Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

1. kolokvij

16. april 2019

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.					
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.				•	
Skupaj					

1. (20) V igri *Točke* igralca A in B mečeta pošten kovanec. Privzamemo, da so meti neodvisni. Če na kovancu pade grb, igralec A dobi točko, v nasprotnem primeru pa dobi točko igralec B. Igralec A zmaga, če zbere a točk, preden igralec B zbere b točk, pri čemer sta a in b dani pozitivni celi števili.

a. (10) Izrazite verjetnost, da zmaga igralec A, z vsoto. Vsote vam ni treba sešteti.

Rešitev: Zamislimo si, da igralca mečeta v nedogled, in označimo z X število metov, dokler ne pade a grbov. Igralec A bo zmagal, če bo $X \leq a+b-1$. Vemo, da je $X \sim \mathrm{NegBin}(a, \frac{1}{2})$. Sledi

$$P\left(\textit{zmaga } A\right) = \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{k-1}{a-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

b. (10) Problem posplošimo na igralce A, B in C. Iz škatle, v kateri so trije listki z napisi A, B in C, naključno izbirajo listke. Točko dobi igralec, ki je napisan na izbranem listku. Izbire so med sabo neodvisne, vsak listek pa izberemo z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. Igralec A zmaga, če prej izbere a točk, kot B zbere b točk ali C zbere c točk, kjer so a, b in c dana pozitivna cela števila. Izrazite verjetnost, da zmaga A, z ustreznimi vsotami, ki vam jih ni treba sešteti.

Namig: $H_k = \{A \text{ zmaga natanko pri } k\text{-tem izbiranju iz škatle}\}$.

Rešitev: Podobno kot v prvem delu si zamislimo, da igralci izbirajo listke v nedogled, in označimo z X število izbir, dokler izberejo a listkov A. Velja $X \sim \mathrm{NegBin}\big(a, \frac{1}{3}\big)$. Igralec A ima možnosti za zmago, če se zgodi dogodek $H_k = \{X = k\}$ za $k = a, a+1, \ldots, a+b+c-2$. Če se zgodi H_k, vemo, da sta igralca B in C skupaj dobila $k-a$ točk. Pogojno se točke med igralca B in C porazdelijo binomsko z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Igralec A bo zmagal, če bo število točk l igralca B ustrezalo neenačbama $l < b$ in $k-a-l < c$ ali $k-a-c < l < b$. Sledi

$$P(\textit{zmaga } A) = \sum_{k=a}^{\min\{a+b,a+c\}-1} P(H_k) + \sum_{k=\min\{a+b,a+c\}}^{a+b+c-2} P(H_k)\, P(\textit{zmaga } A|H_k)\, .$$

Po zgornjem razmisleku so pogojne verjetnosti v drugi vsoti enake

$$P(\textit{zmaga } A|H_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-a} \sum_{l=k-a-c+1}^{b-1} \binom{k-a}{l} .$$

Vstavimo verjetnosti za negativno binomsko porazdelitev in dobimo

$$P(zmaga\ A) = \left(\frac{1}{3}\right)^a \sum_{k=a}^{\min\{a+b,a+c\}-1} \binom{k-1}{a-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-a} + \sum_{k=\min\{a+b,a+c\}}^{a+b+c-2} \binom{k-1}{a-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \sum_{l=k-a-c+1}^{b-1} \binom{k-a}{l}$$

ob dogovoru, da je vsota enaka nič, če je končni indeks manjši od začetnega (to se zgodi pri drugi vsoti, če je $a = b = 1$). Če pa sprejmemo še dogovor, da je $\binom{m}{r} = 0$, brž ko je $r < 0$ ali $r > m$, se celoten izraz poenostavi kar v:

$$P(zmaga\ A) = \sum_{k=a}^{a+b+c-2} \binom{k-1}{a-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \sum_{l=k-a-c+1}^{b-1} \binom{k-a}{l}.$$

2. (20) V posodi je na začetku ena bela in dve rdeči kroglici. Iz posode začnemo vleči kroglice. Vsakič, ko izvlečemo belo, jo vrnemo v posodo in dodamo še eno belo kroglico. Vsakič, ko izvlečemo rdečo kroglico, pa jo obdržimo in v posodo dodamo še dve beli kroglici. Zaporedne izbire so med sabo neodvisne.

a. (10) Za $1 \leq m < n$ izračunajte verjetnost, da rdečo kroglico prvič izvlečemo pri m-tem, drugič pa pri n-tem vlečenju. Rezultat izrazite v sklenjeni obliki.

Rešitev: Iskana verjetnost je enaka

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{2}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m+3} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{4}{m(m+1)(n+1)(n+2)} .$$

b. (5) Označimo z X število izvlečenih kroglic do vključno zadnje rdeče. Za vse $n = 2, 3, 4, \ldots$ izračunajte $P(X = n)$.

Namig: $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$.

Rešitev:

$$P(X = n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{4}{m(m+1)(n+1)(n+2)} = \frac{4(n-1)}{n(n+1)(n+2)} .$$

c. (5) Dokažite, da skoraj gotovo nekoč izvlečemo obe rdeči kroglici.

Rešitev: Prvi način. *To sledi iz dejstva, da je*

$$\begin{aligned}
P(X < \infty) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(X = n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(n-1)}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} + \frac{8}{n+1} - \frac{6}{n+2} \right) \\
&= 6 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Drugi način. *Oglejmo si dogodek* $\{X > n\}$. *Le-ta je disjunktna unija dogodkov* A_n *in* $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,n}$*, kjer je:*

$$\begin{aligned} A_n &= \{\textit{med prvimi } n \textit{ izvlečenimi kroglicami ni rdeče}\}\,, \\ A_{n,m} &= \{\textit{med prvimi } n \textit{ izvlečenimi kroglicami je edina rdeča na } m\textit{-tem mestu}\ \}\,. \end{aligned}$$

Velja

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{m}{m+2} = \frac{2}{(m+1)(m+2)}\,, \\ P(A_{n,m}) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{2}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m+3} \cdots \frac{n+1}{n+2} = \frac{4}{m(m+1)(n+2)}\,. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} P(X > n) = P(A_n) + \sum_{m=1}^{n} P(A_{n,m}) &= \frac{1}{n+2}\left[\frac{2}{n+1} + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\right] \\ &= \frac{2+4n}{(n+1)(n+2)}\,, \end{aligned}$$

kar gre proti nič, ko gre n *proti neskončno. Želeno dejstvo sledi.*

3. (20) Iz množice, ki ima N elementov, r-krat izberemo podmnožico velikosti n. Pri vsaki izbiri so vse možne podmnožice predpisane velikosti enako verjetne. Vse izbire podmnožic so med seboj neodvisne.

a. (5) Kolikšna je verjetnost, da je fiksnih k elementov dane množice v vseh izbranih podmnožicah?

Rešitev: $\left[\frac{\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}\right]^r$ *(ob dogovoru, da je* $\binom{m}{s} = 0$*, brž ko je* $s < 0$ *ali* $s > m$*).*

b. (15) Kolikšna je verjetnost, da noben element ni v vseh izbranih podmnožicah? Dobljenega izraza vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Za $i = 1, 2, \ldots, N$ *naj bo* A_i *dogodek, da je* i*-ti element v vseh izbranih podmnožicah. V prejšnji točki smo izračunali, da za poljubne različne* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *velja*

$$P\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big) = \left[\frac{\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}\right]^r .$$

S pomočjo načela vključitev in izključitev izračunamo, da je iskana verjetnost enaka

$$\begin{aligned}
&P\big(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_N^c\big) \\
&\quad = 1 - P\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N\big) \\
&\quad = 1 - \sum_{i_1=1}^{N} P(A_{i_1}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&\qquad\quad - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots \\
&\qquad\quad + (-1)^n \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{N}{k} \left[\frac{\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}\right]^r .
\end{aligned}$$

4. (20) V posodi je n belih in n črnih krogel. Krogle izbiramo naključno brez vračanja, tako da je vseh $\binom{2n}{n}$ možnih vrstnih redov izbir belih in črnih enako verjetnih.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da je tik po izbiri $(2k)$-te kroglice število belih in črnih kroglic izenačeno.

Rešitev: Ker izbiramo naključno, smo po $2k$ kroglicah izbrali slučajni vzorec $2k$ kroglic. Število belih med njimi ima hiper-geometrijsko poraydelitev s parametri $2k$, n,$2n$. Želimo, da je število belih med izbranimi točno k. Sledi, da je verjetnost iskanega dogodka enaka

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{2k}} .$$

b. (10) Naj bo N število izbir, tik po katerih sta bila število belih in v število črnih krogel izenačena. Pokažite, da je

$$E(N) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{2k}} .$$

Rešitev: Zapišimo

$$N = I_2 + \cdots + I_{2n} ,$$

kjer je

$$I_{2k} = \begin{cases} I_{2k} = 1 , & \textit{če sta število belih in črnih krogel izenačeni po } 2k\textit{-ti izbiri} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Računamo

$$P(I_{2k} = 1) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{2k}} .$$

5. (20) Naj ima slučjna spremenljivka X gostoto

$$f_X(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{2\cosh^2 x}$$

za $x \in \mathbb{R}$.

a. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke

$$U = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}}\right) .$$

Rešitev: Računamo lahko z uporabo dejstva, da je

$$U = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh X\right),$$

torej iščemo

$$P(X \leq \operatorname{arctanh}(2u-1))$$

in da velja

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ali pa direktno

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= P\left(\tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}}\right) \leq u\right) \\ &= P\left(\tfrac{e^X}{e^X + e^{-X}} \leq u\right) \\ &= P\left(\tfrac{1}{1+e^{-2X}} \leq u\right) \\ &= P\left(X \leq \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{u}{1-u}\right)\right). \end{aligned}$$

Odvajamo zgornjo porazdelitveno funkcijo in dobimo gostoto

$$\begin{aligned} f_U(u) &= f_X\left(\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{u}{1-u}\right)\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{u}{1-u}\right)\right)' \\ &= \frac{2}{\left(e^{\frac{1}{2}\ln\frac{u}{1-u}} + e^{\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{u}{1-u}}\right)^2} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1-u}{u} \cdot \tfrac{1-u+u}{(1-u)^2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

na intervalu $u \in (0,1)$*, kar pomeni, da je slučajna spremenljivka* U *porazdeljena enakomerno* $U(0,1)$*.*

b. (10) Za $p \in (0,1)$ izračunajte

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\right) .$$

Rešitev:Vemo, da velja $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$. *Računamo*

$$\begin{aligned} P\left(X \leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\ln\frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{1-p}}} \frac{1}{2\cosh^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2}\tanh x\Big|_{-\infty}^{\ln\frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{1-p}}} \\ &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Uporabili smo definicijo $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *in lastnost* $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$.

6. (20) Med N kartami imamo n asov. Karte dobro premešamo in jih začnemo deliti z vrha eno po eno. Označimo, da so se asi pojavili na mestih $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$. Definirajmo slučajne spremenljivke $W_1 = T_1 - 1$, $W_i = T_i - T_{i-1} - 1$ za $2 \le i \le n$ in $W_{n+1} = N - T_n$. Kot znano privzemite, da lahko dano število m napišemo kot vsoto r pozitivnih števil na $\binom{m-1}{r-1}$ načinov, kot vsoto nenegativnih števil pa na $\binom{m+r-1}{r-1}$ načinov.

a. (10) Izračunajte skupno porazdelitev slučajnih spremenljivk $W_1, W_2, \ldots, W_n$ in porazdelitve posameznih W_i.

Rešitev: Lotimo se najprej skupne porazdelitve. Možne vrednosti slučajnega vektorja $(W_1, \ldots, W_{n+1})$ *so* $(n+1)$*-terice* $(k_1, \ldots, k_{n+1})$*, za katere je* $k_i \ge 0$ *in* $\sum_i k_i = N - n$*. Dogodek*

$$\{W_1 = k_1, \ldots, W_{n+1} = k_{n+1}\}$$

se zgodi, če dobimo asa na mestih $k_1 + 1, k_1 + k_2 + 2, \ldots, N - k_n$*. Verjetnost za to je*

$$\frac{N-n}{N} \cdot \frac{N-n-1}{N-1} \cdots \frac{n}{N-k_1} \cdot \frac{N-n-k_1}{N-k_1-1} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{\binom{N}{n}} .$$

Zaradi simetrije zgornje porazdelitve so vsi W_i *enako porazdeljeni, zato je dovolj izračunati porazdelitev* W_1*. Možne vrednosti te slučajne spremeljivke so* $k = 0, 1, \ldots, N-n$*. Računamo*

$$\begin{aligned} P(W_1 = k) &= P(T_1 = k+1) \\ &= \frac{N-n}{N} \cdot \frac{N-n-1}{N-1} \cdots \frac{N-n-k+1}{N-k+1} \cdot \frac{n}{N-k} \\ &= \frac{\binom{N-k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} . \end{aligned}$$

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da med deljenjem vsaj enkrat dobimo dva asa zapored?

Rešitev: Iz prvega dela razberemo, da moramo prešteti, koliko je $(n+1)$*-teric nenegativnih celih števil z vsoto* $N - n$*, pri katerih je vsaj eno število enako* 0*. Če nimamo omejitev, je vseh* $(n+1)$*-teric nenegativnih celih števil z vsoto* $N - n$ *enako* $\binom{N}{n}$*. Če zahtevamo, da so vsa števila pozitivna, je takih* $(n+1)$*-teric le* $\binom{N-n-1}{n}$*. Torej je*

$$P(\min_i W_i = 0) = 1 - \frac{\binom{N-n-1}{n}}{\binom{N}{n}} .$$