Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

1. kolokvij

16. april 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena je uporaba A4 format lista s formulami. Veliko uspeha!

| Naloga | a. | b. | c. | d. | Skupaj |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | • | • | |
| Skupaj | | | | | |

**1.** (20) Standardni kup 52 kart dobro premešamo in jih delimo z vrha. Kockarji morajo po 25 razdeljenih kartah napovedati barvo 26 karte. Kockar Lojze napove tisto barvo, ki je med prvimi 25 kartami manj zastopana. Označite

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{26}{k}\binom{26}{25-k}}{\binom{52}{25}} \quad \text{in} \quad T_m = \sum_{k=0}^{m} k \cdot \frac{\binom{26}{k}\binom{26}{25-k}}{\binom{52}{25}}$$

za $m = 0, 1, \ldots, 25$.

a. (5) Naj bo $B_k$ dogodek, da je med prvimi 25 kartami $k$ rdečih kart za $k = 0, 1, \ldots, 25$. Izračunajte $P(B_k)$.

*Rešitev: prvih* 25 *razdeljenih kart je slučajni vzorec izmed vseh kart. Za*

$$X = \textit{število rdečih kart med prvimi 25 kartami}$$

*velja* $X \sim \textit{HiperGeom}(25, 26, 52)$, *zato je*

$$P(B_k) = \frac{\binom{26}{k}\binom{26}{25-k}}{\binom{52}{25}}\,.$$

b. (5) Naj bo $A$ dogodek, da Lojze napove pravo barvo. Izračunajte pogojno verjetnost $P(A|B_k)$.

*Rešitev: zaradi simetrije je 26-ta karta z enako (pogojno) verjetnostjo katerakoli izmed preostalih 27 kart. Sledi, da je*

$$P(A|B_k) = \begin{cases} \frac{26-k}{27} & \textit{za } k = 0, 1, \ldots, 12 \\ \frac{26-(25-k)}{27} & \textit{za } k = 13, 14, \ldots, 25. \end{cases}$$

c. (10) Izrazite verjetnost, da bo Lojze napovedal pravo barvo, z $S_m$ in $T_m$ za ustrezno izbrane $m$.

*Rešitev: dogodki* $B_0, B_1, \ldots, B_{25}$ *so particija. Po formuli za popolno verjetnost je*

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{25} P\left(A \mid B_k\right) P(B_k) \\ &= \sum_{k=0}^{12} \frac{26-k}{27} \cdot \frac{\binom{26}{k}\binom{26}{25-k}}{\binom{52}{25}} + \sum_{k=13}^{25} \frac{1+k}{27} \cdot \frac{\binom{26}{k}\binom{26}{25-k}}{\binom{52}{25}} \\ &= \frac{26}{27} \cdot S_{12} - \frac{1}{27} T_{12} + \frac{1}{27}\left(S_{25} - S_{12}\right) + \frac{1}{27}\left(T_{25} - T_{12}\right) \\ &= \frac{25}{27} S_{12} + \frac{1}{27} S_{25} - \frac{2}{27} T_{12} + \frac{1}{27} T_{25}\,. \end{aligned}$$

*Z Mathematico dobimo* $P(A) \doteq 0,5545$.

**2.** (20) Pošten kovanec mečemo $n$-krat z $n \geq 3$. Naj bo $A$ dogodek, da se v teh $n$ metih pojavi vzorec GŠŠ. Meti so med sabo neodvisni.

a. (10) Definirajte dogodke

$$A_i = \{\text{meti } i,\ i+1,\ i+2 \text{ so enaki GŠŠ}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Kolikšne so možne verjetnosti

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right)$$

za $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ in $r \leq n-2$?

*Rešitev: če imata množici $\{i, i+1, i+2\}$ in $\{j, j+1, j+2\}$ za $i \neq j$ neprazen presek, je $P(A_i \cap A_j) = 0$. Verjetnost preseka bo pozitivna, če bodo množice $\{i_k, i_k+1, i_k+2\}$ disjunktne za $k = 1, 2, \ldots, r$. To pomeni, da je $3r \leq n$. Zaradi neodvisnosti je*

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3r}.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost dogodka $A$. Vsot vam ni treba poenostavljati.

*Namig: da preštejete izbire množic $\{i, i+1, i+2\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, ki se ne prekrivajo, združite vsako od izbranih množic v en sam element.*

*Rešitev: velja, da je $A = \cup_{i=1}^{n-2} A_i$. Za $3r \leq n$ moramo prešteti, na koliko načinov lahko izberemo $r$ disjunktnih podmnožic treh zaporednih števil. Mislimo si lahko, da izberemo $r$ števil izmed $n-2r$ števil in vsakemu izbranemu številu dodamo še dve. Torej je izbir $\binom{n-2r}{r}$. Po formuli za vključitve in izključitve dobimo*

$$P(A) = \sum_{r;\, 3r \leq n} (-1)^{r-1} \binom{n-2r}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{3r}.$$

**3.** (20) Pošten kovanec mečemo toliko časa, da dobimo grb, ki mu sledi številka. Privzamemo, da so meti med sabo neodvisni. Naj bo $X$ število metov, vključno z zadnjo številko.

a. (5) Naj bo $A_{jk}$ dogodek, da v prvih $j$ metih pade številka, v naslednjih $k-j-1$ metih grb in v $k$-tem metu številka za $j = 0, 1, \ldots, k-2$. Izrazite $\{X = n\}$ z dogodki $A_{jk}$.

   *Rešitev: velja* $\{X = k\} = \cup_{j=0}^{k-2} A_{jk}$.

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke $X$.

   *Rešitev: slučajna spremenljivka* $X$ *lahko zavzame vrednosti* $2, 3, 4, \ldots$ *Dogodek, da je* $X = k$*, je po prvem delu unija dogodkov* $A_{jk}$*. Dogodki* $A_{jk}$ *so paroma disjunktni in vsak ima verjetnost* $2^{-k}$*. Sledi:*

$$P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}\,.$$

c. (5) Za vse pare $(j, k)$, kjer sta $j$ in $k$ naravni števili in $j < k$, izračunajte pogojno verjetnost dogodka, da v $j$-tem metu pade grb, glede na dogodek $\{X = k\}$.

   *Rešitev: gre za pogojno verjetnost*

$$P\big(A_{0k} \cup A_{1k} \cup \cdots \cup A_{j-1,k} \;\big|\; X = k\big) = \frac{P(A_{0k} \cup A_{1k} \cup \cdots \cup A_{j-1,k})}{P(X = k)} = \frac{j}{k-1}\,.$$

**4.** (20) Naj bo $U \sim U(0,1)$. Naj bo $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(u) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

in definirajte

$$X = f(U)\,.$$

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke $X$.

*Rešitev: funkcija $f$ je na $(0,1)$ strogo naraščajoča in interval $(0,1)$ preslika na $(0,\infty)$. Potrebujemo inverzno funkcijo funkcije $f$, kar pomeni, da moramo najti rešitev enačbe*

$$x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\,.$$

*Na obeh straneh uporabimo eksponentno funkcijo in dobimo*

$$e^{2x} = \frac{1+u}{1-u}$$

*ali*

$$e^{2x} - 1 = u(e^{2x}+1)\,.$$

*Sledi, da je*

$$u = f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \tanh(x)\,.$$

*Za $x > 0$ dobimo*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\left(X \le x\right) \\ &= P\left(f(U) \le x\right) \\ &= P\big(U \le f^{-1}(x)\big) \\ &= \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \end{aligned}$$

*Odvajamo in sledi, da je za $x > 0$*

$$f_X(x) = \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}\,,$$

*za $x \le 0$ pa je gostota enaka $0$.*

b. (10) Za dan $p \in (0,1)$ najdite tak $x_p$, da bo $P\left(X \le x_p\right) = p$.

*Rešitev: računamo*

$$\begin{aligned} P\left(X \le x\right) &= P\left(f(U) \le x\right) \\ &= P\big(U \le f^{-1}(x)\big) \\ &= f^{-1}(x)\,. \end{aligned}$$

*Najti moramo torej tak $x$, da bo $f^{-1}(x) = p$, ali*

$$x = f(p) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\,.$$

**5.** (20) Iz posode, v kateri je sprva $a$ belih in $b \geq 2$ črnih kroglic, na slepo vlečemo kroglice. Vsakič, ko izvlečemo kroglico, jo ne glede na njeno barvo zamenjamo z belo kroglico. Vlečenja so med seboj neodvisna. Naj bo $X$ število izvlečenih kroglic do vključno prve črne, $Y$ pa naj bo število kroglic med prvo in drugo izvlečeno črno, vključno z drugo, ne pa tudi s prvo črno kroglico.

a. (10) Poiščite skupno porazdelitev slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$.

*Rešitev: možne vrednosti slučajnega vektorja $(X, Y)$ so vsi celoštevilski pari $(k, l)$ s $k, l \geq 1$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če najprej izvlečemo $k-1$ belih kroglic, nato črno kroglico, nato $l-1$ belih kroglic in nazadnje črno kroglico. Torej velja*

$$P(X = k, Y = l) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k-1} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \left(\frac{a+1}{a+b}\right)^{l-1} \cdot \frac{b-1}{a+b},$$

*kar se poenostavi v*

$$P(X = k, Y = l) = \frac{a^{k-1}(a+1)^{l-1}b(b-1)}{(a+b)^{k+l}}.$$

*Z drugimi besedami, $X$ in $Y$ sta neodvisni z $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{b}{a+b}\right)$ in $Y \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{b-1}{a+b}\right)$.*

b. (10) Izračunajte verjetnost $P(X \geq Y)$.

*Rešitev: z uporabo neodvisnosti računamo*

$$\begin{aligned}
P(X \geq Y) &= \sum_{k \geq l \geq 1} P(X = k, Y = l) \\
&= \sum_{k \geq l \geq 1} P(X = k) P(Y = l) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} P(Y = l) \sum_{k=l}^{\infty} P(X = k) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} P(Y = l) \left(\frac{a}{a+b}\right)^{l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{b-1}{a+b}\right) \left(\frac{a+1}{a+b}\right)^{l-1} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{l-1} \\
&= \frac{(b-1)(a+b)}{(a+b)^2 - a(a+1)} \\
&= \frac{(b-1)(a+b)}{b^2 + 2ab - a}.
\end{aligned}$$

**6.** (20) Predpostavite, da imate 52 kart oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, 13$. Vsako od števil se na kartah pojavi natanko štirikrat. Igralcu bomo razdelili pet naključno izbranih kart, tako da so vse izbire enako verjetne.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo igralec dobil karte, na katerih bo pet zaporednih števil kot na primer $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Vrstni red, v katerem bo igralec dobil karte, ni pomemben.

*Rešitev: za vsak* $i = 1, 2, \ldots, 9$ *označimo*

$$A_i = \{\textit{igralec bo dobil števila } i, i+1, i+2, i+3, i+4\}\,.$$

*Iščemo verjetnost unije* $A = \cup_{i=1}^{9} A_i$*. Dogodki v uniji so disjunktni, zato je dovolj poiskati verjetnosti posameznih* $A_i$*. Prešteti moramo vse podmnožice po pet kart, ki imajo po enega predstavnika števil* $i, i+1, i+2, i+3, i+4$*. Ker imamo v vsaki kategoriji 4 izbire, je takih peteric* $4^5$*. Iskana verjetnost je*

$$P\left(A_i\right) = \frac{4^5}{\binom{52}{5}}$$

*in posledično*

$$P(A) = \frac{9 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{192}{54145} \doteq 0{,}003546034\,.$$

b. (10) Privzemite, da kartam dodamo *joker* karto, ki lahko nadomesti katerokoli število, tako da je kart 53. Primer: če joker karto označimo z J, zaporedje $\{3, \mathrm{J}, 5, 6, 7\}$ pomeni pet zaporednih števil, ker J nadomesti število 4. Kolikšna je verjetnost, da bo igralec dobil pet zaporednih števil v tem primeru?

*Rešitev: pet zaporednih kart lahko dobimo na naslednje disjunktne načine:*

- *pet zaporednih kart:* $9 \cdot 4^5$ *izidov*
- *štiri zaporedne karte plus joker:* $10 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+2, i+3, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+1, i+3, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+1, i+2, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*

*Skupaj je to* $73 \cdot 4^4$ *izidov, vseh izidov pa je* $\binom{53}{5}$*. Iskana verjetnost je torej*

$$\frac{73 \cdot 4^4}{\binom{53}{5}} = \frac{18688}{2869685} \doteq 0{,}006512213\,.$$