Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

1. kolokvij

23. april 2026

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V posodi so sprva tri kroglice, dve beli in ena rdeča. Na vsakem koraku naključno izberemo kroglico iz posode, jo vrnemo in dodamo kroglico iste barve.

a. (10) Izračunajte verjetnosti, da v prvih treh korakih natanko k-krat izberemo rdečo kroglico za $k = 0, 1, 2, 3$.

Rešitev: označimo $H_k = \{v \text{ treh korakih izberemo rdečo kroglico } k\text{-krat}\}$ *za* $k = 0, 1, 2, 3$. *Računamo po vrsti:*

- $P(H_0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.
- *Dogodek* H_1 *se zgodi, če na enem od možnih treh korakov izberemo rdečo kroglico. Vse te tri disjunktne možnosti imajo enako verjetnost. Sledi*

$$P(H_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}\,.$$

- *Možnosti za korake, ko izberemo rdeči kroglici, so tri. Dogodek* H_2 *se zgodi na tri disjunktne načine z enako verjetnostjo. Sledi*

$$P(H_2) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}\,.$$

- *Nazadnje je*

$$P(H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}\,.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost dogodka, da bo četrta izbrana kroglica rdeča.

Rešitev: označimo dogodek, da bo četrta izbrana kroglica rdeča z A. *Z oznakami iz prvega dela naloge je*

$$P(A|H_k) = \frac{k+1}{6}$$

za $k = 0, 1, 2, 3$. *Po formuli za popolno verjetnost je*

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{3} P(A|H_k)P(H_k) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

2. (20) Dan je dobro premešan kup standardnih 52 kart. Štirje možni simboli – pik, križ, srce in karo – so enako zastopani. Štirje igralci dobijo vsak po štiri karte z vrha premešanega kupa.

a. (10) Naj bo B_k dogodek, da ima igralec k vse simbole za $k = 1, 2, 3, 4$. Izračunajte

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_i)$$

za $i = 1, 2, 3, 4$.

Namig: lahko si predstavljate, da igralcem po vrsti delimo karte z vrha kupa. Za $i = 1, 2, 3, 4$ *preštejte, koliko naborov kart je takih, da imajo igralci* $1, 2, \ldots, i$ *vse simbole.*

Rešitev: naborov štirih kart, ki vsebujejo vse simbole, je 13^4*. Prvemu igralcu lahko razdelimo štiri karte na* $\binom{52}{4}$ *načinov. Sledi*

$$P(B_1) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}\,.$$

Za presek $B_1 \cap B_2$ *računamo, da lahko igralcema razdelimo karte na* $\binom{52}{4}\binom{48}{4}$ *načinov, naborov kart, kjer imata oba igralca vse simbole pa je* $13^4 \cdot 12^4$*. Sledi*

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{13^4 \cdot 12^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}}\,.$$

S podobnim razmislekom sledi

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{13^4 \cdot 12^4 \cdot 11^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}\binom{44}{4}}\,.$$

in

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = \frac{13^4 \cdot 12^4 \cdot 11^4 \cdot 10^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}\binom{44}{4}\binom{40}{4}}\,.$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da so vsi igralci brez vsaj enega simbola? Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: označimo z A *dogodek, da je vsak izmed igralcev brez vsaj ene barve. Nadalje za vsak* $k = 1, 2, 3, 4$ *označimo z* B_k *dogodek, da ima* k*-ti igralec vse štiri barve. Tedaj velja:*

$$A = B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c \cap B_4^c = (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)^c\,.$$

Za izračun verjetnosti uporabimo načelo vključitev in izključitev ter simetrijo:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \\
&= 1 - P(B_1) - P(B_2) - P(B_3) - P(B_4) \\
&\qquad + P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_4) \\
&\qquad + P(B_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_4) + P(B_3 \cap B_4) \\
&\qquad - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) - P(B_1 \cap B_2 \cap B_4) \\
&\qquad - P(B_1 \cap B_3 \cap B_4) + P(B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&\qquad + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&= 1 - 4 \cdot \frac{13^4}{\binom{52}{4}} + 6 \cdot \frac{13^4 \cdot 12^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}} - 4 \cdot \frac{13^4 \cdot 12^4 \cdot 11^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}\binom{44}{4}} + \frac{13^4 \cdot 12^4 \cdot 11^4 \cdot 10^4}{\binom{52}{4}\binom{48}{4}\binom{44}{4}\binom{40}{4}} \\
&\doteq 0{,}6407\,.
\end{aligned}
$$

3. (20) V posodi je B belih in R redečih kroglic. Iz posode izbiramo kroglice po vrsti povsem naključno, dokler ne izberemo vseh B belih kroglic. Označite z X število vseh izbiranj vključno z zadnjim izbiranjem.

a. (10) Izračunajte verjetnost $P(X \leq k)$ za vse $k = B, B+1, \ldots, B+R$.

Rešitev: možne vrednosti za slučajno spremenljivko X so $k = B, B+1, \ldots, N$, kjer je $N = B+R$. Dogodek $\{X \leq k\}$ se zgodi, če je med k izbranimi kroglicami B belih. Ker je izbiranje povsem naključno, je izbranih k kroglic naključna izbira k kroglic, torej z uporabo hipergeometrijske porazdelitve dobimo

$$P(X \leq k) = \frac{\binom{B}{B}\binom{R}{k-B}}{\binom{N}{k}} = \frac{\binom{R}{k-B}}{\binom{N}{k}}\,.$$

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: za $k = B+1, \ldots, N$ velja

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)\,,$$

torej

$$P(X = k) = \frac{\binom{R}{k-B}}{\binom{N}{k}} - \frac{\binom{R}{k-B-1}}{\binom{N}{k-1}}$$

za $k = B$ pa

$$P(X = B) = P(X \leq B) = \frac{1}{\binom{N}{B}}\,.$$

4. (20) Naj bo $U \sim U(0,1)$ in $V \sim \mathrm{Beta}(1/2, 1/2)$.

a. (10) Definirajte

$$X = 2\min(U, 1-U)\,.$$

Navedite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Vrednosti slučajne spremenljivke X bodo na intervalu $(0,1)$. Za x iz tega intervala izračunamo

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\big(2\min(U,1-U) \leq x\big) \\ &= P\big(\{U \leq x/2\} \cup \{U \geq 1 - x/2\}\big) \\ &= P\left(U \leq x/2\right) + P\left(U \geq 1 - x/2\right) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \\ &= x\,. \end{aligned}$$

Sledi $X \sim U(0,1)$.

b. (10) Definirajte

$$Y = \frac{1-V}{V}\,.$$

Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: Za $y > 0$ dobimo

$$\begin{aligned} P\left(Y \leq y\right) &= P\left(\frac{1-V}{V} \leq y\right) \\ &= P\left(1 - V \leq yV\right) \\ &= P\left(V \geq \frac{1}{1+y}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{1+y}}^{1} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}}\,. \end{aligned}$$

Odvajamo po y in sledi

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}\,.$$

Za $y \leq 0$ lahko postavimo $f_Y(y) = 0$.

5. (20) V posodi je b belih in 3 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

a. (10) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: možne vrednosti za slučajni spremenljivki so pari (k, l), za katere velja $k \geq 0$, $l \geq 0$ in $k + l \leq b$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če izberemo najprej k belih kroglic, potem rdečo, potem l belih in spet rdečo kroglico. Označimo $b + 3 = n$. Računamo

$$
\begin{aligned}
P(X = k, Y = l) = & \\
= & \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot \frac{3}{n-k} \cdot \\
& \cdot \frac{(b-k)(b-k-1)\cdots(b-k-l+1)}{(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-l)} \cdot \frac{2}{(n-k-l-1)} \\
= & \frac{b(b-1)\cdots(b-k-l+1) \cdot 3 \cdot 2}{n(n-1)\cdots(n-k-l-1)} \\
= & \frac{b! \cdot (n-k-l-2)! \cdot 3 \cdot 2}{(b-k-l)! \cdot n!} .
\end{aligned}
$$

b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

Namig: porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

Rešitev: slučajna spremenljivka X je število belih kroglic do prve rdeče. Dogodek $\{X = k\}$ se zgodi, če dobimo najprej k belih kroglic in nato rdečo. Označimo spet $n = b + 3$. Dobimo

$$
P(X = k) = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1) \cdot 3}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}
$$

za $k = 0, 1, \ldots, b$. Po drugi strani dobimo porazdelitvi spremenljivk X in Y kot robni porazdelitvi dvorazsežne porazdelitve. Ker je ta porazdelitev simetrična funkcija k in l, morata biti porazdelitvi X in Y enaki. Ker poznamo porazdelitev X, poznamo tudi porazdelitev Y.

6. (20) Mečemo standardno kocko, meti so neodvisni.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je prva številka, ki pade in ni enojka, dvojka?

Rešitev: označimo iskani dogodek z A_2. Dogodek A_2 je disjunktna unija dogodkov, da padejo zaporedja $2, 12, 112\ldots$ in njegova verjetnost je enaka

$$P(A_2) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}\,.$$

b. (10) Naj bo X število trojk, ki padejo, preden dobimo prvo enico. Izračunajte porazdelitev X. Kot znano privzemite, da je za $|x| < 1$

$$\sum_{l=n}^{\infty} \binom{l}{n} x^l = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}\,.$$

Rešitev: dogodek $\{X = n\}$ je disjunktna unija dogodkov, da na k-tem mestu dobimo prvo enico za $k \geq n+1$, med prvimi $k-1$ meti pa je natanko n trojk in natanko $k-1-n$ izidov, ki niso ne enke ne trojke. Za fiksen k je takih dogodkov $\binom{k-1}{n}$, njihova verjetnost pa $\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1-n}$. Z uporabo dane vsote sledi, da je

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-1}{n} \left(\tfrac{1}{6}\right)^{n+1} \cdot \left(\tfrac{4}{6}\right)^{k-1-n} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \left(\frac{4}{6}\right)^{-n} \sum_{l=n}^{\infty} \binom{l}{n} \left(\frac{4}{6}\right)^{l} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \left(\tfrac{4}{6}\right)^{-n} \left(\tfrac{4}{6}\right)^{n} \left(\frac{2}{6}\right)^{-n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\,.
\end{aligned}$$