O EKSPONENTNI FUNKCIJI

Martin Raič

Jesen 2013

Eksponentna funkcija z osnovo $a > 0$ je definirana kot funkcija, ki x preslika v a^x. Ta funkcija je pomemben sestavni del začetnega tečaja analize. Tipično se na tečaju kmalu za definicijo omeni, da obstaja določena naravna osnova, *Eulerjevo število*:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq 2{\dot{}}71828182845904523536\,. \tag{1}$$

Nato pa se izpelje razne limite, povezane z e, med drugim tudi:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,.$$

Dobremu slušatelju se tu neizogibno zastavi vprašanje, zakaj mora biti ravno e, tista limita v (1), naravna osnova. Zakaj bi bila ta osnova naravnejša od recimo dosti lepšega števila 2? Odgovor slušatelj izve najkasneje pri poglavju o odvodu, ko sliši, da je eksponentna funkcija enaka svojemu odvodu natanko tedaj, ko ima osnovo e. Vendar pa mu je možno to na naraven način dopovedati že pri sami definiciji eksponentne funkcije in ravno to je namen tega prispevka.

Dobro izhodišče za eksponentno funkcijo je obrestno-obrestni račun. Zamislimo si, da vložimo 1000 donarjev (namišljene valute) za eno leto v banko, ki ponuja 30-odstotne letne obresti. Dobimo:

$$1000 + 0{\dot{}}3 \cdot 1000 = 1{\dot{}}3 \cdot 1000 = 1030$$

donarjev. Zdaj pa si zamislimo, da vložimo v banko, ki ponuja 15-odstotne polletne obresti. Če po pol leta vložimo celotni znesek, z obrestmi vred, dobimo:

$$1{\dot{}}15^2 \cdot 1000 = 1322{\dot{}}50$$

donarjev. Če pa vlagamo v banko, ki vsake štiri mesece ponuja 10-odstotne letne obresti, dobimo:

$$1{\dot{}}1^2 \cdot 1000 = 1331$$

donarjev. Tako lahko nadaljujemo: če vložimo znesek a v banko, ki za obdobje n-tega dela leta ponuja obresti x/n (pri čemer je seveda $100\% = 1$), po enem letu dobimo znesek:

$$a\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Če se vrnemo na začetni znesek 1000 donarjev in $x = 0{\dot{}}3$, za $n = 1, 2, \ldots 10$ dobimo naslednje zaporedje zneskov (zaokroženih na stote dele):

$$1030{\dot{}}00,\ 1322{\dot{}}50,\ 1331{\dot{}}00,\ 1335{\dot{}}47,\ 1338{\dot{}}27,\ 1340{\dot{}}10,\ 1341{\dot{}}45,\ 1342{\dot{}}47,\ 1343{\dot{}}27,\ 1343{\dot{}}92\,.$$

Zaporedje je videti, kot da ima limito, kar bomo tudi neposredno pokazali. Poleg najosnovnejših orodij (realna števila, zaporedja, limita z osnovnimi lastnostmi) potrebujemo še *binomsko formulo* v osnovni obliki – za $a, b \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n\,.$$

Definirajmo:

$$\begin{aligned}\exp_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots \\ + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}\,.\end{aligned} \tag{2}$$

To je torej faktor, ki pripada letni obrestni meri, ki ustreza obrestni meri x/n za n-ti del leta. Če je $x \ge 0$, je ta letna obrestna mera večja ali enaka x:

$$\exp_n(x) \ge 1 + x\,. \tag{3}$$

Trditev 1. *Za vsak $x \in \mathbb{R}$ je izraz $\exp_n(x)$ naraščajoč v n, brž ko je $n \ge -x$.*

Dokaz. Za $x \ge 0$ trditev takoj sledi iz dejstva, da je vsak člen na desni strani formule (2) naraščajoča funkcija spremenljivke n. Za $x \le 0$ pa pišimo $x = -t$. Za $0 \le t \le n$ moramo torej dokazati:

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \left(1-\frac{t}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Za $t = n$ je to očitno, za $t < n$ pa ekvivalentno:

$$\left(\frac{1-\frac{t}{n+1}}{1-\frac{t}{n}}\right)^n \left(1-\frac{t}{n+1}\right) \ge 1$$

oziroma:

$$\exp_n\left(\frac{t}{(n+1)\big(1-\frac{t}{n}\big)}\right)\left(1-\frac{t}{n+1}\right) \ge 1\,.$$

Iz ocene (3) sledi:

$$\exp_n\left(\frac{t}{(n+1)\big(1-\frac{t}{n}\big)}\right) \ge 1 + \frac{t}{(n+1)\big(1-\frac{t}{n}\big)} \ge 1 + \frac{t}{(n+1)\big(1-\frac{t}{n+1}\big)} = \frac{1}{1-\frac{t}{n+1}}\,,$$

od koder sledi zahtevano. ■

To trditev lahko še malce okrepimo:

Trditev 2. *Za vsak $t \ge 0$ ter poljubna $m, n \in \mathbb{N}$, za katera je $t < m \le n$, veljajo naslednje neenakosti:*

$$0 < \exp_m(-t) \le \exp_n(-t) \le \frac{1}{\exp_m(t)} \le 1 \le \exp_m(t) \le \exp_n(t) \le \frac{1}{\exp_m(-t)}\,.$$

Dokaz. Prva, četrta in peta neenakost so očitne. Druga in šesta neenakost sledita iz trditve 1. Za tretjo in sedmo neenakost pa potrebujemo:

$$\exp_n(t)\exp_n(-t) = \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \le 1\,.$$

Sledi $\exp_n(-t) \le \dfrac{1}{\exp_n(t)} \le \dfrac{1}{\exp_m(t)}$ in $\exp_n(t) \le \dfrac{1}{\exp_n(-t)} \le \dfrac{1}{\exp_m(-t)}$. ■

Posledica 3. *Brž ko je $0 \le t < 1$ in $n \in \mathbb{N}$, velja:*

$$1 - t \le \exp_n(-t) \le \frac{1}{1+t} \le 1 \le 1 + t \le \exp_n(t) \le \frac{1}{1-t}.$$

■

Trditev 4. *Za vsak $x \in \mathbb{R}$ je zaporedje $\exp_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, konvergentno.*

Dokaz. Iz trditve 1 sledi, da je zaporedje vsaj od nekod naprej naraščajoče, iz trditve 2 pa, da je tudi navzgor omejeno. Torej je konvergentno. ■

Definicija. *Naravna eksponentna funkcija* je funkcija, dana s formulo:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \exp_n(x).$$

Oglejmo si zdaj nekaj lastnosti nove funkcije. Iz prve neenakosti v trditvi 2 sledi, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$\exp(x) > 0.$$

Osredotočimo se zdaj na obnašanje nove funkcije v okolici izhodišča. Očitno je $\exp(0) = 1$, velja pa še naslednje:

Trditev 5. *Naravna eksponentna funkcija je v izhodišču odvedljiva, njen odvod pa je enak 1 (med drugim to pomeni tudi, da je naravna eksponentna funkcija v izhodišču zvezna).*

Dokaz. Naj bo $0 < t < 1$. Z limitiranjem ocen v posledici 3 dobimo:

$$1 - t \le \exp(-t) \le \frac{1}{1+t} \le 1 \le 1 + t \le \exp(t) \le \frac{1}{1-t}.$$

Sledi:

$$1 \le \frac{\exp(t) - 1}{t} \le \frac{1}{1-t} \qquad \text{in} \qquad \frac{1}{1+t} \le \frac{\exp(-t) - 1}{-t} \le 1.$$

Iz izreka o sendviču dobimo:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\exp(t) - 1}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\exp(-t) - 1}{-t} = 1,$$

kar pomeni, da je naša funkcija v 0 odvedljiva, njen odvod pa je enak 1. ■

Naslednja trditev nam da ključno lastnost nove funkcije, ki vsaj deloma pojasni besedo 'eksponentna' v imenu, saj imajo to lastnost tudi 'intuitivne' eksponentne funkcije $x \mapsto a^x$.

Trditev 6. *Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja zveza:*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y). \tag{4}$$

Dokaz. Privzemimo najprej, da je $x + y \geq 0$. Ocenimo:

$$1 - \frac{|xy|}{n^2} \leq \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n}} = 1 + \frac{xy}{n^2\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n}\right)} \leq 1 + \frac{|xy|}{n^2} \,.$$

Sledi:

$$\exp_n\left(-\frac{|xy|}{n}\right) \leq \frac{\exp_n(x)\exp_n(y)}{\exp_n(x+y)} \leq \exp_n\left(\frac{|xy|}{n}\right)$$

in po posledici 3:

$$1 - \frac{|xy|}{n} \leq \frac{\exp_n(x)\exp_n(y)}{\exp_n(x+y)} \leq \frac{1}{1 - \frac{|xy|}{n}}$$

za vse $n > |xy|$. V limiti, ko gre n proti neskončno, dobimo želeno zvezo, zaenkrat za $x+y \geq 0$. Toda iz nje sledi tudi, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Končno še za $x + y \leq 0$ izpeljemo:

$$\exp(x+y) = \frac{1}{\exp(-x-y)} = \frac{1}{\exp(-x)\exp(-y)} = \exp(x)\exp(y) \,.$$

■

Trditev 7. *Naravna eksponentna funkcija je povsod strogo naraščajoča, odvedljiva in enaka svojemu odvodu.*

Dokaz. Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Definirajmo funkcijo $f_x(t) = \exp(x+t)$. Očitno je naravna eksponentna funkcija odvedljiva v x natanko tedaj, ko je f_x odvedljiva v 0, odvoda pa se ujemata. Toda po prejšnji trditvi je $f_x(t) = \exp(x)\exp(t)$ in zato $f_x'(0) = \exp(x)$. Torej je naravna eksponentna funkcija res povsod odvedljiva in enaka svojemu odvodu. Ker je le-ta strogo pozitiven, je tudi strogo naraščajoča. ■

Zdaj lahko dokažemo, da je naravna eksponentna funkcija dejansko ena izmed eksponentnih funkcij $x \mapsto a^x$.

Trditev 8. *Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:*

$$\big(\exp(x)\big)^y = \exp(xy) \,. \tag{5}$$

Dokaz. Iz ključne zveze (4) sledi, da želena zveza (5) velja za primer, ko je $y \in \mathbb{N}$. Za $y = 0$ je zveza (5) očitna, za $y \in -\mathbb{N}$ pa izpeljemo:

$$\big(\exp(x)\big)^y = \frac{1}{\big(\exp(x)\big)^{-y}} = \frac{1}{\exp(-xy)} = \exp(xy) \,,$$

saj je $\exp(xy)\exp(-xy) = \exp(0) = 1$. Torej (5) velja za vse $y \in \mathbb{Z}$. Nadalje za $m \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\big(\exp(x)\big)^m = \exp(mx) = \left[\exp\left(\frac{mx}{n}\right)\right]^n \,.$$

Po korenjenju dobimo:

$$\big(\exp(x)\big)^{m/n} = \exp\left(\frac{mx}{n}\right) \,,$$

kar pomeni, da zveza (5) velja za vse $y \in \mathbb{Q}$. Zaradi zveznosti tako eksponentnih funkcij $x \mapsto a^x$ kot tudi naravne eksponentne funkcije zveza (5) končno velja za vse $y \in \mathbb{R}$. ■

Iz zveze (5) takoj dobimo:

$$\exp(x) = e^x ,$$

kjer je:

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Torej je zgoraj definirana naravna eksponentna funkcija dejansko eksponentna funkcija, in sicer z osnovo e. Čisto za konec izračunajmo še, koliko v limiti dobimo, če investiramo znesek 1000 donarjev v banko, ki v n-tem delu leta obračuna obresti v višini $30\%/n$, ko gre n proti neskončno. Dobljeni znesek, zaokrožen na stote dele, je:

$$1000 \cdot \exp(0\dot{}3) = 1000 \cdot e^{0.3} \doteq 1349\dot{}86$$

donarjev.