Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

1. kolokvij

16. april 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) V r škatel mečemo n kroglic. Meti so med sabo neodvisni, posamezno škatlico pa zadenemo z verjetnostjo $1/r$. Privzemite, da je $n \geq r$. Za $k = 1, 2, \ldots, r$ naj bo A_k dogodek, da je po n metih v k-ti škatlici vsaj ena kroglica.

a. (10) Izračunajte $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$.

Rešitev: Zgornja unija je dogodek, da je v prvih k škatlicah vsaj kakšna kroglica. Pri vsakem metu je verjetnost, da zadenemo kakšno od prvih k škatlic enaka k/r. Ker so meti neodvisni, sledi

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n .$$

Sledi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = 1 - \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n .$$

b. (10) Izračunajte

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r)\,.$$

Namig: Uporabite formulo za vključitve in izključitve.

Rešitev: Lažje bo poiskati verjetnost nasprotnega dogodka. Po formuli za vključitve in izključitve in z uporabo simetrije dobimo

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_r^c) &= \\ &= r\,P(A_1^c) - \binom{r}{2} P(A_1^c \cap A_2^c) + \binom{r}{3} P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) - \\ &\qquad \cdots + (-1)^{r-1} P(A_1^c \cap \cdots \cap A_r^c) \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n . \end{aligned}$$

2. (20) V standardnem kupu kart je 52 kart. Po 13 je pikov, src, karov in križev. Karte dobro premešamo in jih razdelimo 4 igralcem, tako da vsak dobi 13 kart.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo imel vsak igralec karte enega samega tipa (tipi so seveda pik, srce, križ in karo)?

Rešitev: Označimo dani dogodek z A. Če ločimo vse karte, ne gledamo pa vrstnega reda deljenja, lahko štirim igralcem razdelimo karte na

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

načinov. Od teh možnih načinov jih je $4! = 24$ *takih, ko imajo vsi igralci karte enakega tipa. Iskana verjetnost je*

$$P(A) = \frac{4! \cdot (13!)^4}{52!}\,.$$

b. (10) Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo imel prvi igralec karte enega samega tipa, če **nima** vsak igralec kart enega samega tipa?

Rešitev: Naj bo $B = \{\textit{prvi igralec ima karte istega tipa}\}$. *Izračunati je treba*

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)}\,.$$

Torej moramo izračunati le še $P(B)$. *Dogodek* B *sestavlja* $4 \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$ *izidov, torej je*

$$P(B) = 4 \cdot \frac{13! \cdot 39!}{52!} = \frac{4}{\binom{52}{13}}$$

in iskana pogojna verjetnost je enaka

$$P(B|A^c) = \frac{4 \cdot 13!\,\big(39! - 3! \cdot (13!)^3\big)}{52! - 4! \cdot (13!)^4}\,.$$

3. (20) Dano je zaporedje metov, kjer v vsakem metu hkrati vržemo eno ali več standardnih kock. V prvem metu vržemo eno kocko. Če v posameznem metu na vseh kockah pade šestica, dodamo še eno kocko, sicer pa pustimo isto število kock. Vsi meti kock so neodvisni.

a. (10) Zapišite porazdelitev števila metov, v katerih smo metali manj kot tri kocke.

Rešitev: Označimo število metov z X_3. Ta slučajna spremenljivka lahko zavzame vrednosti $2, 3, 4 \ldots$ Slučajna spremenljivka X_3 označuje met, po katerem smo dodali tretjo kocko. Splošneje, naj X_m označuje met, po katerem smo dodali m-to kocko.

Naj bo $n = 2, 3, 4 \ldots$ Če je $X_3 = n$, je X_2 lahko enak $1, 2, \ldots, n-1$. Opišimo dogodek $\{X_2 = k, X_3 = n\}$. To pomeni, da v prvih k metih ni padla šestica, v k-tem metu pa je padla, nakar smo dodali novo kocko. V nadaljnjih $n-k-1$ metih se ni zgodilo, da bi na obeh kockah padla šestica, v $(n-k-1)$-tem metu pa je na obeh kockah padla šestica. Sledi

$$P(X_2 = k, X_3 = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{n-k-1} \cdot \frac{1}{36}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} P(X_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_2 = k, X_3 = n) \\ &= \frac{1}{6^3} \, \frac{\left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{\frac{35}{36} - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da je število metov, pri katerih smo metali dve kocki, strogo večje od števila metov, v katerih smo metali eno kocko?

Namig: pogojujte na število metov, v katerih smo metali eno kocko.

Rešitev: Označimo z A dogodek, da je število metov, pri katerih smo metali dve kocki, strogo večje od števila metov, v katerih smo metali eno kocko. Število metov, v katerih smo metali eno kocko, je natanko X_2. Pogojno na $X_2 = k$ se dogodek A ujema z dogodkom, da se nikoli v prvih k metih, ko smo metali dve kocki, ni zgodilo, da bi na obeh padla šestica. Torej je

$$P(A \mid X_2 = k) = \left(\frac{35}{36}\right)^k.$$

Sledi

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A \mid X_2 = k)\, P(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{35}{36}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{41}\,.$$

4. (20) Za okroglo mizo naključno posadimo b belih in r rdečih vitezov, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Stole oštevilčimo od 1 do $n = b + r$ v nasprotni smeri urinega kazalca.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da ima vitez, ki sedi na stolu k, soseda različnih barv (gledamo torej samo barvi sosedov).

Rešitev: Ker so vsi možni vrstni redi enako verjetni, bo na stolih, ki sta sosednja stolu k, sedel povsem naključno izbran par vitezov. Verjetnost, da bosta nasprotnih barv, je

$$\frac{br}{\binom{n}{2}} = \frac{2br}{n(n-1)} .$$

b. (10) Naj bo X število vitezov, katerih soseda sta različnih barv. Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 , & \text{če ima vitez na stolu } k \text{ soseda različnih barv} \\ 0 , & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tedaj je $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$ *in*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(I_k) = \frac{2br}{n-1} .$$

5. (20) Pri testiranju generatorjev slučajnih števil pride do naslednjega vprašanja: imamo m kartic, oštevilčenih z $1, 2, \ldots, m$. Kartice izbiramo naključno z vračanjem, tako da so izbire med sabo neodvisne, pri vsakem izbiranju pa so vse kartice enako verjetne. Izbiranje ponavljamo, dokler ni število na izbrani kartici manjše ali enako tistemu na predhodno izbrani kartici. Naj bo X dolžina niza kartic s strogo naraščajočimi števili, Y pa število na zadnji izbrani kartici.

a. (15) Navedite vse možne pare, ki so lahko vrednosti para (X, Y), in izračunajte $P(X = k, Y = l)$.

Namig: strogo naraščajoči nizi k števil iz množice $\{1, 2, \ldots, a\}$ so v bijektivni korespondenci s kombinacijami velikosti k iz iste množice.

Rešitev: Možni pari so (k, l) z $1 \le l, k \le m$. Dogodek $\{X = k, Y = l\}$ se zgodi, če je v nizu k strogo naraščajočih števil zadnje večje ali enako l, naslednje pa je l. Prešteti moramo, koliko je strogo naraščajočih nizov k števil, v katerih je zadnje l ali več. Strogo naraščajoči nizi dolžine k so v bijektivni korespondenci s kombinacijami elementov. Vseh strogo naraščajočih nizov dolžine k iz množice $\{1, 2, \ldots, m\}$ je $\binom{m}{k}$, odšteti pa moramo tiste, ki vsebujejo samo elemente iz $\{1, 2, \ldots, l-1\}$, torej $\binom{l-1}{k}$. Binomski simbol $\binom{a}{b}$ za $b > a$ interpretiramo kot 0. Verjetnost, da dobimo katerega koli od konkretnih nizov $k+1$ števil, ki ustrezajo dogodku $\{X = k, Y = l\}$, je zaradi privzetka neodvisnosti enaka $\frac{1}{m^{k+1}}$. Sledi

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{m^{k+1}} \left[\binom{m}{k} - \binom{l-1}{k} \right].$$

b. (5) Najdite verjetnost $P(Y = m)$.

Rešitev:

Prvi način. *Iz formule za robne porazdelitve sledi*

$$P(Y = m) = \sum_{k=1}^{m} P(X = k, Y = m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^{k+1}} \left[\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k} \right].$$

Opazimo, da lahko seštevamo že od $k = 0$ naprej, saj je ustrezni člen enak nič. Nato seštejemo po binomski formuli in dobimo

$$P(Y = m) = \frac{1}{m} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \right] = \frac{(m+1)^{m-1}}{m^{m+1}}.$$

Drugi način. *Začnemo tako kot pri prvem načinu, nakar uporabimo Pascalovo* *identiteto in prav tako seštejemo po binomski formuli:*

$$\begin{aligned} P(Y = m) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^{k+1}} \left[\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^{k+1}} \binom{m-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{m^2} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{m-1} \\ &= \frac{(m+1)^{m-1}}{m^{m+1}} \,. \end{aligned}$$

Tretji način. *Označimo z A dogodek, da se najdaljše začetno strogo naraščajoče zaporedje oznak izbranih kartic konča z m. Tako zaporedje je lahko dolgo največ m, torej je dovolj prešteti vsa zaporedja števil od 1 do m dolžine m, ki imajo to lastnost, da se najdaljše začetno strogo naraščajoče zaporedje oznak izbranih kartic konča z m. Izkaže se, da so taka zaporedja v bijektivni korespondenci s funkcijami iz $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ v $\{0, 1, \ldots, m\}$. Vsaki taki funkciji f namreč zaporedje z zahtevano lastnostjo priredimo na naslednji način: če je $f^{-1}(\{0\}) = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$ in $f^{-1}(\{1, 2, \ldots, m\}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-k}\}$, kjer je $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \le m-1$ in $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{m-k} \le m-1$, izberemo zaporedje*

$$i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, m, f(j_1), f(j_2), \ldots, f(j_{m-k}) \,.$$

Ni težko preveriti, da je ta predpis res bijekcija med ustreznima množicama. Tako dobimo, da je zaporedij z iskano lastnostjo natanko $(m+1)^{m-1}$. Sledi $P(A) = (m+1)^{m-1}/m^m$. Dogodek $\{Y = m\}$ pa pomeni, da se zgodi A in da najdaljšemu začetnemu strogo naraščajočemu zaporedju oznak izbranih kartic, ki se konča z m, sledi še ena kartica z oznako m. Sledi $P(Y = m) = (m+1)^{m-1}/m^{m+1}$, kar je isto kot prej.

6. (20) Vsak osebek ima dva gena, ki določata barvo oči. Vsak gen je ali tipa R ali tipa r. Osebek ima rjave oči, če ima vsaj en gen tipa R, sicer pa ima modre oči. Vsak potomec dobi en gen od matere in en gen od očeta, pri čemer se od obeh staršev naključno z verjetnostjo $1/2$ izbere eden od obeh genov. Izbiri od matere in očeta sta neodvisni.

Privzemite, da nov posameznik nastane tako, da med moškimi oziroma ženskami naključno in neodvisno izberemo po enega oziroma eno, ki bosta imela potomca. Privzemite, da bo naključno izbran moški tipov RR, Rr, rR in rr z verjetnostmi p^2, $p(1-p)$, $(1-p)p$ in $(1-p)^2$ in da enako velja za ženske.

a. (10) Označite $B = \{\text{potomec je rjavook}\}$. Izračunajte $P(B)$.

Namig: Nasprotni dogodek.

Rešitev: Izračunajmo verjetnost, da potomec od matere dobi gen r. To se lahko zgodi, če je mati tipa Rr, rR ali rr. Pogojne verjetnosti so po vrsti $1/2$, $1/2$ in 1, torej je

$$P(\textit{od matere podeduje } r) = p(1-p) + (1-p)^2 = 1 - p\,.$$

Verjetnost, da posameznik dobi gen r od očeta je enaka. Zaradi neodvisnosti je

$$P(\textit{oba podedovana gena sta } r) = (1-p)^2\,.$$

Sledi $P(B) = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2$.

b. (10) Označite $A = \{\text{starša sta rjavooka}\}$ in $B = \{\text{potomec je rjavook}\}$. Izračunajte $P(A|B)$.

Namig: Dogodki $H_{xy,zw} = \{\textit{mati je tipa } xy,\ \textit{oče je tipa } zw\}$ za $x, y, z, w \in \{R, r\}$ so particija in velja

$$P(A \cap B) = \sum_{xy,zw} P(A \cap B \cap H_{xy,zw})\,.$$

Rešitev: Velja

$$P(A \cap B) = \sum_{xy,zw} P(A \cap B \cap H_{xy,zw})\,.$$

Če je $xy = rr$ ali $zw = rr$ je verjetnost preseka enaka 0. Če je $xy = RR$ in $zw = RR$, je $P(A \cap B \cap H_{xx,yy}) = P(H_{xy,zw}) = p^4$. Če je $xy = RR$ in $zw = Rr$ ali rR, je $P(A \cap B \cap H_{xx,yy}) = P(H_{xy,zw}) = p^2 \cdot p(1-p)$. Vlogi xy in zw lahko zamenjamo in dobimo 4 take možnosti. Ostane še možnost

$$P(A \cap B \cap H_{Rr,Rr}) = P(B \cap H_{Rr,Rr}) = p^2(1-p)^2 \cdot \frac{3}{4}\,.$$

Vlogi x in y in z ter w lahko zamenjamo in dobimo 4 take možnosti. Sledi

$$P(A \cap B) = p^4 + 4 \cdot p^2(1-p)^2 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot p^2 \cdot p(1-p)\,.$$