je funkcija:

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{tx - \frac{1}{2}t^2} dt.$$

Izračunajte $f'(x) - xf(x)$.

Namig: pri utemeljitvi pokažite, da ustrezni integrali konvergirajo enakomerno po $x \in (-\infty, a]$ za vsak $a \in \mathbb{R}$.

2. Rešite sistem diferencialnih enačb:

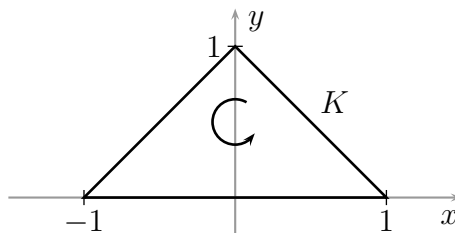
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y \\ \dot{y} &= 2x - 3y + e^{-2t}\end{aligned}$$

pri začetnih pogojih $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

3. Izračunajte težišče homogenega telesa, določenega s pogoji:

$$0 \leq x \leq 1, \quad y^2 + z^2 \leq x^2, \quad z \geq 0.$$

4. Izračunajte krivuljni integral $\oint_K [(y e^x - y + e^{-y}) dx + (e^x + x - x e^{-y}) dy]$,
kjer je K rob trikotnika na skici, orientiran v nasprotni smeri urinega kazalca:



Namig: Greenova formula.

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE 3

IŠRM

11. junij 2009

1. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$yy'' + 2(y')^2 = 0$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2. Poiščite splošno rešitev sistema diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 - 4x_2 + e^t.\end{aligned}$$

3. Naj bo $A = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > -1\}$ in $f(z) = \frac{1}{z-i}$. Določite $f(A)$.

4. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Namig: s substitucijo $z = e^{it}$ integral prevedite na integral analitične funkcije po ustreznih poti; le-tega lahko izračunate z uporabo Cauchyjeve integralske formule.

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

29. junij 2009

1. Za $a \geq 0$ izračunajte integral:

$$\int_0^{a^2} \frac{a - \sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$$

Namig: odvajajte.

2. Izračunajte:

$$\iiint_D z^2 dx dy dz,$$

kjer je $D = \{(x, y, z) ; 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

3. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x.$$

4. Določite množico $f(\Delta)$, kjer je Δ notranjost enotskega kroga v kompleksni ravnini in:

$$f(z) = \frac{z}{z - i}.$$

IZPIT IZ ANALIZE 3

IŠRM

3. september 2009

1. Za $t \geq 0$ izračunajte:

$$\int_0^t u e^u \sin(t - u) du .$$

Namig: Laplaceova transformacija.

2. Izračunajte:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{5/2} e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2} dx dy dz .$$

3. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' = y' - y'^2 .$$

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t dt}{t^2 + 4} .$$

Namig: pomagajte si z integralom kompleksne forme $\frac{e^{iz} dz}{z^2 + 4}$ po robu zgornjega polkroga.