IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT (MA, MF)

VERJETNOST

1. KOLOKVIJ

20. APRIL 2023

## NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

| Naloga | a. | b. | c. | d. | Skupaj |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | • | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | | • | |
| Skupaj | | | | | |

**1.** (20) Guinevere in Lancelot izmenoma in brez vračanja vlečeta karte iz dobro premešanega kupa osmih kart, med katerimi so štiri rdeče in štiri bele. Začne Guinevere.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo Guinevere prva izvlekla rdečo karto?

*Rešitev:*
*Prvi način: Predstavljajmo si, da so izidi vse možne razporeditve štirih rdečih kart v kupu. Teh je* $\binom{8}{4} = 70$. *Andreja lahko prva izvleče rdečo karto bodisi v prvo bodisi v drugo bodisi v tretje – kot prvo, tretjo ali peto karto v kupu. Tako dobimo, da je ugodnih izidov* $\binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 46$. *Iskana verjetnost je torej enaka* $46/70 = 23/35 \doteq 0{,}657$.
*Drugi način: Guinevere bo prva izvlekla rdečo karto, če bodo na prvih* $i-1$ *potegih izvlečene bele karte, in je na* $i$*-tem potegu izvlečena rdeča karta za* $i = 1, 3, 5$. *Označimo opisane dogodke z* $A_i$. *Dogodki so disjunktni.*

$$P(A_1) = \frac{4}{8}, \qquad P(A_3) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}$$

*in*

$$P(A_5) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4}\,.$$

*S seštevanjem verjetnosti dobimo* $\frac{23}{35}$.

b. (10) Recimo, da je Guinevere res prva izvlekla rdečo karto. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Lancelot izvlekel rdečo karto takoj za tem, ko je prvo rdečo karto izvlekla Guinevere?

*Rešitev:*
*Prvi način: Izidov, ko je Andreja prva izvlekla rdečo karto, takoj za njo pa je rdečo izvlekel še Bojan, je* $\binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 22$. *Iskana pogojna verjetnost je torej enaka* $22/46 = 11/23 \doteq 0{,}478$.
*Drugi način: Naj bo* $A$ *dogodek, da Guinevere prva izvleče rdečo karto in* $B$ *dogodek, da Lancelot izvleče rdečo karto takoj zatem, ko Guinevere izvleče prvo rdečo karto. Dogodek* $A \cap B$ *se zgodi, če je prva izvlečena rdeča karta na* $i$*-tem potegu za* $i = 1, 3, 5$ *in Lancelot izvleče rdečo karto na* $(i+1)$*-em potegu. Načini so disjunktni in imamo*

$$P(A_1 \cap B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}, \qquad P(A_3 \cap B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}$$

*in*

$$P(A_5 \cap B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3}\,.$$

*S seštevanjem ulomkov dobimo* $11/35$. *Imamo*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{11}{23}\,.$$

**2.** (20) V posodi je $a$ belih in $b$ črnih kroglic. Kroglice vlečemo zapovrstjo naključno, tako da kroglico, ki je izbrana na $k$-tem koraku, vrnemo v posodo takoj po tem, ko izvlečemo kroglico na $(k+1)$-em koraku. Naj bo $A_n$ dogodek, da na $n$-tem koraku izvlečemo belo kroglico.

a. (10) Izračunajte $p_n = P(A_n)$.

*Namig: izračunajte $p_2$ in $p_3$.*

*Rešitev: Za $n = 1$ je*

$$p_1 = \frac{a}{a+b}\,.$$

*Po formuli za popolno verjetnost je*

$$P(A_n) = P(A_n \mid A_{n-1})\,P(A_{n-1}) + P(A_n \mid A_{n-1}^c)\,P(A_{n-1}^c)\,.$$

*To lahko prepišemo v*

$$p_n = \frac{a-1}{a+b-1}\cdot p_{n-1} + \frac{a}{a+b-1}\cdot(1-p_{n-1})\,.$$

*Ta rekurzijska enačba natako določa $p_n$. Ker konstanta $p_n = \frac{a}{a+b}$ ustreza enačbi, je potem $p_n = p_1$ za vse $n$.*

b. (10) Označite $p_{k,n} = P(A_n \mid A_k)$ za $k \le n$. Pokažite, da je

$$p_{n,k} = \frac{a}{a+b} + \frac{(-1)^{n-k}b}{(a+b)(a+b-1)^{n-k}}\,.$$

*Namig: kaj je*

$$P(A_n \mid A_{n-1}\cap A_k)\,P(A_{n-1} \mid A_k) + P(A_n \mid A_{n-1}^c\cap A_k)\,P(A_{n-1}^c \mid A_k)\;?$$

*Upoštevajte, da je $p_{k,k} = 1$.*

*Rešitev: Po definiciji je $p_{k,k} = 1$. Preverimo lahko, da je*

$$P(A_n \mid A_k) = P(A_n \mid A_{n-1}\cap A_k)\,P(A_{n-1} \mid A_k) + P(A_n \mid A_{n-1}^c\cap A_k)\,P(A_{n-1}^c \mid A_k)\,.$$

*Velja torej*

$$p_{n,k} = \frac{a-1}{a+b-1}p_{n-1,k} + \frac{a}{a+b-1}(1-p_{n-1,k})\,.$$

*Rekurzijska enačba natanko določa $p_{k,n}$ pri začetnem pogoju $p_{k,k} = 1$. Izraz dan v nalogi ustreza začetnemu pogoju, tako da moramo samo preveriti, da ustreza tudi rekurzijski enačbi. Računamo*

$$\begin{aligned}
&\frac{a-1}{a+b-1}\cdot p_{n-1,k} + \frac{a}{a+b}\cdot(1-p_{n-1,k})\\
&\quad= \frac{a-1}{a+b-1}\cdot\left(\frac{a}{a+b} + \frac{(-1)^{n-k-1}b}{(a+b)(a+b-1)^{n-k-1}}\right)\\
&\qquad + \frac{a}{a+b-1}\cdot\left(\frac{b}{a+b} - \frac{(-1)^{n-k-1}b}{(a+b)(a+b-1)^{n-k-1}}\right)\\
&\quad= \frac{a}{a+b} + \frac{(-1)^{n-k}b}{(a+b)(a+b-1)^{n-k}}\,(-a+1+a)\\
&\quad= p_{k,n}\,.
\end{aligned}$$

**3.** (20) Pošteno kocko mečemo, dokler ne dobimo vseh šestih možnih izidov. Privzamemo, da so meti neodvisni. Naj bo $X$ potrebno število metov.

a. (5) Naj bo $A_{n,i}$ dogodek, da po $n$ metih še nismo videli izida $i$. Za $i = 1, 2, 3, 4, 5$ izračunajte $P(A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \cdots \cap A_{n,i})$.

*Rešitev: zgornji presek je dogodek, da smo v $n$ metih vedno dobivali izide $i + 1, i + 2, \ldots, 6$. Zaradi neodvisnosti je*

$$P(A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \cdots \cap A_{n,i}) = \left(\frac{6-i}{6}\right)^n .$$

b. (5) Izrazite dogodek $\{X > n\}$ z dogodki $A_{n,i}$.

*Rešitev: Dogodek $\{X > n\}$ se zgodi, če v prvih $n$ metih ne dobimo vsaj enega izmed možnih izidov. Sledi*

$$\{X > n\} = \bigcup_{i=1}^{6} A_{n,i}.$$

c. (10) Izračunajte verjetnost $P(X > n)$ in sklepajte kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke $X$. Verjetnosti zapišite kot zaključene izraze.

*Rešitev: možne vrednosti slučajne spremenljivke $X$ so $n = 6, 7, \ldots$ Pripadajoče verjetnosti lahko izračunamo na vsaj dva načina.*

Prvi način. *Izrazimo*

$$\{X = n\} = \bigcup_{i=1}^{6} \left(B_{n-1,i} \cap C_{n,i}\right) ,$$

*kjer je*

$$\begin{aligned} B_{n,i} &:= \{\textit{v prvih } n \textit{ metih so se že pojavili vsi izidi razen izida } i\} , \\ C_{n,i} &:= \{\textit{v } n\textit{-tem metu je prišlo do izida } i\} . \end{aligned}$$

*Velja*

$$B_{n,6} = A^c_{n,1} \cap A^c_{n,2} \cap A^c_{n,3} \cap A^c_{n,4} \cap A^c_{n,5} \cap A_{n,6} .$$

*Verjetnost tega dogodka izračunamo kot*

$$\begin{aligned} P(B_{n,6}) &= P(A_{n,6}) - P\big((A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup A_{n,3} \cup A_{n,4} \cup A_{n,5}) \cap A_{n,6}\big) \\ &= P(A_{n,6}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{5} (A_{n,i} \cap A_{n,6})\right) . \end{aligned}$$

*Drugi člen lahko izračunamo po formuli za vključitve in izključitve, pri čemer uporabimo točko a. in upoštevamo simetrijo. Dobimo*

$$P(B_{n,6}) = 1 - \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1} \binom{5}{k} \left(\frac{5-k}{6}\right)^n = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} \left(\frac{5-k}{6}\right)^n .$$

*Zadnji člen v vsoti je enak nič, torej je tudi*

$$P(B_{n,6}) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \left( \frac{5-k}{6} \right)^n .$$

*Spet zaradi simetrije je toliko enaka verjetnost $P(B_{n,i})$ za vse $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Zaradi neodvisnosti je*

$$P(B_{n-1,i} \cap C_{n,i}) = P(B_{n-1,i})\, P(C_{n,i}) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{n-1}}{6^n} .$$

*Ker so dogodki $B_{n-1,1}, \ldots, B_{n-1,6}$ paroma disjunktni, je končno*

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{n-1}}{6^{n-1}} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 10 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 5 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} . \end{aligned}$$

Drugi način. *Izrazimo*

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) .$$

*Velja*

$$\{X > n\} = \bigcup_{i=1}^{6} A_{n,i} .$$

*Po formuli za vključitve in izključitve iz točke a. ob upoštevanju simetrije dobimo*

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} P(A_{n,1} \cap \cdots \cap A_{n,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} \left( \frac{6-i}{6} \right)^n \\ &= 6 \left(\frac{5}{6}\right)^n - 15 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 20 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 15 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \left(\frac{1}{6}\right)^n . \end{aligned}$$

*To velja tudi za $n = 5$ – izraz na desni pride 1. To lahko po množenju s $6^5$ preverimo neposredno:*

$$6 \cdot 5^5 - 15 \cdot 4^5 + 20 \cdot 3^5 - 15 \cdot 2^5 + 6 = 18750 - 15360 + 4860 - 480 + 6 = 7776 = 6^5 .$$

*Torej za vse* $n = 6, 7, 8, \ldots$ *velja*

$$
\begin{aligned}
P(X = n) &= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} \left[ \left( \frac{6-i}{6} \right)^{n-1} - \left( \frac{6-i}{6} \right)^{n} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{6}{i} \frac{i}{6} \left( \frac{6-i}{6} \right)^{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \binom{5}{i-1} \left( \frac{6-i}{6} \right)^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{4} (-1)^{k} \binom{5}{k} \left( \frac{5-k}{6} \right)^{n-1} ,
\end{aligned}
$$

*kar je isto kot pri prvem načinu.*

**Opomba**. *Neposredno lahko dobimo*

$$
P(X = 6) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5}
$$

*in neposredno lahko preverimo, da se to ujema s splošno formulo: po množenju s* $6^5$ *dobimo*

$$
5^5 - 5 \cdot 4^5 + 10 \cdot 3^5 - 10 \cdot 2^5 + 5 \cdot 1^5 = 3125 - 5120 + 2430 - 320 + 5 = 120 = 5! \,.
$$

**4.** (20) V posodi je $B \geq 2$ belih in $R$ rdečih kroglic. Kroglice iz posode izbiramo zapovrstjo naključno brez vračanja. Naj bo $X$ število izbiranj do vključno prve bele kroglice, $Y$ pa število izbiranj do vključno druge bele kroglice.

a. (10) Izračunajte *skupno* porazdelitev slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$.

*Rešitev: Možni pari vrednosti za slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ so vsi celoštevilski pari $(k, l)$, za katere je $1 \leq k < l \leq R + 2$. Če naj se dogodek $\{X = k, Y = l\}$ zgodi, moramo najprej dobiti $k - 1$ rdečih kroglic, belo, $l - k - 1$ rdečih in spet belo. Označimo $N = B + R$. Verjetnost danega dogodka lahko izračunamo kot*

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = l) &= \frac{R}{N} \cdot \frac{R-1}{N-1} \cdots \frac{R-k+2}{N-k+2} \cdot \frac{B}{N-k+1} \cdot \\ &\qquad \cdot \frac{R-k+1}{N-k} \cdots \frac{R-l+3}{N-l+2} \cdot \frac{B-1}{N-l+1} \\ &= \frac{B(B-1)\, R!\, (N-l)!}{(R-l+2)!\, N!} \end{aligned}$$

*ali kot*

$$P(X = k, Y = l) = \frac{\binom{N-l}{B-2}}{\binom{N}{B}} = \frac{B(B-1)\, R!\, (N-l)!}{(R-l+2)!\, N!}\,.$$

b. (10) Utemeljite, da za vse $l = 2, 3, \ldots, R + 2$ in $k = 1, 2, \ldots, l - 1$ velja

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{l-1}\, P(Y = l)\,.$$

*Rešitev: Uporabimo formulo za robno porazdelitev*

$$P(Y = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Y = l)$$

*in opazimo, da so vse verjetnosti v vsoti enake (neodvisne od $k$). Trditev sledi.*

**5.** (20) Privzemite, da ima slučajna spremenljivka $X$ porazdelitev dano z

$$P(X=k)=\binom{2k}{k}\frac{\beta^k}{4^k\,(1+\beta)^{k+\frac{1}{2}}}$$

za $k=0,1,\ldots$ in $\beta>0$.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

*Namig: preverite, da*

$$kP(X=k)=\frac{2\beta}{4(1+\beta)}[2(k-1)+1]P(X=k-1)$$

*za* $k\geq 1$.

*Rešitev: Enakost se da preveriti z direktnim izračunom. S seštevanjem obeh strani po vseh* $k=1,2,\ldots$ *dobimo*

$$E(X)=\frac{\beta}{1+\beta}E(X)+\frac{\beta}{2(1+\beta)}$$

*ali*

$$E(X)=\frac{\beta}{2}\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X^2)$.

*Namig: preverite, da*

$$k^2P(X=k)=\frac{\beta}{4(1+\beta)}\left[4(k-1)^2+6(k-1)+2\right]P(X=k-1)$$

*za* $k=1,2,\ldots$.

*Rešitev: Enakost se da preveriti z direktnim izračunom. S seštevanjem obeh strani po vseh* $k=1,2,\ldots$ *dobimo*

$$E(X^2)(1+\beta)=\beta E(X^2)+\frac{3\beta}{2}E(X)+\frac{\beta}{2}$$

*ali*

$$E(X^2)=\frac{\beta(2+3\beta)}{4}\,.$$

**6.** (20) Djoković in Nadal igrata tenis. Izid vsake igre je neodvisen od izidov ostalih iger, vsak igralec pa v posamični igri zmaga z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. V nizu zmaga igralec, ki prvi zmaga v vsaj šestih igrah in ima pred nasprotnikom vsaj dve igri prednosti. Naj bo $X$ število iger, ki jih bosta igralca odigrala v nizu.

a. (5) Poiščite $P(X = n)$ za $n = 6, 7, 8, 9, 10$.

*Rešitev: dogodek* $\{X = n\}$ *se lahko zgodi na dva disjunktna načina: (i) v* $n$*-ti igri zmaga Djoković, v prvih* $n-1$ *igrah pa ima* 5 *zmag. (ii) enako kot (i), le da je ime Nadal. Z uporabo neodvisnosti, simetrije in binomske porazdelitve dobimo*

$$P(X = n) = 2 \cdot \binom{n-1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

*Pospravimo lahko v*

$$P(X = n) = \binom{n-1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\,.$$

*Konkretno je:*

$$P(X = 6) = \frac{1}{32}\,, \quad P(X = 7) = \frac{3}{32}\,, \quad P(X = 8) = \frac{21}{128}\,,$$
$$P(X = 9) = \frac{7}{32}\,, \quad P(X = 10) = \frac{63}{256}\,.$$

b. (5) Izračunajte verjetnost $P(X > 10)$.

*Rešitev: Recimo, da je Djoković dobil 10. igro, a s tem ni dobil niza. Tedaj je smel v prvih 9 igrah zmagati največ 4-krat. Če je zmagal natanko 4-krat, sta po 10 igrah izenačena – vsak je zmagal po 5-krat. Če pa je zmagal manj kot 4-krat, to pomeni, da je Nadal v prvih 9 igrah zmagal 6-krat, ob zadnji zmagi pa je imel nujno tudi vsaj dve točki prednosti. To pa pomeni, da je že prej dobil niz in do 10. igre sploh ni prišlo. Podobno sklepamo, če je 10. igro dobil Nadal. Dogodek* $\{X > 10\}$ *torej pomeni, da sta igralca v prvih* 10 *igrah izenačena, seveda pa velja tudi obratno: če sta igralca v prvih* 10 *igrah izenačena, nobeden ni dobil dovolj iger, torej morata igrati še naprej. Binomska porazdelitev nam da*

$$P(X > 10) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{63}{256}\,.$$

*To pa lahko izračunamo tudi kot* $1 - P(X = 6) - P(X = 7) - P(X = 8)$ $- P(X = 9) - P(X = 10)$.

c. (10) Izračunajte $P(X = n)$ še za $n > 10$. Verjetnosti so pozitivne samo za sode $n$.

*Rešitev: za sod* $n$ *se dogodek* $\{X = n\}$ *zgodi, če sta igralca po* 10 *igrah izenačena, v parih iger* $(11, 12)$,$(13, 14)$, …,$(n-3, n-2)$ *sta zmagovalca različna igralca, v paru iger* $(n-1, n)$ *pa zmaga eden od obeh – v obeh igrah isti. Za vsak blok* *(najsi bo vmesni ali končni) je verjetnost ugodnega dogodka enaka* $1/2$ *in dogodki, odvisni od disjunktnih blokov iger, so med sabo neodvisni. Zato za* $m = 6, 7, \ldots$ *velja*

$$P(X = 2m) = P(X > 10) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2m-10}{2}} .$$

*Pospravimo v*

$$P(X = 2m) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+5} = \frac{63}{2^{m+3}} .$$