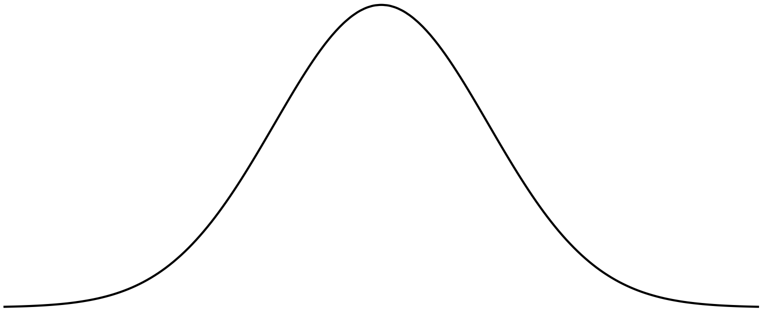
# O GAUSSOVI KRIVULJI

Martin Raič

Izlet v matematično vesolje
UP FAMNIT
10. februar 2016

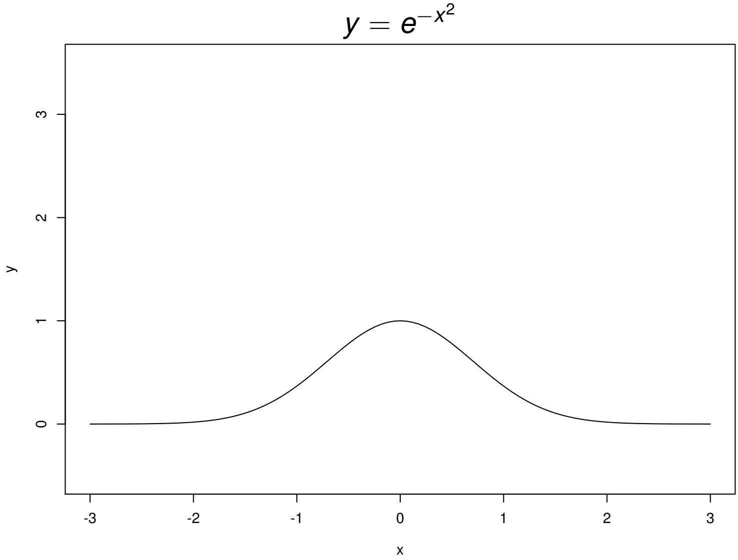
# GAUSSOVA KRIVULJA



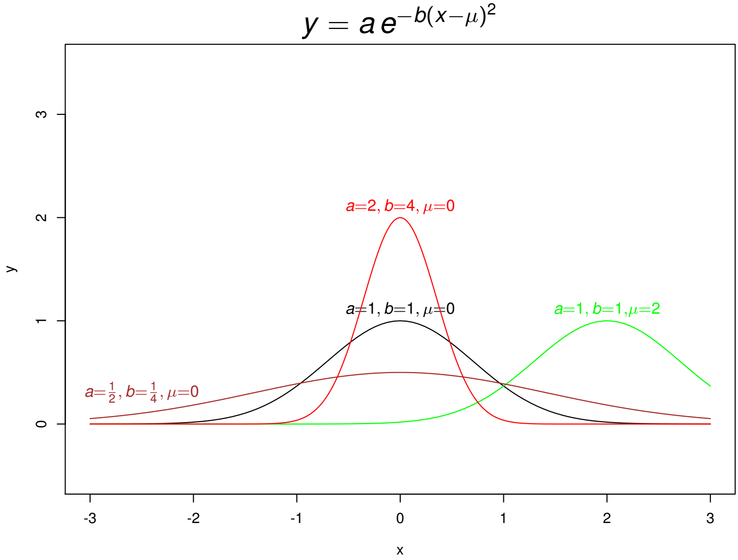
Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)
nemški matematik

Vir: Vikipedija

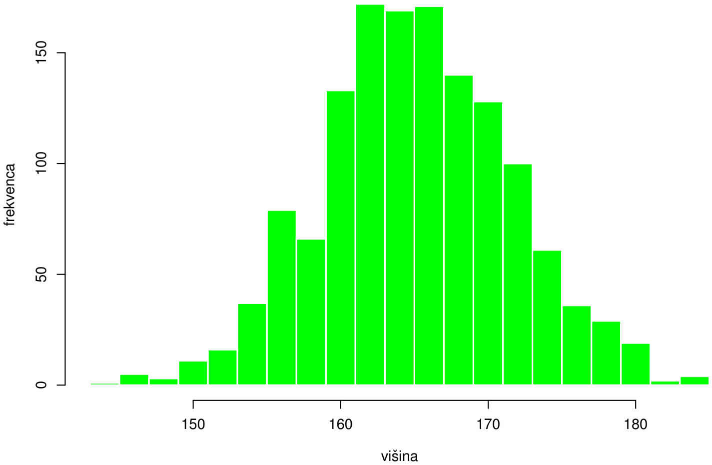
# GAUSSOVA KRIVULJA (OSNOVNA)



# GAUSSOVA KRIVULJA (TRANSFORMIRANA)

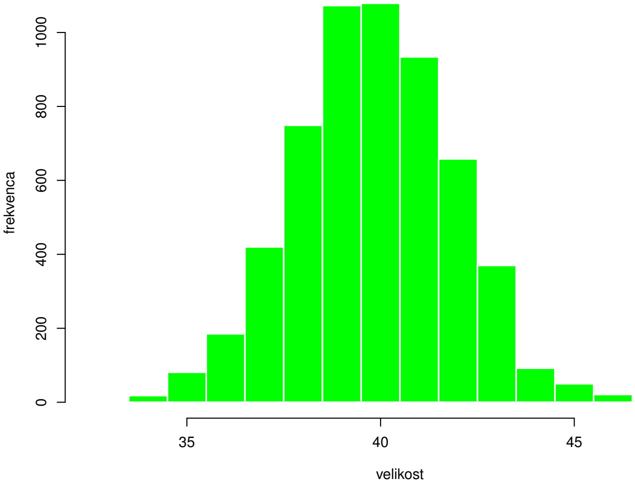


# TELESNA VIŠINA 1382 BAVARSKIH VOJAŠKIH OBVEZNIKOV IZ 19. STOLETJA

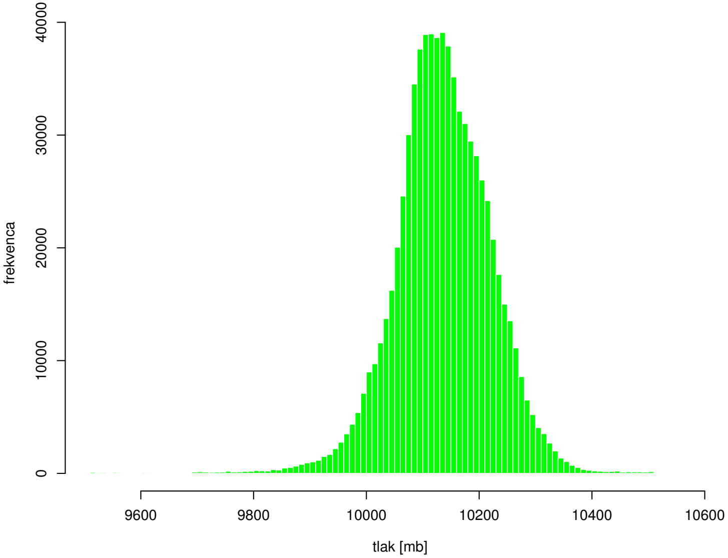



Vir podatkov (9. 8. 2015): `http://www.uni-tuebingen.de/fakultaeten/wirtschafts-und-sozialwissenschaftliche-fakultaet/faecher/wirtschaftswissenschaft/lehrstuehle/volkswirtschaftslehre/wirtschaftsgeschichte/data-hub-height.html`

# OBSEG PRSNEGA KOŠA PRI 5738 ŠKOTSKIH VOJAKIH

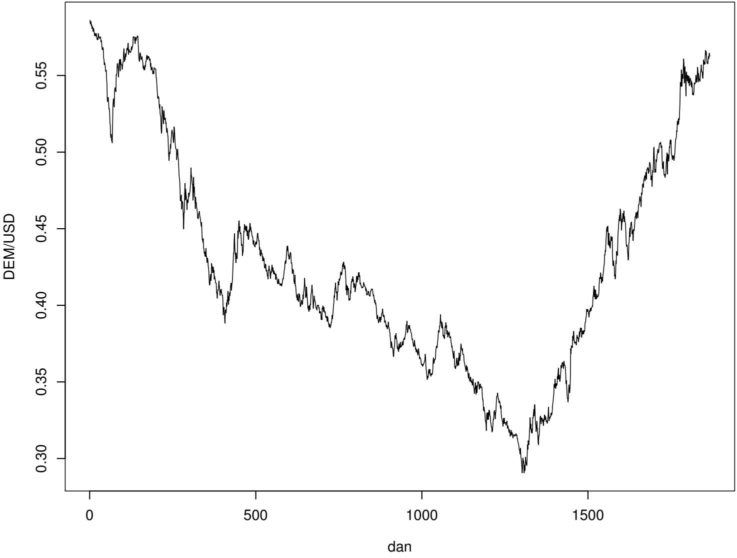



Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`



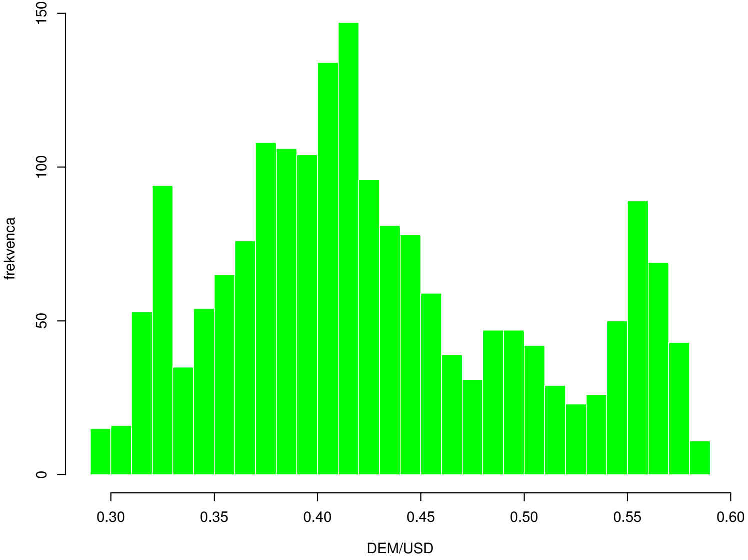

Vir podatkov (9. 8. 2015): `http://cdiac.ornl.gov/epubs/ndp/ndp026c/ndp026c.html`

# DEM : USD (1980–1987)



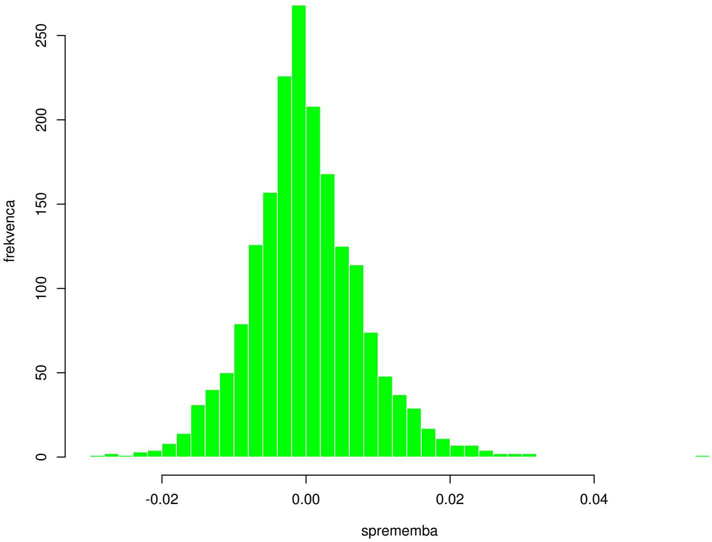

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# DEM : USD (1980–1987)



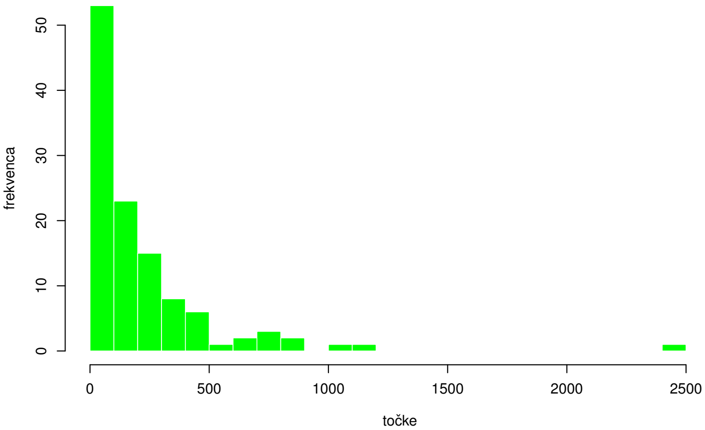

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# DEM : USD (1980–1987) – SPREMEMBE



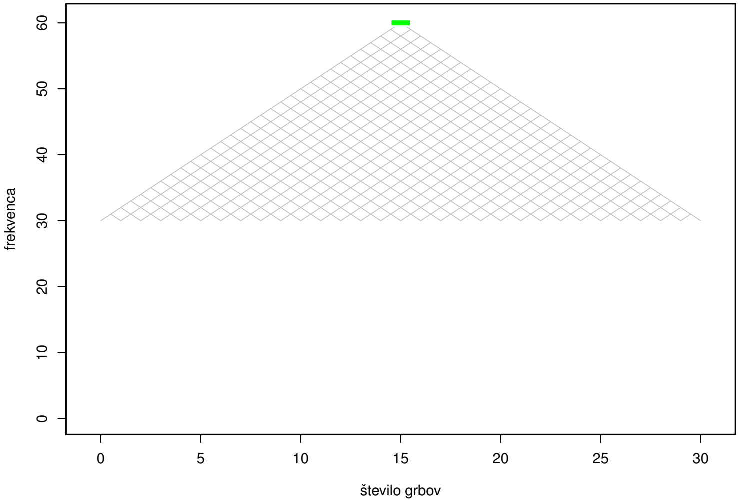

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)

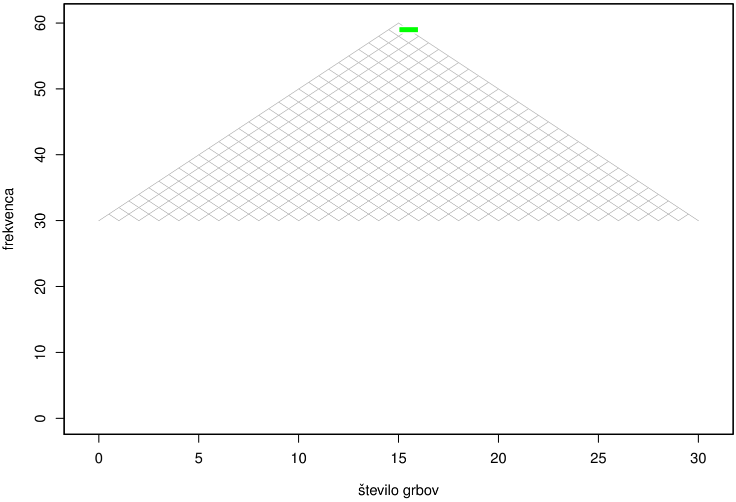



Vir podatkov (27. 3. 2013):
`http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html`

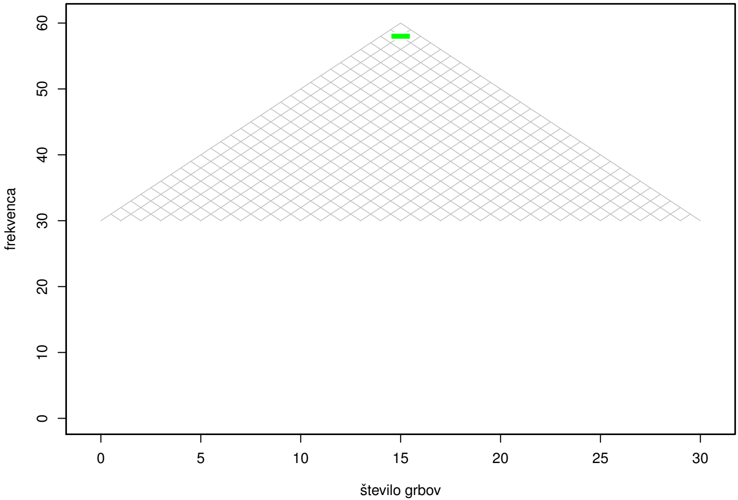
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



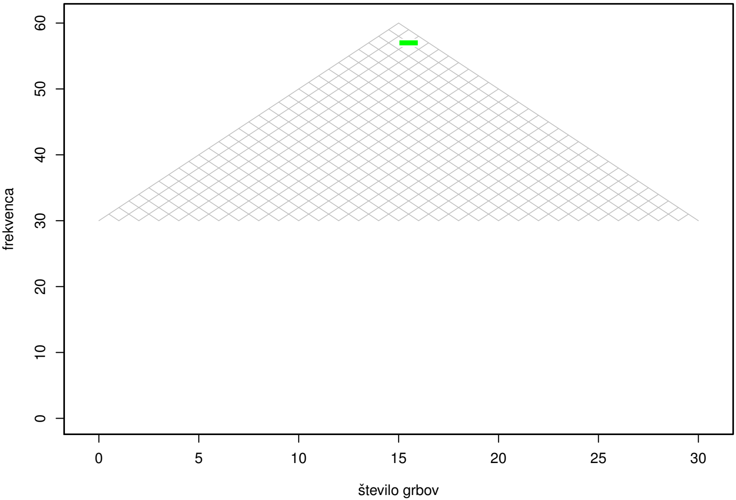
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



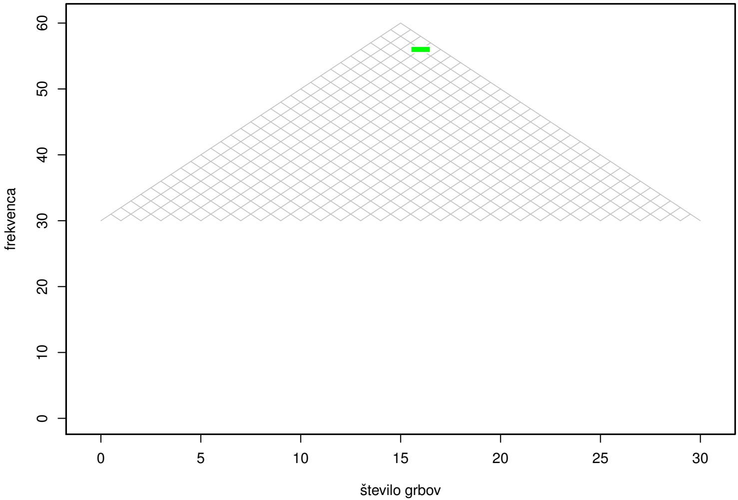
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



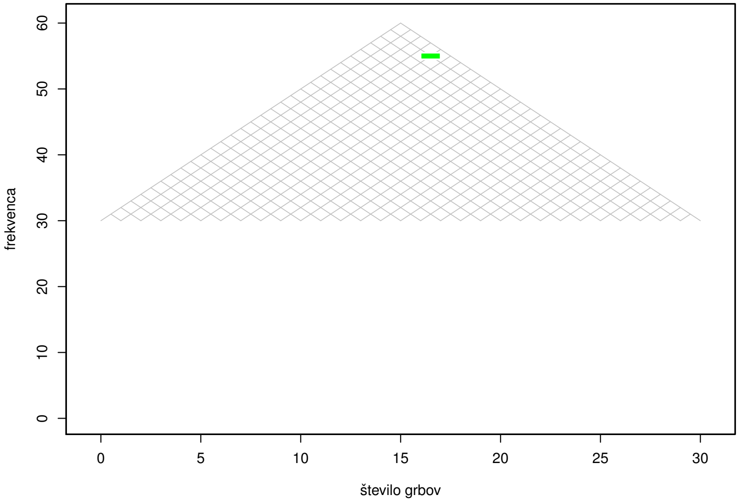
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



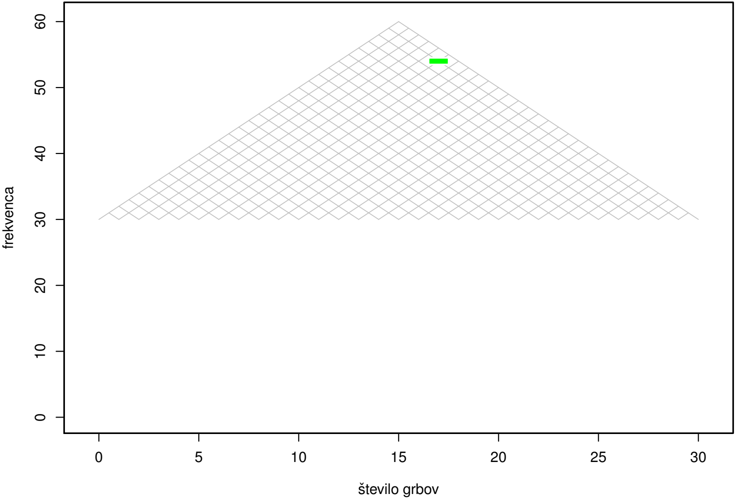
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



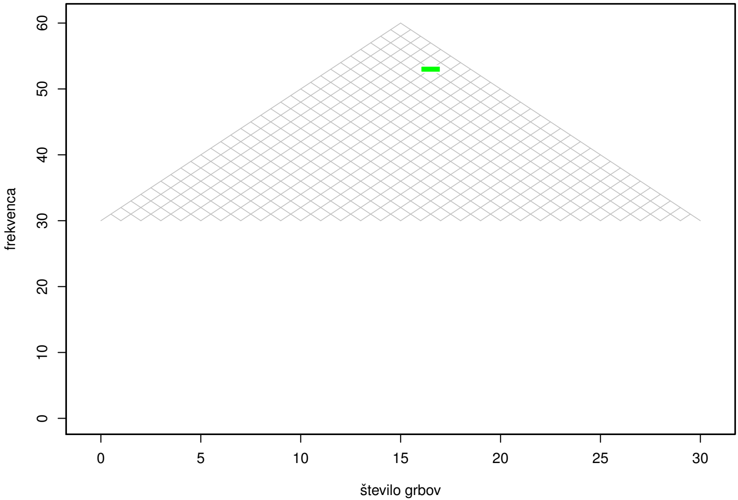
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



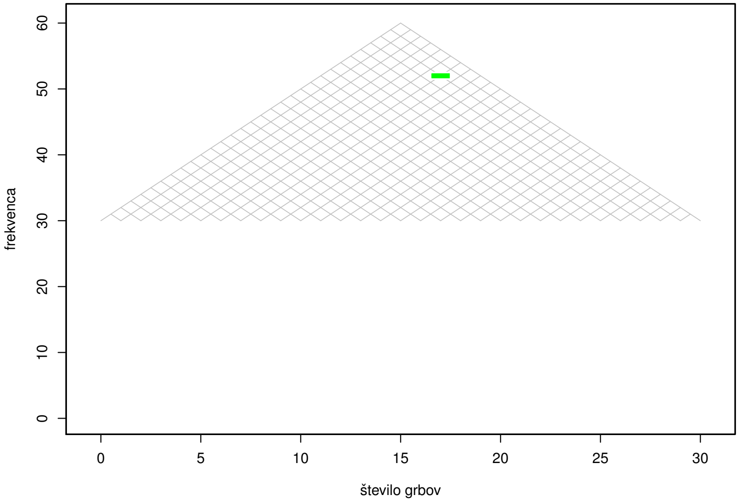
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



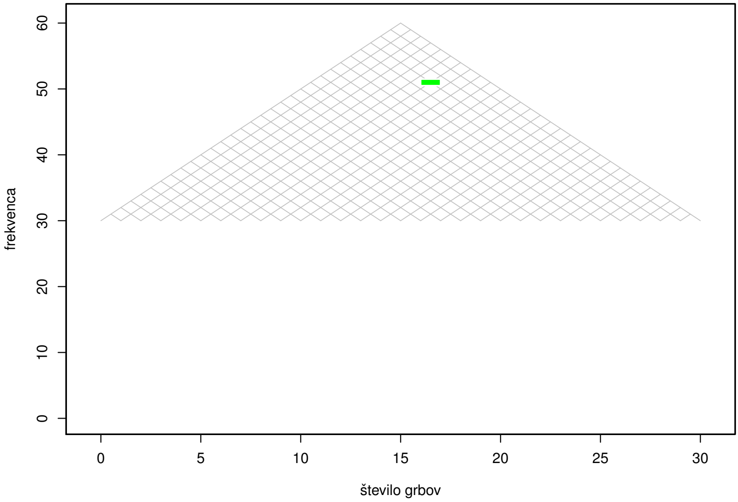
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



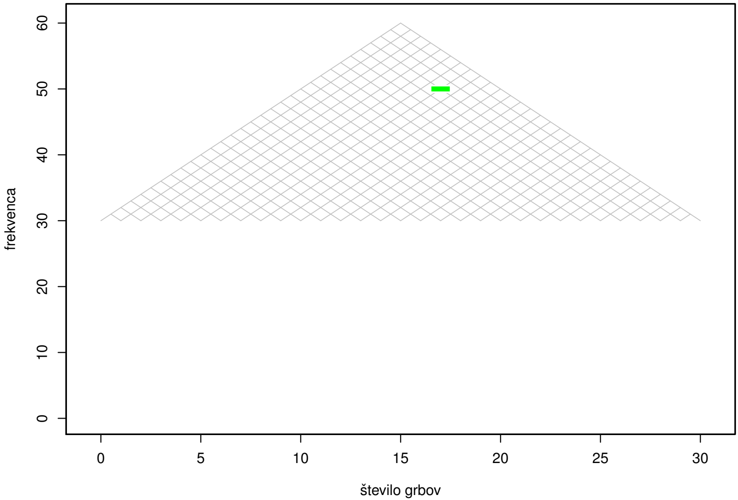
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



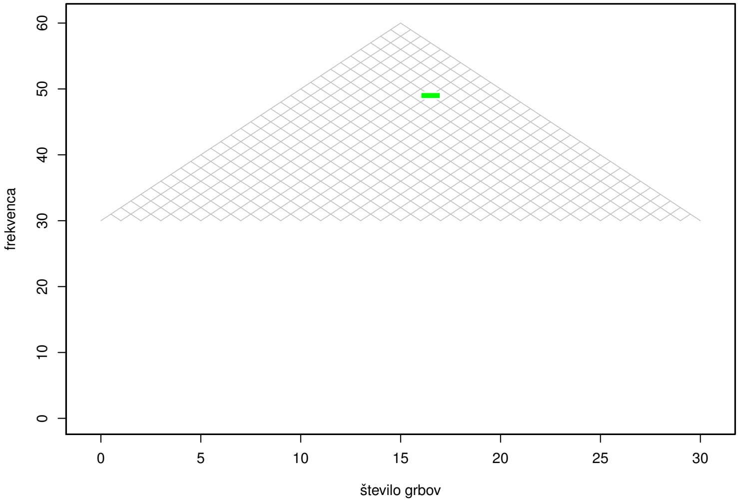
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



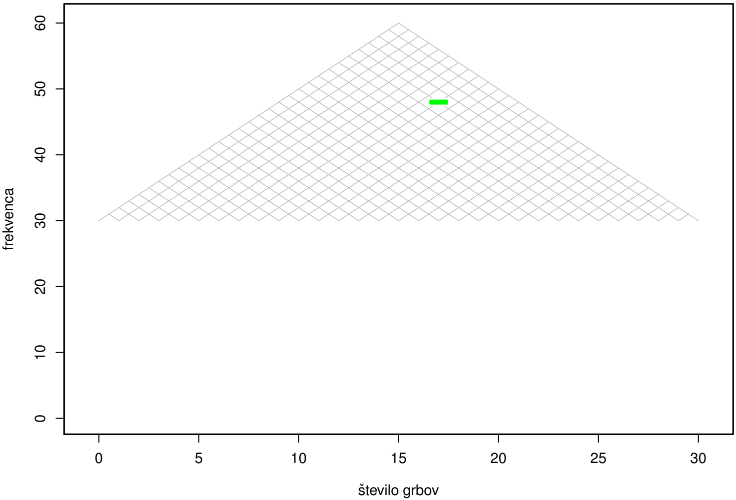
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



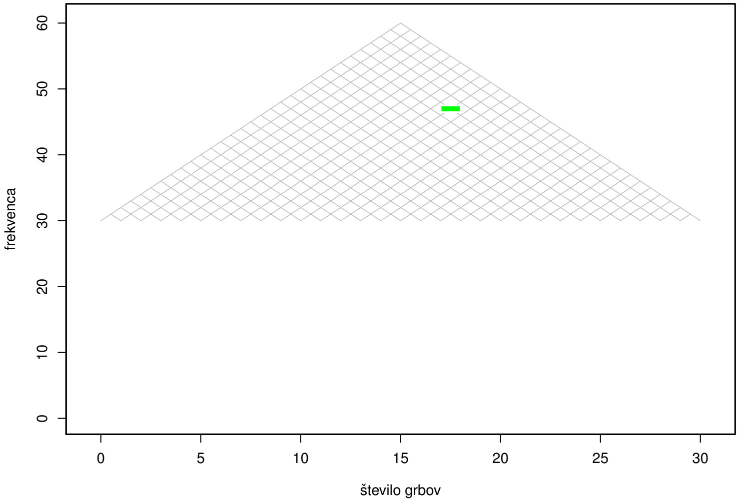
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



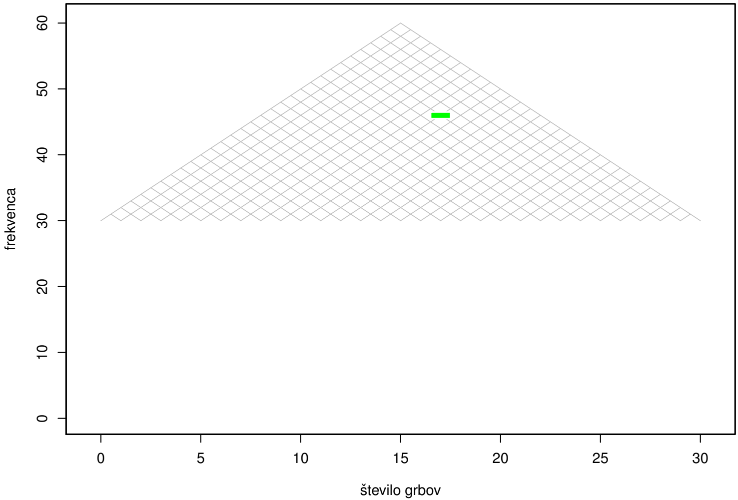
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



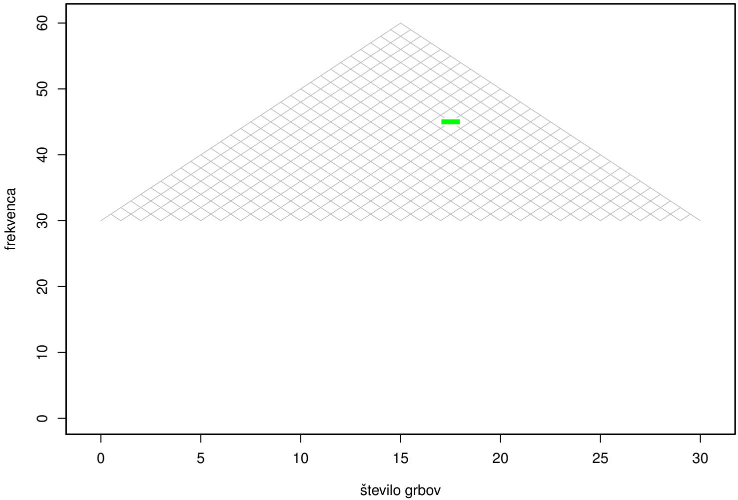
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



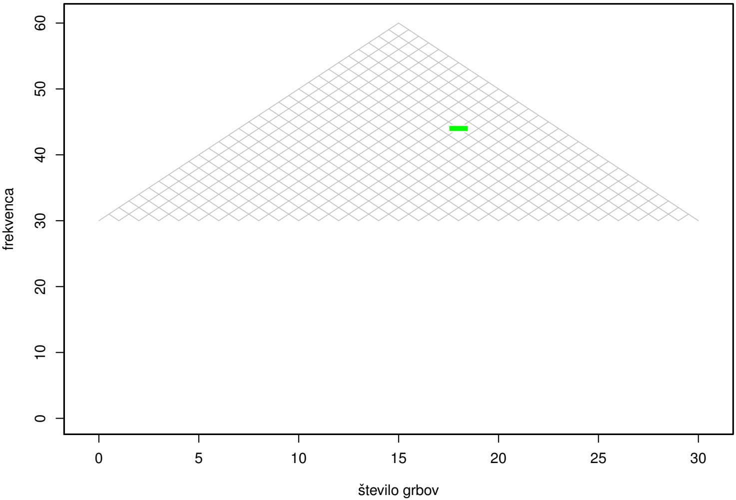
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



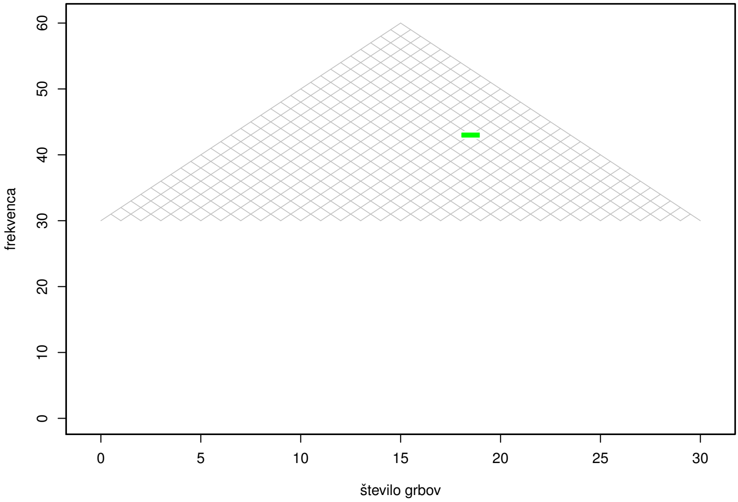
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



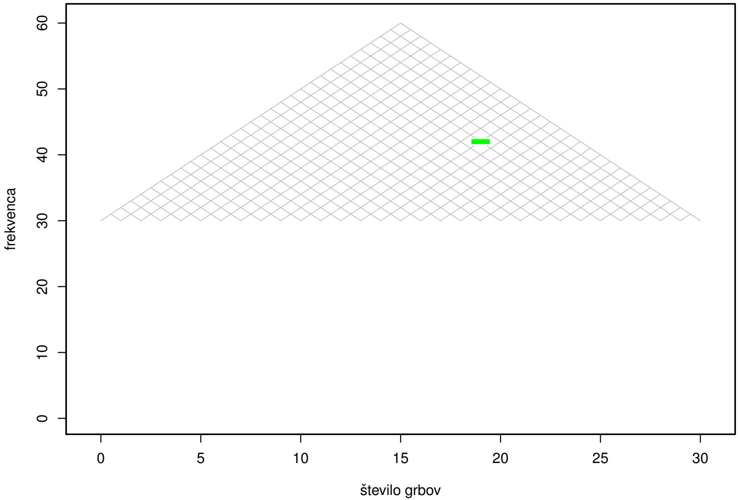
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



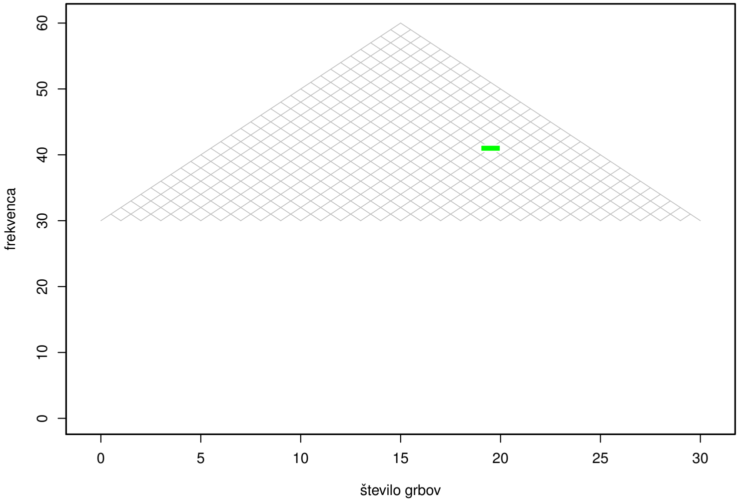
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



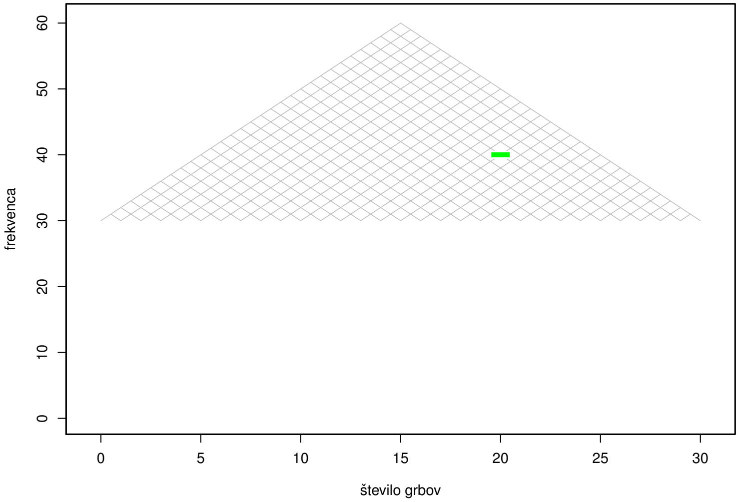
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



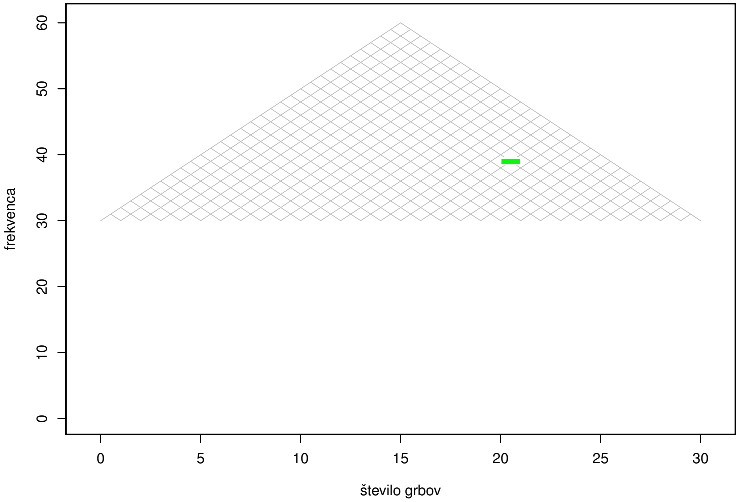
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



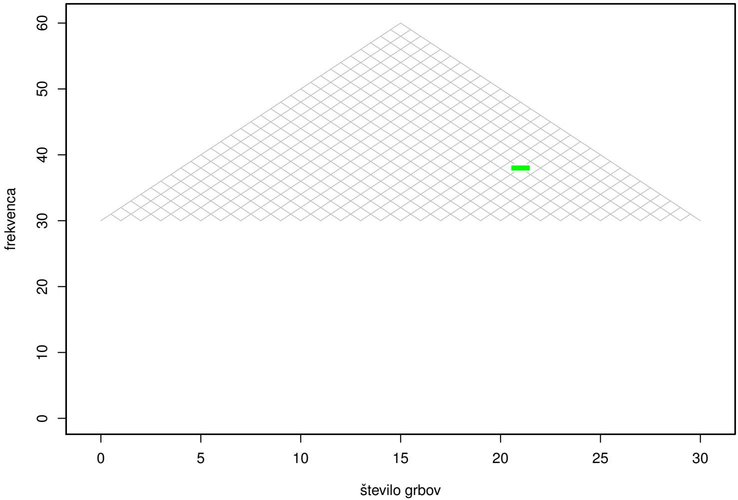
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



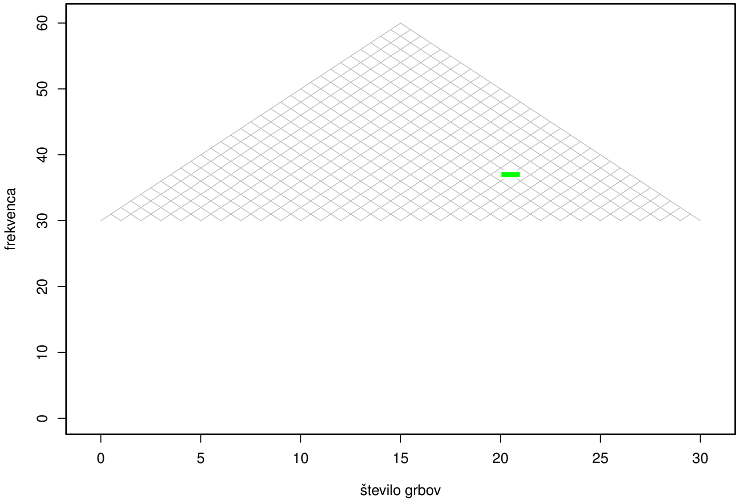
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



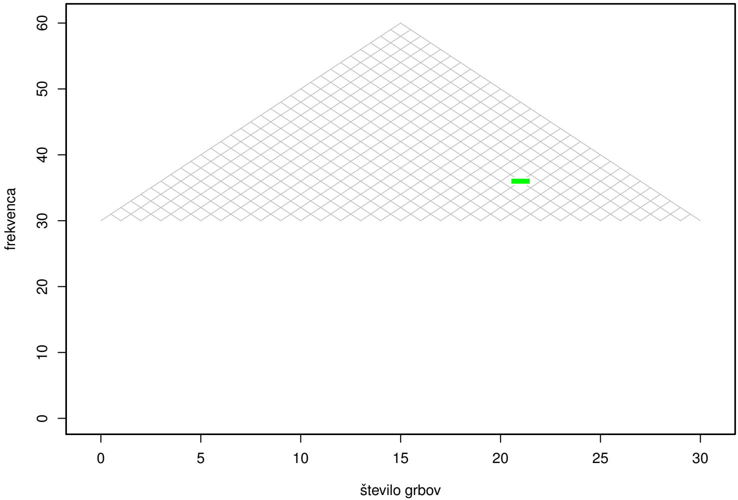
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



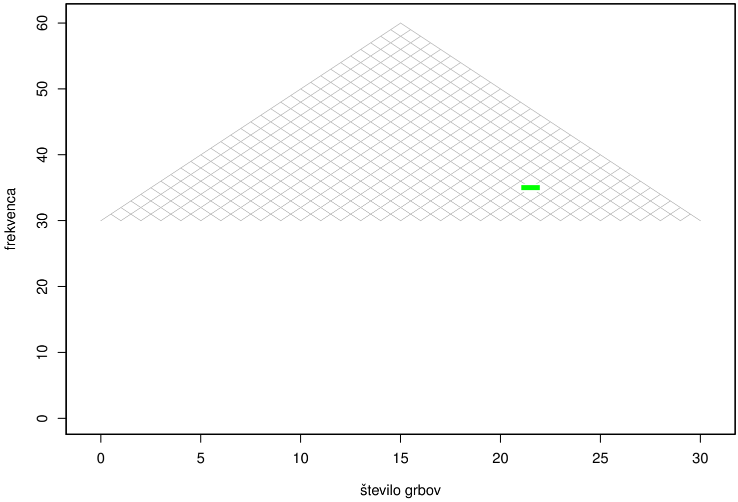
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



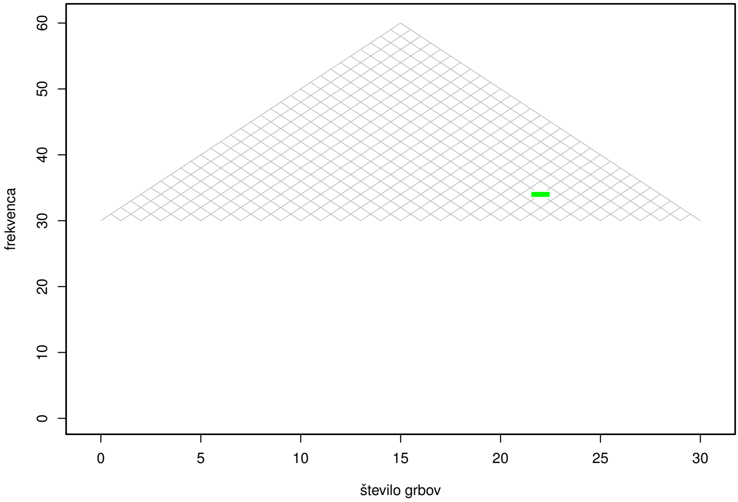
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



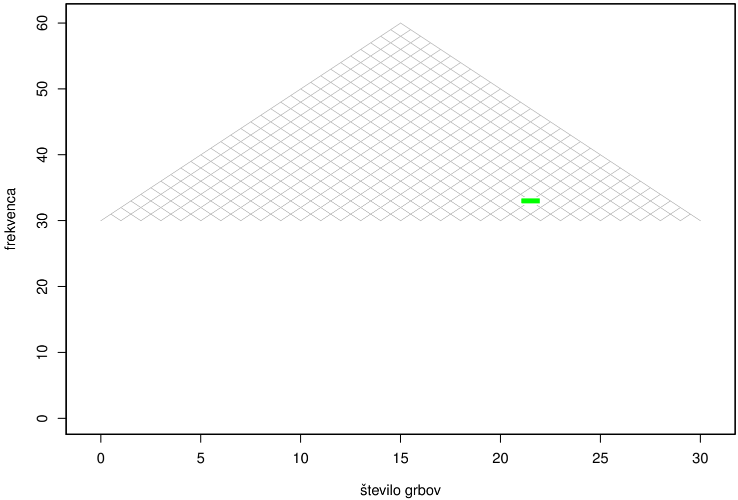
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



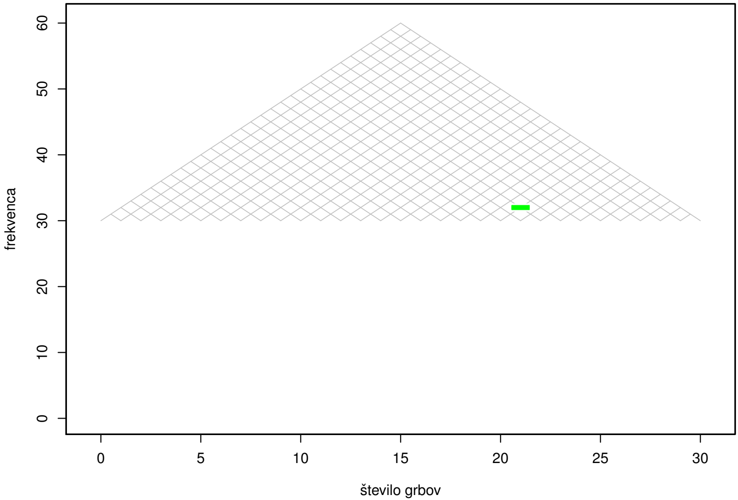
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



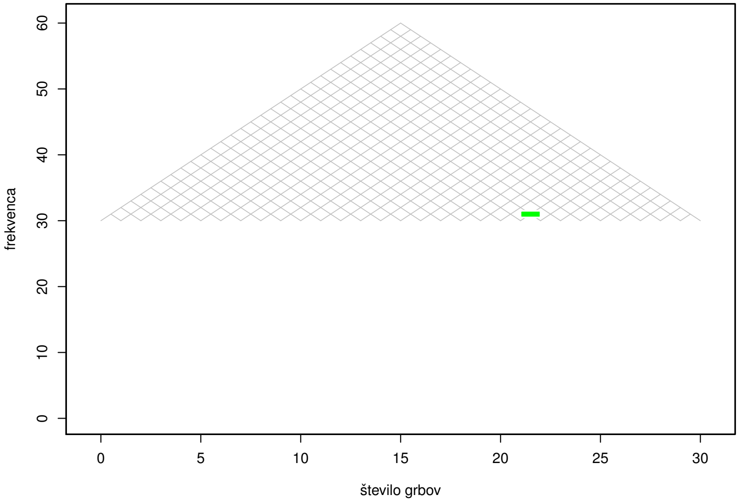
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



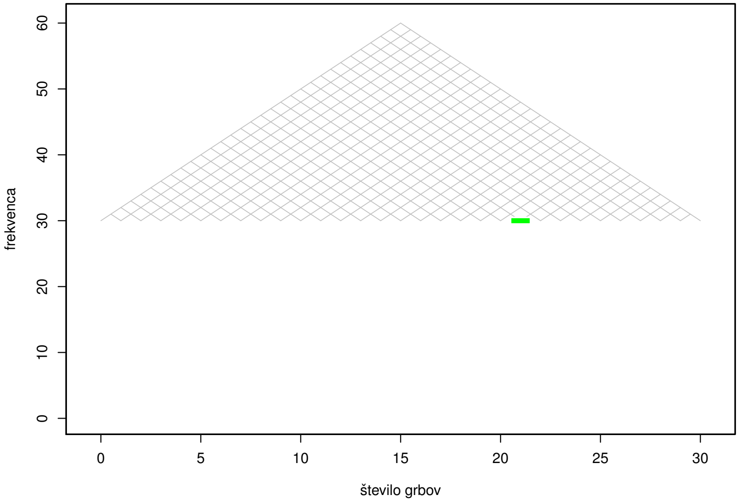
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



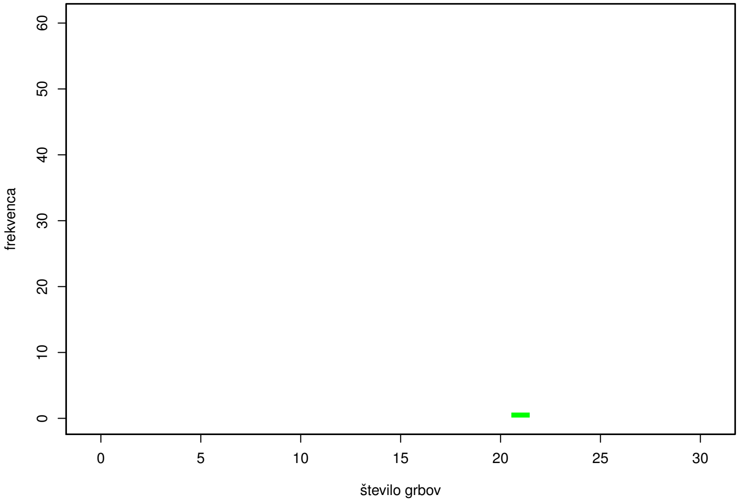
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



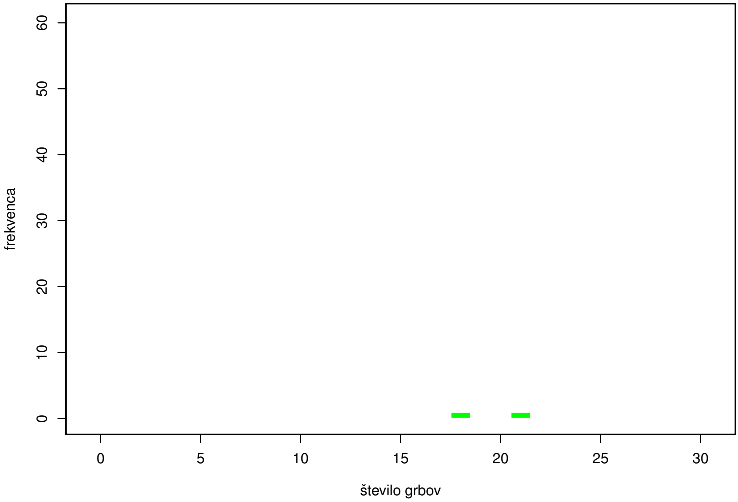
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



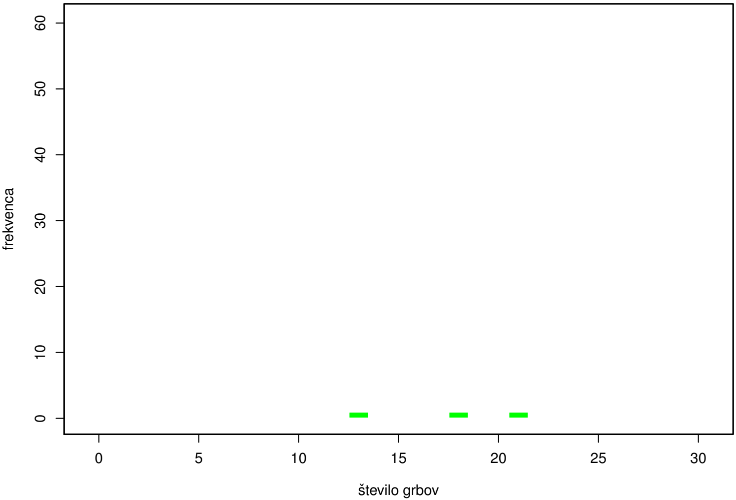
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 1. izvedba



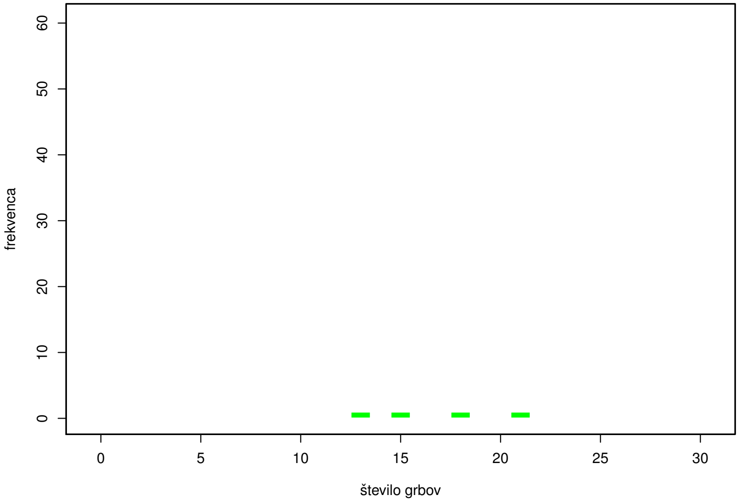
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 2. izvedba



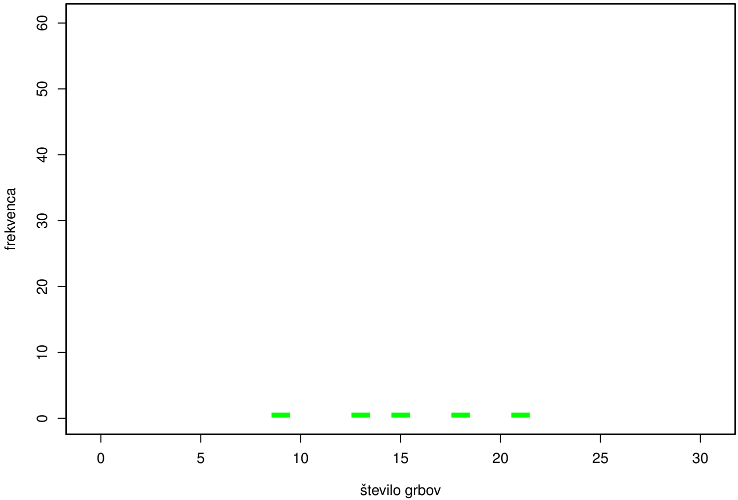
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 3. izvedba



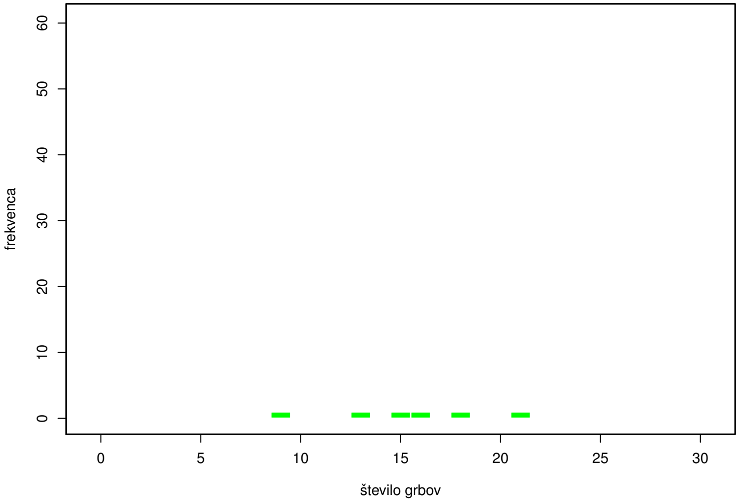
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 4. izvedba



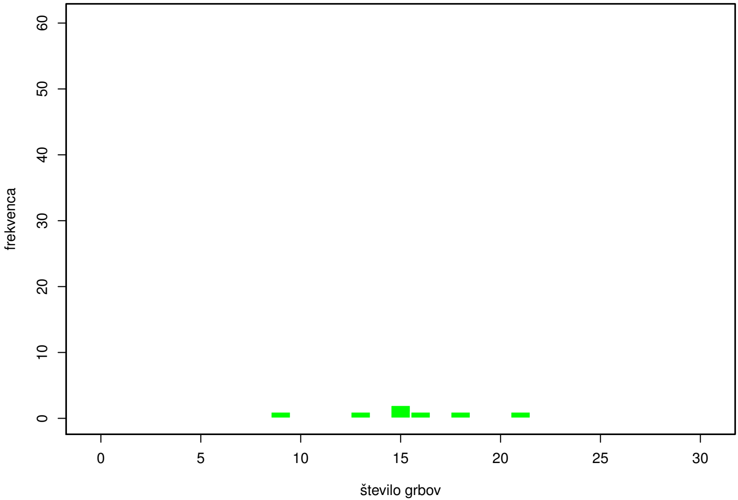
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 5. izvedba



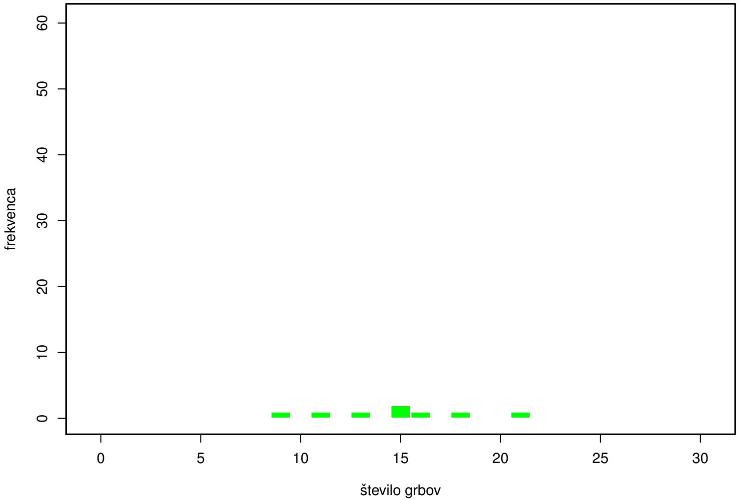
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 6. izvedba



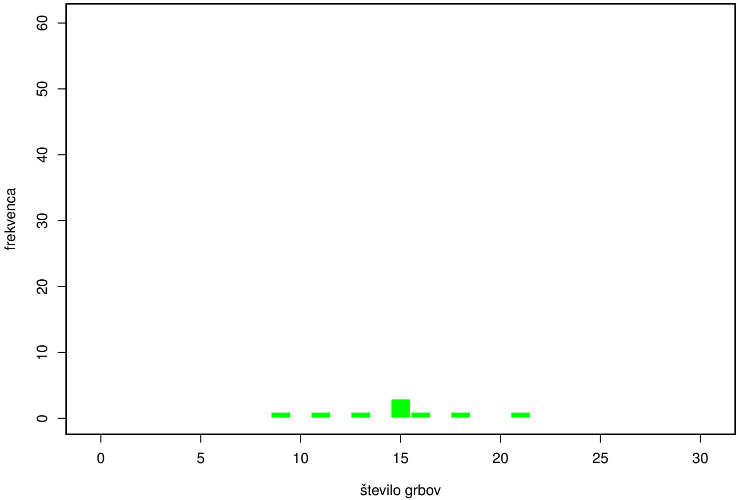
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 7. izvedba



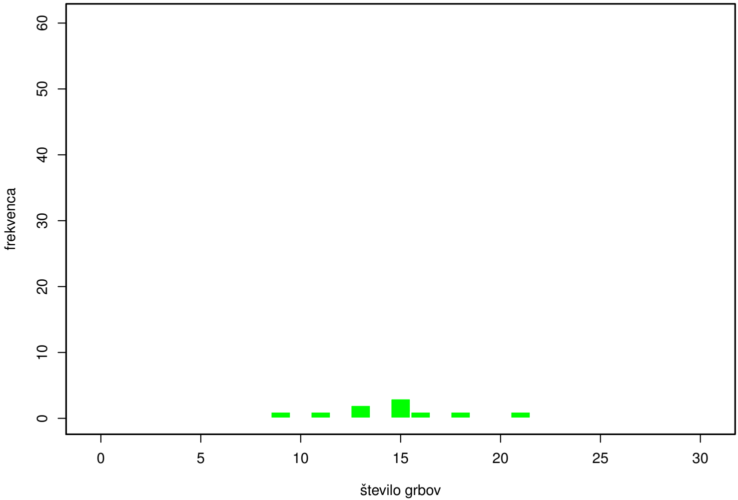
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 8. izvedba



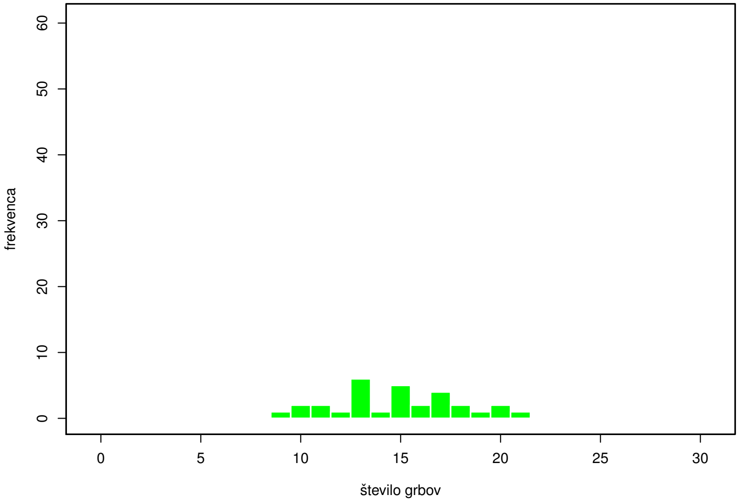
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 9. izvedba



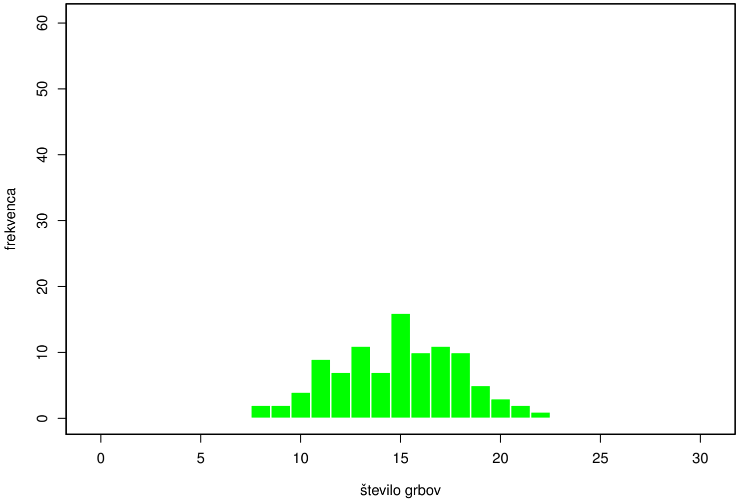
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 10. izvedba



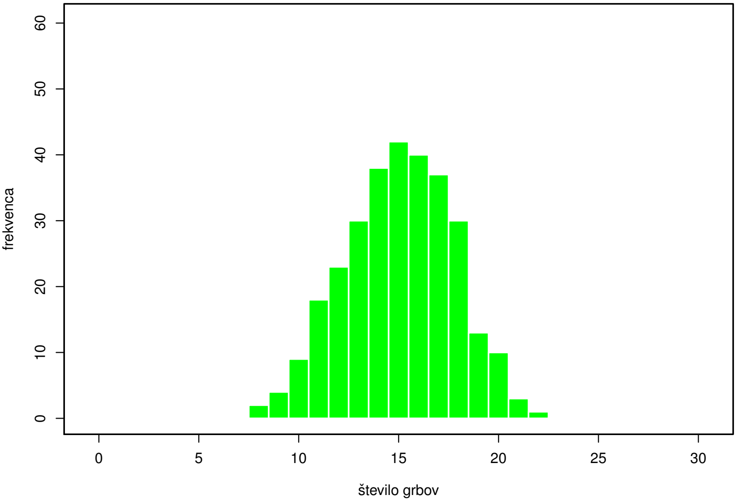
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 30. izvedba



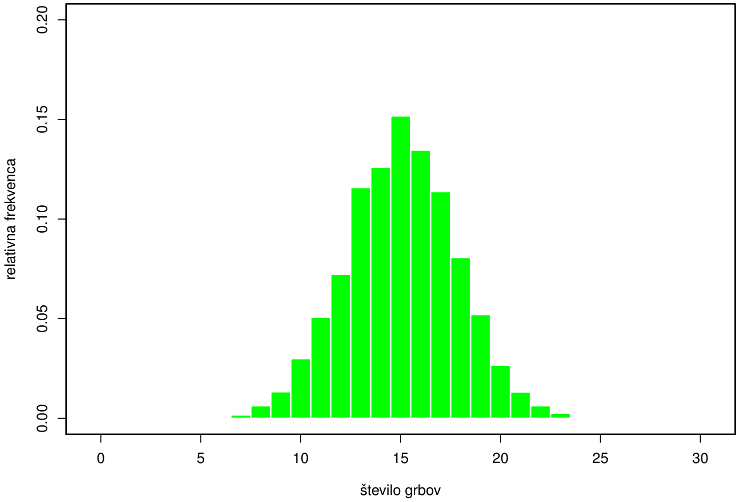
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 100. izvedba



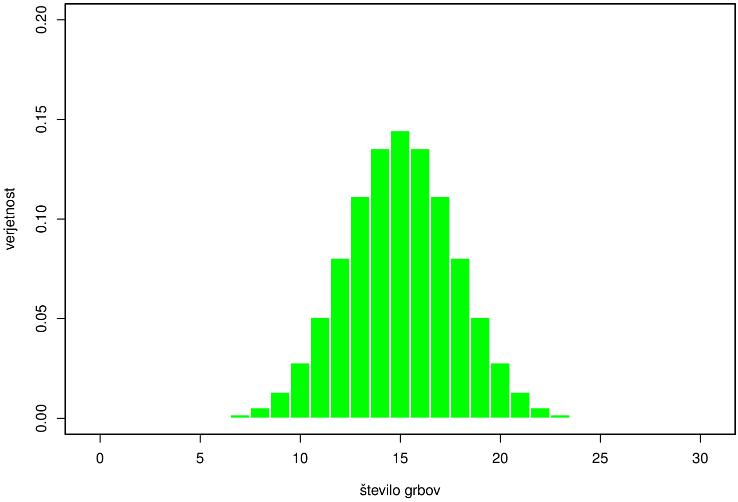
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 300. izvedba



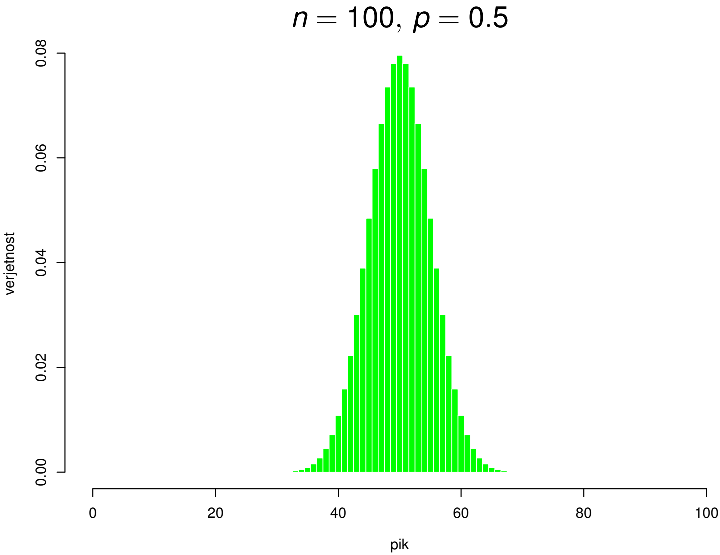
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: 10000. izvedba



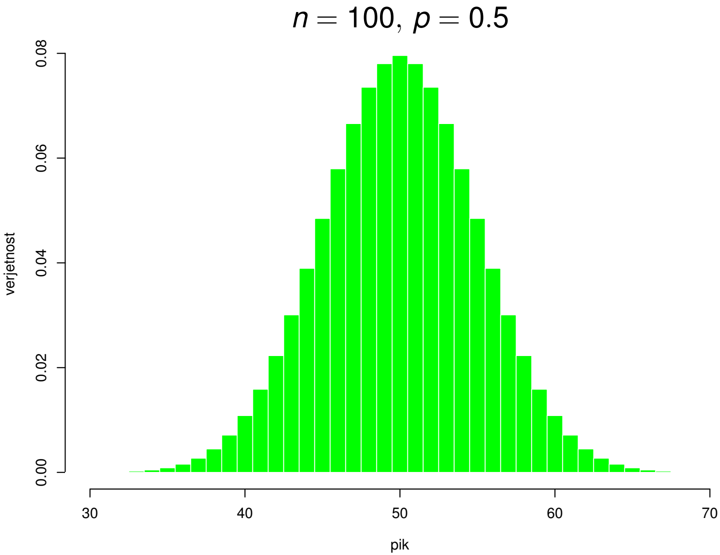
# MET 30 POŠTENIH KOVANCEV: VERJETNOSTI

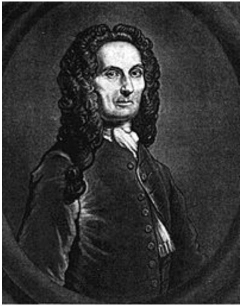


# 100 METOV POŠTENEGA KOVANCA



# 100 METOV POŠTENEGA KOVANCA





Abraham de Moivre
(1667–1754)
francoski matematik, deloval v Angliji

Vir: Vikipedija

# IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (1)

- $n$-krat vržemo pošten kovanec
- $G :=$ število grbov, ki padejo
- Verjetnost, da pade natanko $g$ grbov, označimo s $\mathbb{P}_n(G = g)$.
- $\mathbb{P}_n(G = g) = \dfrac{\binom{n}{g}}{2^n}$
- $\displaystyle\binom{n}{g} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-g+1)}{g!}$
- $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

# IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (2)

Aproksimacija temelji na kvocientu zaporednih verjetnosti:

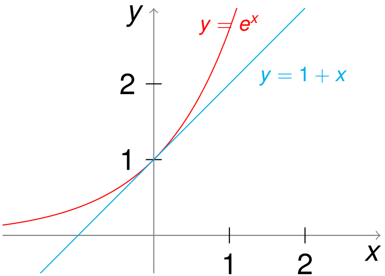
$$\frac{\mathbb{P}_n(G = g)}{\mathbb{P}_n(G = g - 1)} = \frac{\frac{n!}{2^n\, g!\,(n-g)!}}{\frac{n!}{2^n\,(g-1)!\,(n-g+1)!}} = \frac{(g-1)!\,(n-g+1)!}{g!\,(n-g)!} = \\ = \frac{n-g+1}{g}\,.$$

Zaradi enostavnosti vzemimo, da je $n$ sodo število, t. j. $n = 2m$. Naj bo $g = m + d$. Tedaj lahko zgornjo enakost prepišemo v obliki:

$$\frac{\mathbb{P}_{2m}(G = m + d)}{\mathbb{P}_{2m}(G = m + d - 1)} = \frac{m - d + 1}{m + d} = \frac{1 - \frac{d-1}{m}}{1 + \frac{d}{m}}\,.$$

V naslednjem koraku bomo to aproksimirali za primer, ko je $d \ll m$.

Za majhne $x$ je $1 + x \approx e^x$:




Črka $e$ označuje **Eulerjevo število**:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq 2{,}718281828459045235536\,,$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Leonhard Euler
(1707–1783)
švicarski matematik

Vir: Vikipedija

# IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (4)

Če $d$ ni prevelik, je torej:

$$\frac{\mathbb{P}_{2m}(G = m + d)}{\mathbb{P}_{2m}(G = m + d - 1)} = \frac{n - g + 1}{g} \approx \frac{e^{-(d-1)/m}}{e^{d/m}} = e^{-(2d-1)/m} .$$

Z množenjem teh približkov dobimo (za $d \geq 0$):

$$\frac{\mathbb{P}_{2m}(G = m + d)}{\mathbb{P}_{2m}(G = m)} \approx e^{-(1+3+5+\cdots+(2d-1))/m} = e^{-d^2/m} .$$

Sledi:

$$\mathbb{P}_{2m}(G = m + d) \approx \mathbb{P}_{2m}(G = m)\, e^{-d^2/m} .$$

Zaradi simetrije to velja tudi za negativne $d$.

**Verjetnosti torej sledijo Gaussovi krivulji.**

Približek za $\mathbb{P}_{2m}(G = m)$ dobimo iz dejstva, da je vsota vseh verjetnosti enaka 1:

$$\sum_{d=-m}^{m} \mathbb{P}_{2m}(G = m + d) = 1 \,.$$

Ker se vse dogaja v območju $d = O(\sqrt{n})$ (sicer je faktor $e^{-d^2/m}$ zanemarljiv), smemo aproksimirati:

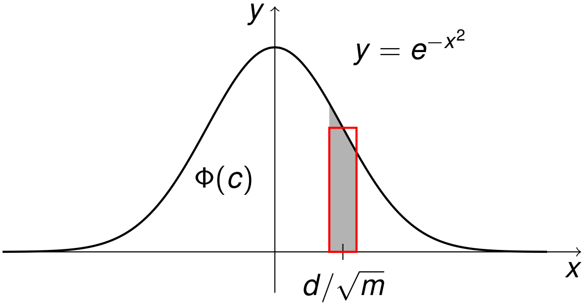
$$\sum_{d=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{2m}(G = m)\, e^{-d^2/m} \approx 1 \,.$$

# IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (6)

Prejšnjo formulo prepišemo v obliki:

$$\sqrt{m}\,\mathbb{P}_{2m}(G = m) \sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}}\, e^{-(d/\sqrt{m})^2} \approx 1\,.$$

Posamezen sumand je enak ploščini pravokotnika s širino $1/\sqrt{m}$ in višino $e^{-(d/\sqrt{m})^2}$, ta pa je približno enaka ploščini pod krivuljo $y = e^{-x^2}$ na intervalu okoli $d/\sqrt{m}$ s širino $1/\sqrt{m}$:



# IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (7)

Celotna vsota pa je približno enaka ploščini pod celotno krivuljo $y = e^{-x^2}$, za katero je znano, da je enaka $\sqrt{\pi}$:

$$\sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-(d/\sqrt{m})^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Torej je:

$$\mathbb{P}_{2m}(G = m) \approx \frac{1}{\sqrt{m\pi}}\,,$$

$$\mathbb{P}_{2m}(G = m + d) \approx \frac{1}{\sqrt{m\pi}}\, e^{-d^2/m}\,.$$

# IZPELJAVA ZA POŠTEN KOVANEC (8)

A tudi če je $n$ lih, se da z nekoliko tehnično zahtevnejšo izpeljavo dobiti:

$$\mathbb{P}_n\left(G = \frac{n}{2} + d\right) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-2d^2/n}$$

oziroma:

$$\mathbb{P}_n(G = g) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-2(g-n/2)^2/n}\,.$$

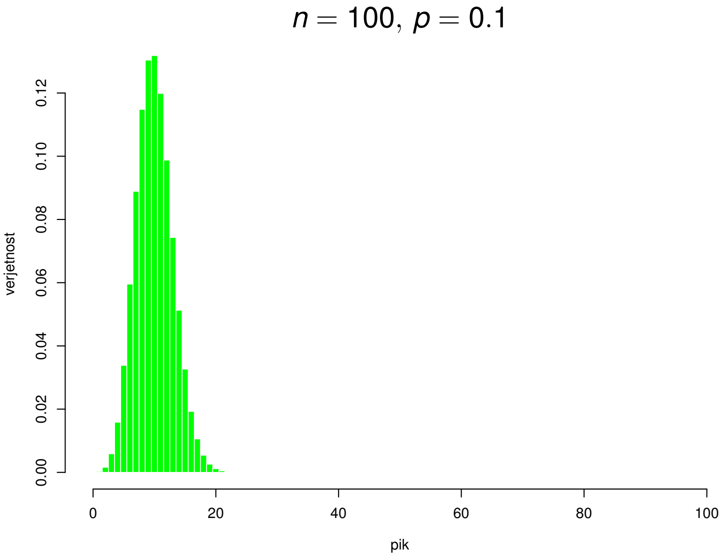
Gaussovi krivulji pa sledijo tudi verjetnosti za nepošten kovanec, na katerem grb pade z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, cifra pa z verjetnostjo $q = 1 - p$: za $|g - np| \ll (npq)^{2/3}$ velja **Laplaceova lokalna formula**:

$$\mathbb{P}_{n,p}(G = g) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-2(g-np)^2/(2npq)}\,.$$

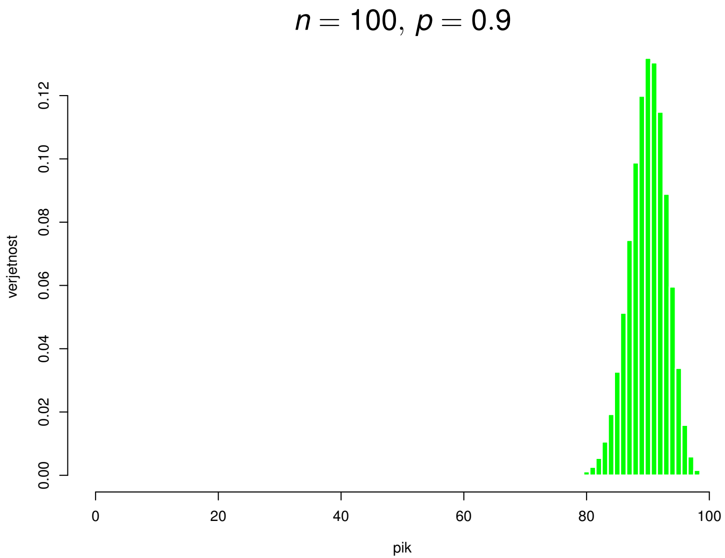
Pierre-Simon de Laplace
1749–1827
francoski matematik, astronom, fizik in politik

Vir: Vikipedija

# 100 METOV NEPOŠTENEGA KOVANCA



# 100 METOV NEPOŠTENEGA KOVANCA

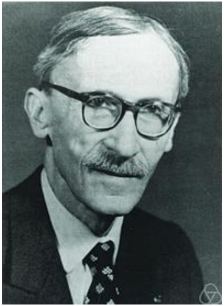


# CENTRALNI LIMITNI IZREK

Ko mečemo kovanec, si lahko predstavljamo števec, ki se vsakič, ko pade grb, poveča za 1, vsakič, ko pade cifra, pa ostane nespremenjen. Število grbov je tako vsota ničel in enic.

Gaussovi krivulji pa pod razmeroma milimi pogoji sledi tudi porazdelitev vsote veliko neodvisnih slučajnih spremenljivk: porazdelitve posameznih seštevancev ne smejo biti pregrde in nobeden ne sme preveč izstopati. Precizni formulaciji tega dejstva pravimo **centralni limitni izrek**.

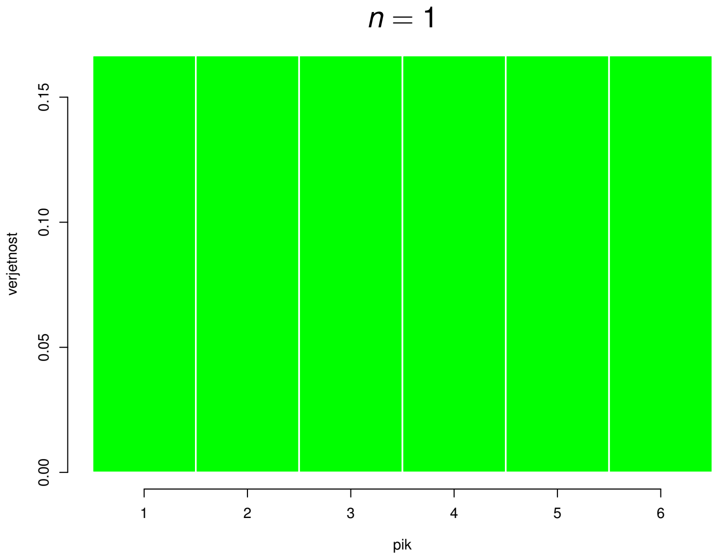
Gaussovi krivulji torej sledi porazdelitev slučajne količine, ki nastane kot rezultanta veliko majhnih neodvisnih vplivov, ki se med seboj seštevajo.



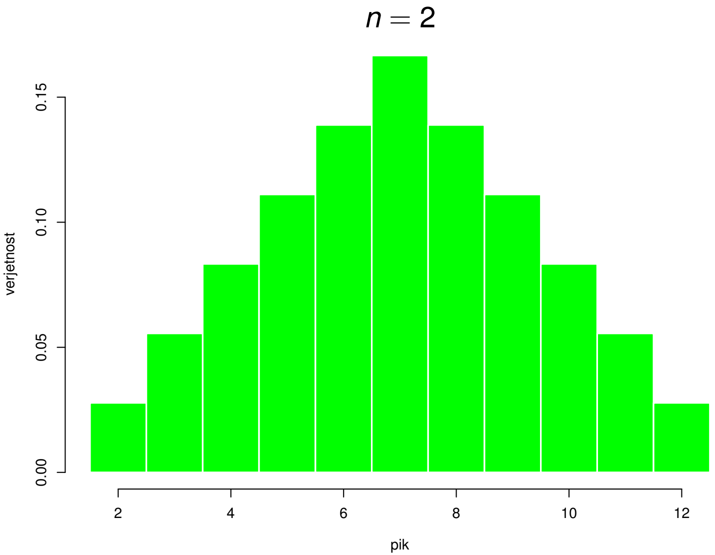
Paul Pierre Lévy
(1886-1971)
francoski matematik židovskega rodu

Vir: Vikipedija

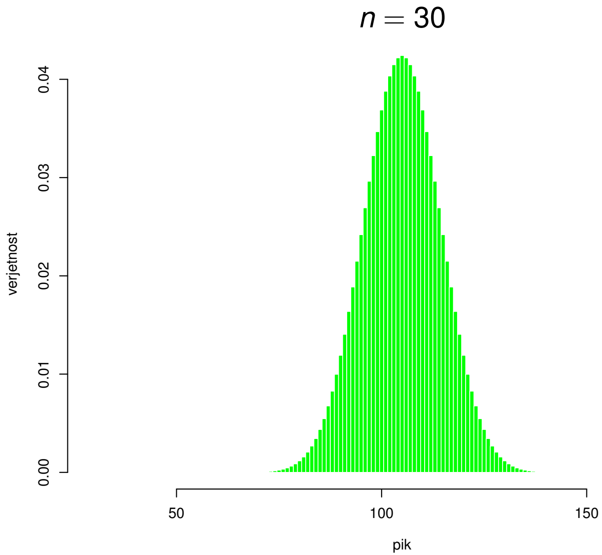
# POŠTENA KOCKA



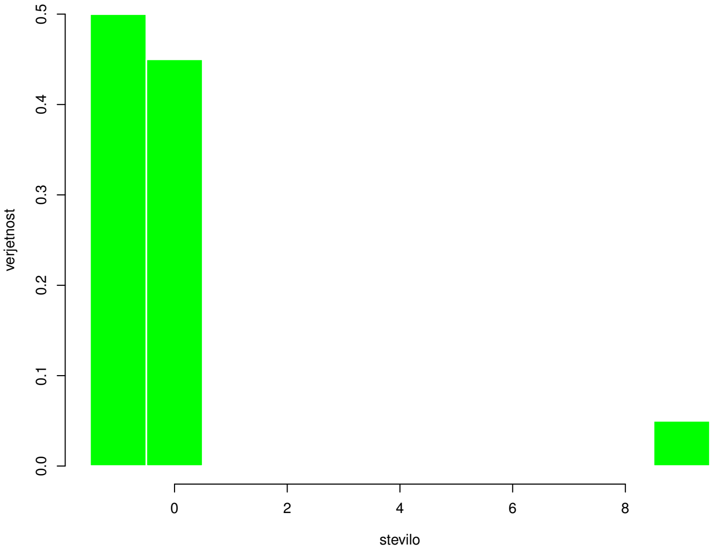
# 2 META POŠTENE KOCKE



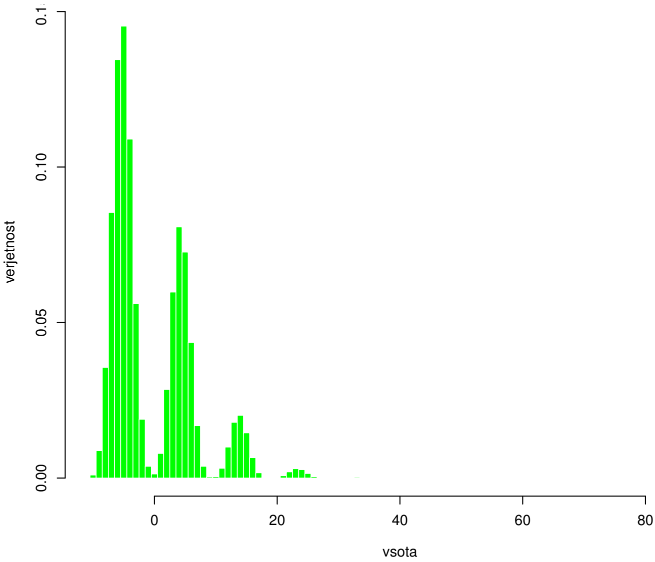
# 30 METOV POŠTENE KOCKE



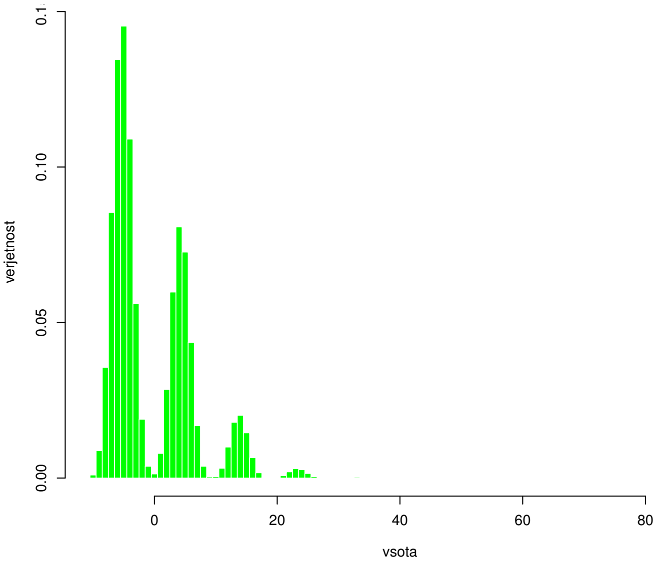
# GRDA PORAZDELITEV



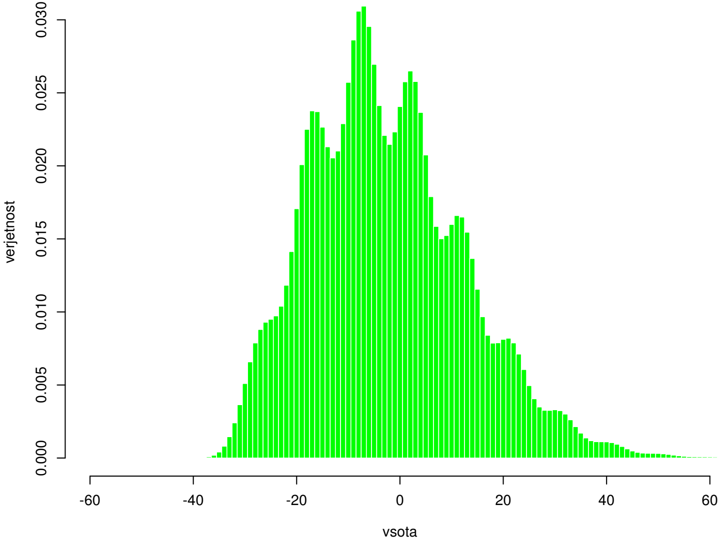
# VSOTA 10 GRDIH PORAZDELITEV



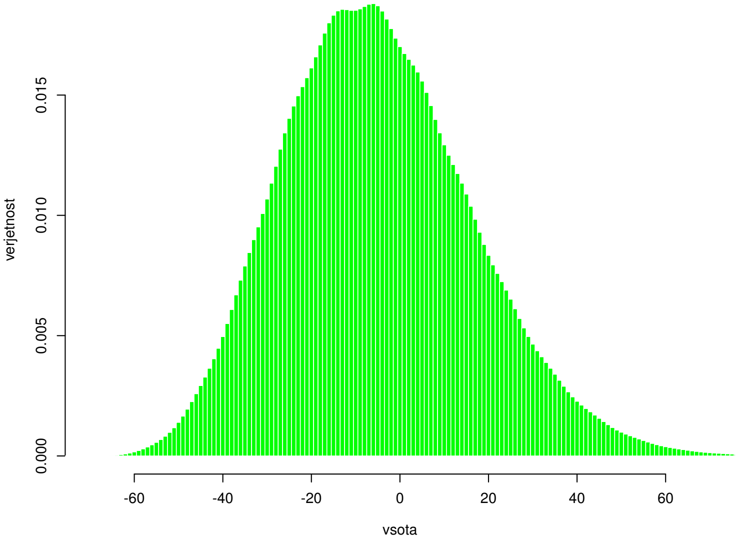
# VSOTA 10 GRDIH PORAZDELITEV



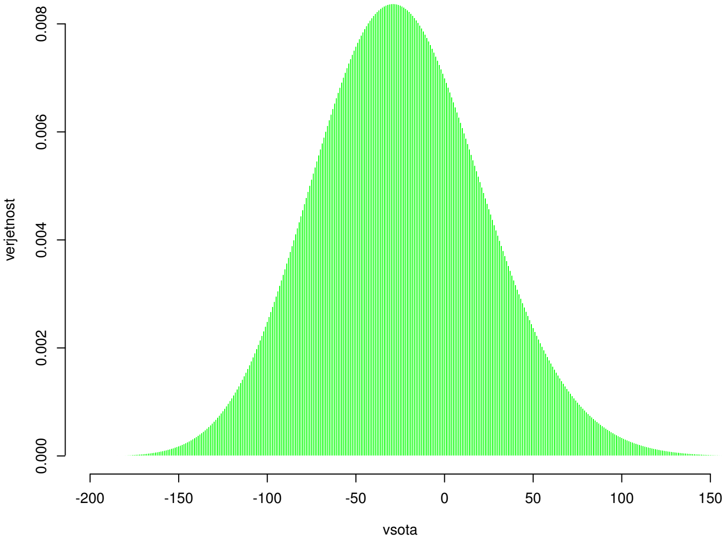
# VSOTA 50 GRDIH PORAZDELITEV



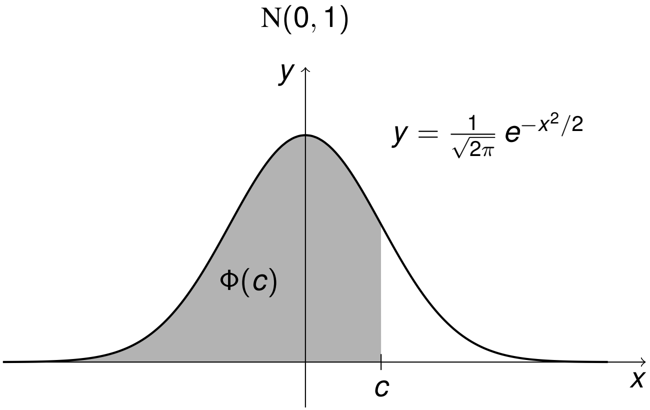
# VSOTA 100 GRDIH PORAZDELITEV



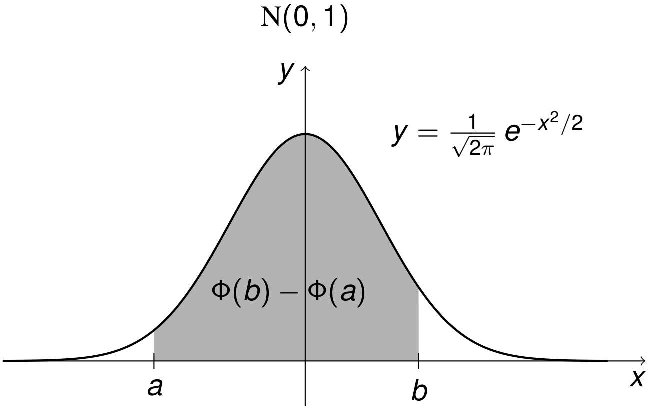
# VSOTA 500 GRDIH PORAZDELITEV



# STANDARDNA NORMALNA PORAZDELITEV

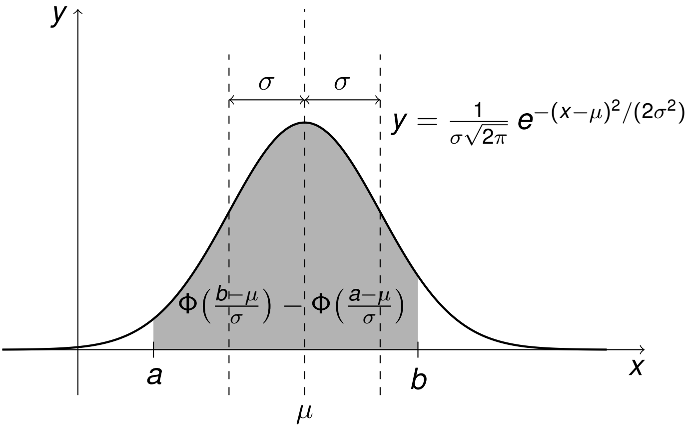


# STANDARDNA NORMALNA PORAZDELITEV



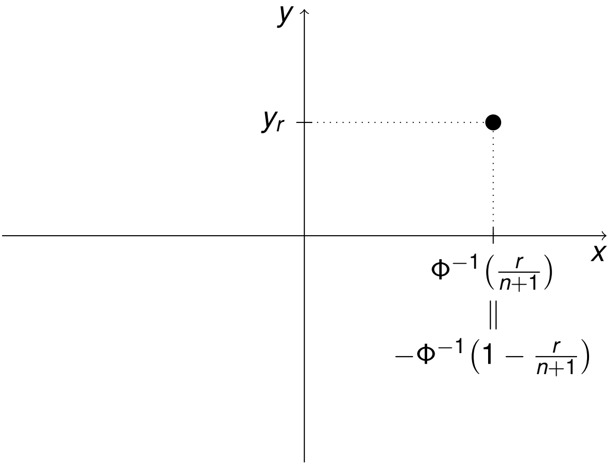
# SPLOŠNA NORMALNA PORAZDELITEV

$\mathrm{N}(\mu, \sigma)$



# PRIMERJALNI KVANTILNI (Q–Q) GRAFIKON

Podatke uredimo po velikosti: $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$.



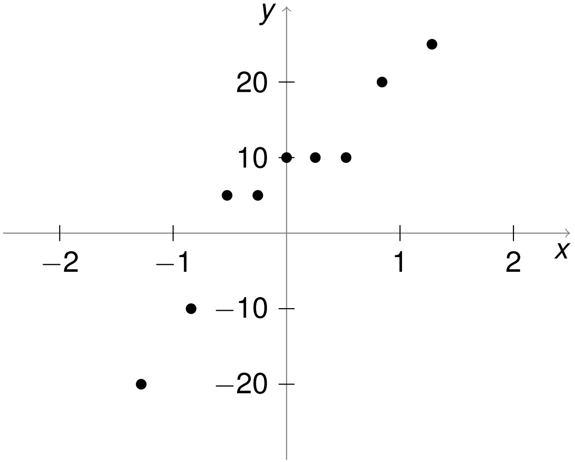
# PRIMERJALNI KVANTILNI GRAFIKON: PRIMER (1)

Podatki: $5, 20, 5, -20, 10, -10, 10, 10, 25$

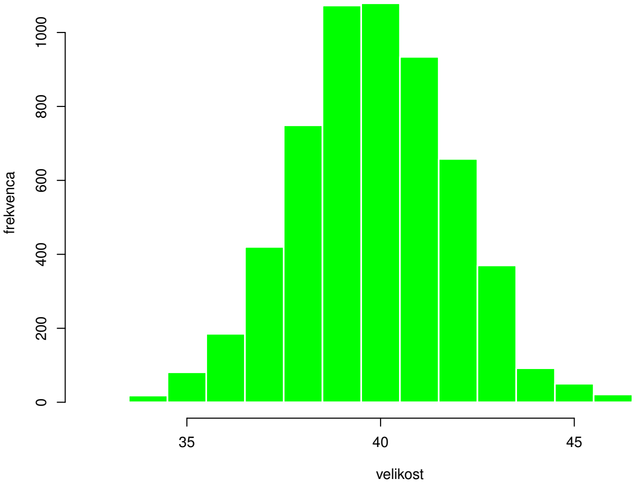
| $r$ | $\frac{r}{n+1}$ | $\Phi^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)$ | $y_r$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | $-1{,}28$ | $-20$ |
| 2 | 0,2 | $-0{,}84$ | $-10$ |
| 3 | 0,3 | $-0{,}52$ | 5 |
| 4 | 0,4 | $-0{,}25$ | 5 |
| 5 | 0,5 | 0,00 | 10 |
| 6 | 0,6 | 0,25 | 10 |
| 7 | 0,7 | 0,52 | 10 |
| 8 | 0,8 | 0,84 | 20 |
| 9 | 0,9 | 1,28 | 25 |

# PRIMERJALNI KVANTILNI GRAFIKON: PRIMER (2)

Sortirani podatki: $-20, -10, 5, 5, 10, 10, 10, 20, 25$

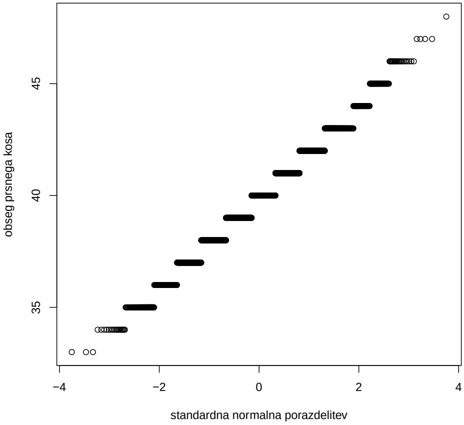


# OBSEG PRSNEGA KOŠA PRI 5738 ŠKOTSKIH VOJAKIH



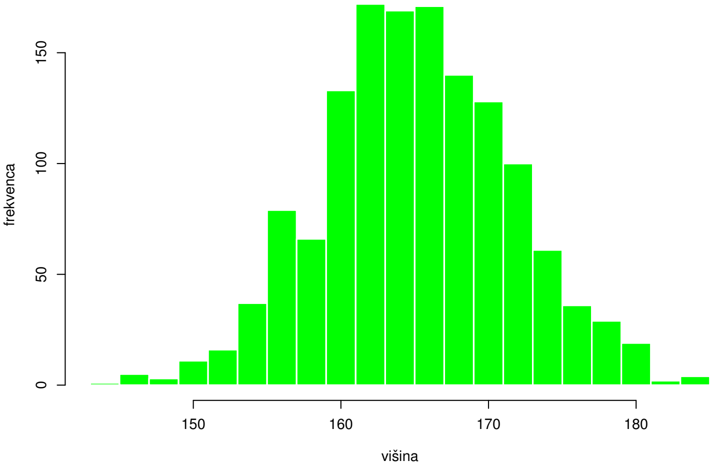

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# OBSEG PRSNEGA KOŠA PRI 5738 ŠKOTSKIH VOJAKIH



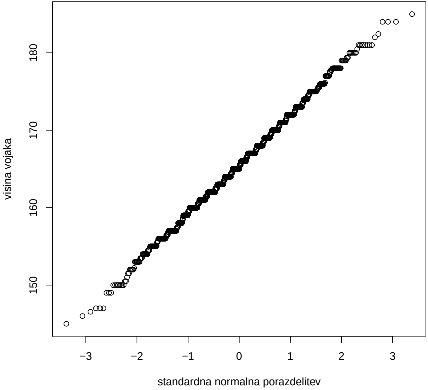

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# TELESNA VIŠINA 1382 BAVARSKIH VOJAŠKIH OBVEZNIKOV IZ 19. STOLETJA



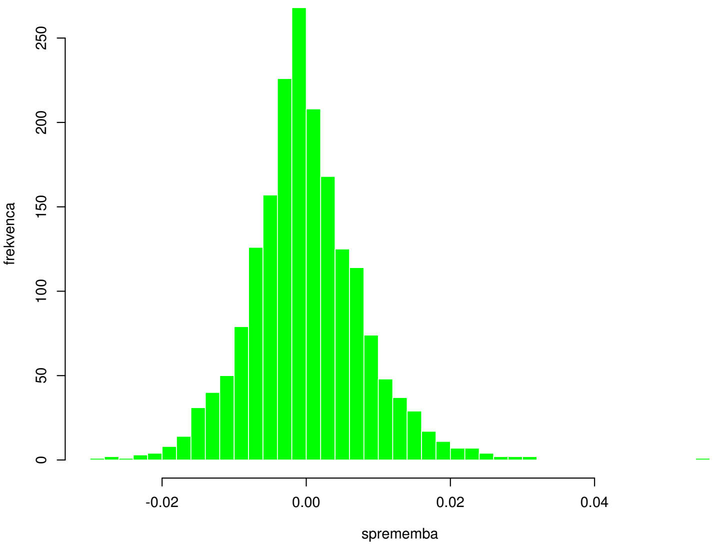

Vir podatkov (9. 8. 2015): `http://www.uni-tuebingen.de/fakultaeten/wirtschafts-und-sozialwissenschaftliche-fakultaet/faecher/wirtschaftswissenschaft/lehrstuehle/volkswirtschaftslehre/wirtschaftsgeschichte/data-hub-height.html`

# TELESNA VIŠINA 1382 BAVARSKIH VOJAŠKIH OBVEZNIKOV IZ 19. STOLETJA



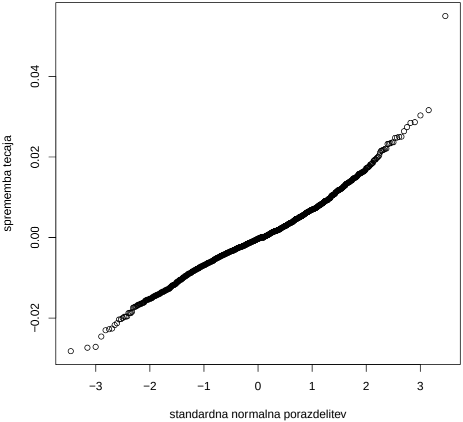

Vir podatkov (9. 8. 2015): `http://www.uni-tuebingen.de/fakultaeten/wirtschafts-und-sozialwissenschaftliche-fakultaet/faecher/wirtschaftswissenschaft/lehrstuehle/volkswirtschaftslehre/wirtschaftsgeschichte/data-hub-height.html`

# DEM : USD (1980–1987) – SPREMEMBE



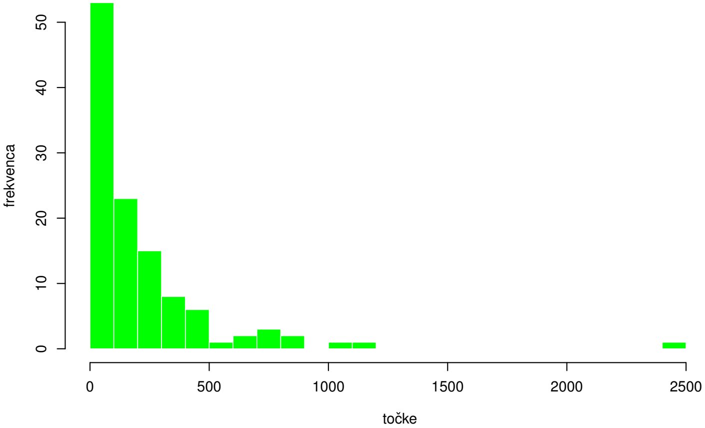

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# DEM : USD (1980–1987) – SPREMEMBE



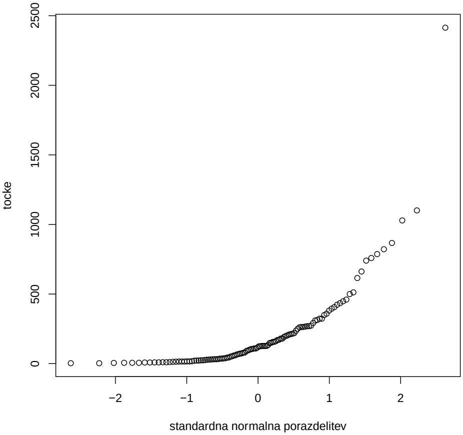

Vir podatkov (9. 8. 2015): `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`

# TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)




Vir podatkov (27. 3. 2013):
`http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html`

# TOČKE V SVETOVNEM POKALU PRI ŽENSKEM SMUČANJU (2012/13)




Vir podatkov (27. 3. 2013):
`http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpine-skiing/cupstandings.html`