Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

2. kolokvij

28. maj 2024

REŠITVE

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Kovanec mečemo, dokler ne dobimo ali m grbov ali m številk, kjer je $m > 1$ dano celo število. Označite z X_m število potrebnih metov. Privzemamo, da so meti med sabo neodvisni in je verjetnost za grb enaka verjetnosti za številko, torej $1/2$.

a. (10) Izračunajte $P(X_m = k)$ za vse $k = m, m+1, \ldots, 2m-1$.

Rešitev: dogodek $\{X_m = k\}$ se lahko zgodi na dva disjunktna načina: ali v k-tem metu prvič dobimo natanko m grbov ali dobimo prvič natanko m številk. Z uporabo negativne binomske porazdelitve ugotovimo, da sta verjetnosti za ta dva disjunktna načina enaki

$$\binom{k-1}{m-1}(1/2)^m(1/2)^{k-m}\,.$$

Sledi

$$P(X_m = k) = \binom{k-1}{m-1}(1/2)^{k-1}\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X_m)$.

Namig: upoštevajte, da je

$$\sum_{k=m+1}^{2m+1} P(X_{m+1} = k) = 1\,.$$

Rešitev: po definiciji je

$$E(X_m) = \sum_{k=m}^{2m-1} k\binom{k-1}{m-1}(1/2)^{k-1}\,.$$

Prepišemo

$$k\binom{k-1}{m-1} = m\binom{k}{m}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
E(X_m) &= \sum_{k=1}^{2m-1} k\binom{k-1}{m-1}(1/2)^{k-1} \\
&= m\sum_{k=m}^{2m-1}\binom{k}{m}(1/2)^{k-1} \\
&= m\sum_{l=m+1}^{2m}\binom{l-1}{(m+1)-1}(1/2)^{l-2} \\
&= 2m\sum_{l=m+1}^{2(m+1)-2}\binom{l-1}{(m+1)-1}(1/2)^{l-1}\,.
\end{aligned}$$

Vsota zelo spominja na vsoto $\sum_{k=m}^{2m-1} P(X_m = k) = 1$ za $m+1$ namesto m, le zadnji člen za $l = 2(m+1)-1$ manjka. Sledi

$$E(X_m) = 2m\left(1 - \binom{2m}{m}(1/2)^{2m}\right).$$

2. (20) V posodi je sprva a belih in b črnih kroglic. Privzemite, da je $n = a + b$ sodo število in označite $m = n/2$. Iz posode povsem naključno in brez vračanja izbiramo pare kroglic, dokler ne izberemo vseh parov. S tem smo kroglice razmestili po parih tako, da je vseh $n!/(m! \cdot 2^m)$ razmestitev enako verjetnih. Naj bo X število parov, v katerih sta obe kroglici beli, Y pa števil parov, v katerih sta obe kroglici črni.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev:

Prvi način: *definiramo*

$$I_k := \begin{cases} 1 & \textit{kroglici v } k\textit{-tem izvlečenem paru sta beli;} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = \sum_{k=1}^{m} I_k$ *in posledično* $E(X) = \sum_{k=1}^{m} E(I_k)$. *Nadalje lahko kroglici v* k*-tem izvlečenem paru zaradi simetrije obravnavamo kot povsem naključno izbran par izmed vseh kroglic. Sledi*

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}\,,$$

kar nam da

$$E(X) = m \cdot \frac{a(a-1)}{n(n-1)} = \frac{a(a-1)}{2(n-1)}\,.$$

Drugi način: *bele kroglice oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, a$ *in za* k *iz te množice definiramo*

$$I'_k := \begin{cases} 1 & k\textit{-ta bela kroglica je v paru z belo kroglico;} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Tedaj je $X = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{a} I'_k$ *in posledično* $E(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{a} E(I'_k)$. *Zaradi simetrije je*

$$E(I'_k) = P(I'_k = 1) = \frac{a-1}{n-1}\,,$$

kar nam da

$$E(X) = \frac{a(a-1)}{2(n-1)}\,,$$

to pa je isto kot prej.

Tretji način: *vse možne pare belih kroglic oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, \binom{a}{2}$ *in za* k *iz te množice definiramo*

$$I''_k := \begin{cases} 1 & k\textit{-ti par belih kroglic je bil izvlečen skupaj;} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Podobno kot pri prvem načinu je $X = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}} I''_k$ *in posledično* $E(X) = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}} E(I''_k)$. *Zaradi simetrije je*

$$E(I''_k) = P(I''_k = 1) = \frac{1}{n-1}\,,$$

kar nam da

$$E(X) = \binom{a}{2} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{a(a-1)}{2(n-1)}\,,$$

to pa je spet isto kot prej.

b. (10) Izračunajte $E(XY)$.

Rešitev:

Prvi način: *poleg indikatorjev iz prvega načina rešitve prejšnje točke definiramo še*

$$J_l = \begin{cases} 1 & \text{kroglici v } l\text{-tem izvlečenem paru sta črni;} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Pišimo

$$XY = \sum_{k=1}^{m} I_k J_k + \sum_{\substack{1 \le k, l \le m \\ k \ne l}} I_k J_l$$

in opazimo, da je $I_k J_k = 0$ *za vse* k. *Podobno kot prej z uporabo linearnosti dobimo, da je*

$$E(XY) = \sum_{\substack{1 \le k, l \le m \\ k \ne l}} E(I_k J_l)\,.$$

Vemo, da je

$$E(I_k J_l) = P(I_k = 1, J_l = 1)\,.$$

Spet lahko kroglice v k*-tem in* l*-tem izvlečenem paru zaradi simetrije gledamo kot naključno izbrano četverico kroglic. Verjetnost, da sta prvi dve beli, drugi dve pa črni, je*

$$P(I_k = 1, J_l = 1) = \frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,.$$

Vseh parov s $k \ne l$ *je* $m(m-1)$. *Sledi*

$$E(XY) = m(m-1) \cdot \frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{a(a-1)b(b-1)}{4(n-1)(n-3)}\,.$$

Drugi način: *še črne kroglice oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, b$ *in za* l *iz te množice definiramo:*

$$J'_l := \begin{cases} 1 & l\text{-ta črna kroglica je v paru s črno kroglico;} \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

velja

$$XY = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b} I'_k J'_k\,, \qquad \textit{torej} \qquad E(XY) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b} E(I'_k J'_k)$$

in zaradi simetrije

$$E(I'_k J'_l) = P(I'_k = 1, J'_l = 1) = \frac{(a-1)(b-1)}{(n-1)(n-3)}\,.$$

Sledi

$$E(XY) = \frac{ab(a-1)(b-1)}{4(n-1)(n-3)}\,,$$

kar je isto kot prej.

Tretji način: *še vse možne pare črnih kroglic oštevilčimo z* $1, 2, \ldots, \binom{b}{2}$ *in za* l *iz te množice definiramo:*

$$J''_l := \begin{cases} 1 & \textit{l-ti par črnih kroglic je bil izvlečen skupaj;} \\ 0 & \textit{sicer,} \end{cases}$$

velja

$$XY = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}}\sum_{l=1}^{\binom{b}{2}} I''_k J''_k\,, \qquad \textit{torej} \qquad E(XY) = \sum_{k=1}^{\binom{a}{2}}\sum_{l=1}^{\binom{b}{2}} E(I''_k J''_k)$$

in zaradi simetrije

$$E(I''_k J''_l) = P(I''_k = 1, J''_l = 1) = \frac{1}{(n-1)(n-3)}\,.$$

Sledi

$$E(XY) = \binom{a}{2}\binom{b}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(n-3)} = \frac{a(a-1)b(b-1)}{4(n-1)(n-3)}\,,$$

kar je spet isto kot prej.

3. (20) Slučajni spremenljivki Y in W naj bosta neodvisni z $Y \sim \exp(1)$ in $W \sim \mathrm{N}(0,1)$. Naj bo

$$X = \theta Y + \sigma\sqrt{Y}W\,,$$

kjer sta $\theta > 0$ in $\sigma > 0$ dani konstanti.

a. (10) Poiščite gostoto para (Y, X).

Rešitev: zamislimo si preslikavo

$$\Phi(y,w) = (y, \theta y + \sigma\sqrt{y}w)\ .$$

Na odprti množici $U = \{(y,w)\colon y > 0\}$ je preslikava bijektivna in preslika U nase. Računamo

$$\Phi^{-1}(y,x) = \left(y, \frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)\ .$$

Predpostavke o zvezni odvedljivosti so izpolnjene in izračunamo

$$J_{\Phi^{-1}}(y,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\,.$$

Sledi

$$f_{Y,X}(y,x) = f_{Y,W}\left(y, \frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right) \cdot J_{\Phi^{-1}}(y,x)\,.$$

Zaradi neodvisnosti je $f_{Y,W}(y,w) = f_Y(y) f_W(w)$. Sledi, da za $(y,x) \in U$ velja

$$f_{Y,X}(y,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-y - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\,,$$

sicer pa je $f_{Y,X}(y,x) = 0$.

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay-\frac{b}{y}}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Rešitev: gostoto X izračunamo kot robno gostoto. Računamo

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f_{Y,X}(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-y - \frac{x^2}{2\sigma^2 y} + \frac{\theta x}{\sigma^2} - \frac{\theta^2 y}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\theta x/\sigma^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 y} - \frac{(\theta^2+2\sigma^2)y}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\theta x/\sigma^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\theta^2+2\sigma^2}{2\sigma^2}}} \exp\left(-2\sqrt{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \sqrt{\frac{\theta^2+2\sigma^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^2+2\sigma^2}}\, e^{-(|x|\sqrt{\theta^2+2\sigma^2}-\theta x)/\sigma^2}\,.
\end{aligned}$$

4. (20) V kupu $a + b$ kart je a belih in b rdečih. Karte premešamo, tako da je vsaka permutacija enako verjetna, nakar jih z vrha polagamo na mizo. Naj bo X število belih kart pred prvo rdečo, Y pa število belih kart za zadnjo rdečo. Bele karte oštevilčimo s $k = 1, 2, \ldots a$ in definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta bela karta pred prvo rdečo;} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

in

$$J_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta bela karta za zadnjo rdečo;} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

a. (10) Utemeljite, da je $X = \sum_{k=1}^{a} I_k$. Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: če gledamo samo prvo belo karto in rdeče karte, so te naključno permutirane. Verjetnost, da je prva bela karta pred vsemi rdečimi, je tako

$$P(I_1 = 1) = \frac{1}{b+1}$$

in

$$\mathrm{var}(I_1) = \frac{b}{(b+1)^2}\,.$$

Potrebujemo še

$$P(I_1 = 1, I_2 = 1) = \frac{2}{(b+1)(b+2)}\,,$$

kar dobimo z razmislekom, da gledamo samo permutacije dveh belih kart in b rdečih. Sledi

$$\mathrm{cov}(I_1, I_2) = \frac{b}{(b+1)^2(b+2)}\,.$$

Zaradi simetrije so variance I_k enake in kovariance parov (I_k, I_l) enake. Sledi

$$\mathrm{var}(X) = \frac{ab}{(b+1)^2} + \frac{a(a-1)b}{(b+1)^2(b+2)}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Rešitev: zaradi simetrije velja

$$E(J_1) = \frac{1}{b+1}\,.$$

Nadalje je

$$P(I_1 = 1, J_1 = 1) = 0 \quad \textit{in} \quad P(I_1 = 1, J_2 = 1) = \frac{1}{(b+1)(b+2)}\,.$$

Upoštevamo bilinearnost kovariance in simetrijo. Tako velja

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{k,l=1}^{a} \mathrm{cov}(I_k, J_l)\,.$$

Zaradi simetrije so za $k \neq l$ vse kovariance enake, prav tako so enake vse kovariance, ko je $k = l$. Sledi

$$\mathrm{cov}(X, Y) = a\,\mathrm{cov}(I_1, J_1) + a(a-1)\,\mathrm{cov}(I_1, J_2)\,.$$

Ker je $I_1 J_1 = 0$, je

$$\mathrm{cov}(I_1, J_1) = -\frac{1}{(1+b)^2}\,.$$

Nadalje je

$$\mathrm{cov}(I_1, J_2) = \frac{1}{(b+1)(b+2)} - \frac{1}{(b+1)^2} = -\frac{1}{(b+1)^2(b+2)}\,.$$

Dobimo

$$\mathrm{cov}(X, Y) = -\frac{a}{(b+1)^2} - \frac{a(a-1)}{(b+1)^2(b+2)} = -\frac{a(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}\,.$$

5. (20) Naravna števila sklenejo, da bodo šla v kitajsko restavracijo, kjer je neskončno okroglih miz, ki so oštevilčene z $1, 2, \ldots$. Za vsako mizo lahko sedi neskončno gostov. Naravna števila prihajajo v restavracijo po vrsti in se posedejo po naslednjih pravilih: 1 se usede za mizo 1. Ko pride n, se usede za prosto mizo z najnižjo možno številko z verjetnostjo $1/n$ ali pa se usede levo od i z verjetnostjo $1/n$, neodvisno od predhodnih števil, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Naj bo $X_{n,i}$ število gostov za i-to mizo takoj po prihodu števila n v restavracijo.

a. (10) Podajte pogojno porazdelitev $X_{n,1}|X_{n-1,1} = l$ za $l = 1, 2, \ldots, n-1$.

Rešitev: iz besedila naloge sledi, da je

$$P\left(X_{n,1} = l+1 | X_{n-1,1} = l\right) = \frac{l}{n} \quad \textit{in} \quad P\left(X_{n,1} = l | X_{n-1,1} = l\right) = \frac{n-l}{n}$$

za $l = 1, 2, \ldots, n-1$.

b. (10) Izračunajte $E\left(X_{n,1}\right)$.

Rešitev: Iz a. dela sledi, da je

$$E\left(X_{n,1} | X_{n-1,1} = l\right) = l \cdot \frac{n-l}{n} + (l+1) \cdot \frac{l}{n} = \frac{l(n+1)}{n}\,.$$

Vemo, da je $E(X_{1,1}) = 1$. *Po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$E\left(X_{n,1}\right) = \frac{(n+1)}{n} \cdot E(X_{n-1,1})$$

in posledično

$$E(X_{n,1}) = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots 3}{n(n-1)\cdots 2} \cdot E(X_{1,1}) = \frac{n+1}{2}\,.$$

6. (20) V igralnici Perla v Novi Gorici je gost Gregoroni na ruleti priigral 144.000€. Iz podatkov je bilo razvidno, da je vztrajno igral na isti način. Vedno je stavil skupno 500€. Od tega je stavil vedno 200€ na "polno" na številko 17, 300€ pa na "konja" iz številk 16 in 17. Pri igri na "polno" vam pri dobljeni igri, torej če se kroglica ustavi na 17, vrnejo stavo in izplačajo 35-krat toliko, sicer pa stavo izgubite. Pri konju vam pri dobljeni igri, torej če pride 16 ali 17, vrnejo stavo in izplačajo 17-krat toliko, sicer stavo izgubite.

Na ruleti je 37 številk, ki se pojavijo z enako verjetnostjo, posamezne igre pa so med sabo neodvisne.

a. (10) Označite z X čisti dobitek gosta v eni igri z zgoraj opisanimi stavami. Ugotovite, kakšne vrednosti lahko ima X s kakšnimi verjetnostmi in izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: možne vrednosti za X so -500, če ne prideta številki 16 ali 17, 4.900, *če pride 16 in* 12.100, *če pride 17. Pripadajoče verjetnosti so* 35/37, 1/37 *in* 1/37. *Računamo*

$$E(X) = -\frac{35 \cdot 500}{37} + \frac{4.900}{37} + \frac{12.100}{37} = -\frac{500}{37} \doteq -13,51\,.$$

Računamo

$$E(X^2) = \frac{35 \cdot 500^2}{37} + \frac{4.900^2}{37} + \frac{12.100^2}{37} = \frac{179.170.000}{37}\,.$$

Sledi

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6.629.040.000}{1.369} \doteq (2.200,51)^2\,.$$

b. (10) Gost Gregoroni je svoj dobitek priigral v 582 igrah. Izračunajte približno verjetnost dobitka enakega ali večjega kot ga je s svojo igro priigral gost Gregoroni, za število iger enako $n = 582$.

Rešitev: uporabimo centralni limitni izrek. Iz prvega dela naloge razberemo, da je $\mu = -13,51$ in $\sigma = 2.200,51$. V formuli bo $n = 582$. Računamo

$$\begin{aligned} P\left(S_{582} \geq 144.000\right) &= P\left(\frac{S_{582} - 582\mu}{\sqrt{582}\sigma} \geq \frac{144.000 - 582\mu}{\sqrt{582}\sigma}\right) \\ &\approx P\left(Z \geq 2,86\right) \\ &= 0,002\,. \end{aligned}$$