Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

1. kolokvij

15. april 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Črke A,A,A,A,A,B,B,D,K,R,R naključno permutiramo, tako da je vsak vrstni red enako verjeten. Označimo

$$B = \{\text{prva črka v slučajni permutaciji je A}\}$$

in

$$C = \{\text{slučajna permutacija črk je ABRAKADABRA}\}\,.$$

a. (10) Izračunajte $P(C)$.

Rešitev: začnimo s prvim mestom. Verjetnost, da bo na prvem mestu črka A, je $5/11$*. Pogojno na ta dogodek, je verjetnost, da bo na drugem mestu B, enaka* $2/10$*. Podobno nadaljujemo in dobimo, da je iskana verjetnost enaka*

$$\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}\,.$$

b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost $P(B \mid C^c)$.

Rešitev: najprej izračunamo $P(B\cap C^c)$*. Ker je* $C\subseteq B$*, je*

$$P(B\cap C) = P(C)\,,$$

torej

$$P(B\cap C^c) = \frac{5}{11} - \frac{5!\cdot 2!\cdot 2!}{11!}\,.$$

Sledi

$$P(B \mid C^c) = \frac{\frac{5}{11}-\frac{5!\cdot2!\cdot2!}{11!}}{1-\frac{5!\cdot2!\cdot2!}{11!}} = \frac{5\cdot 10! - 5!\cdot 2!\cdot 2!}{11! - 5!\cdot 2!\cdot 2!}\,.$$

2. (20) V igri *Black Jack* je poleg delilca kart udeleženo še sedem igralcev. Delilec združi šest kupov 52 standardnih kart v enega, ga dobro premeša, dodeli sebi eno karto, ostalim igralcem pa vsakemu po dve.

a. (10) Naj bo A_k dogodek, da imata delilec in igralec k same srčeve sedmice. Izračunajte verjetnosti vseh možnih presekov dogodkov $A_1, A_2, \ldots, A_7$.

Rešitev: Ker so tri karte, ki jih imata delilec in igralec k, naključno izbrane izmed vseh 312 kart, je

$$P(A_k) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{312}{3}}\,.$$

Nadalje za $k \neq l$ velja

$$P(A_k \cap A_l) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{312}{5}} = \frac{307}{\binom{312}{6}}\,.$$

Verjetnost preseka treh ali več dogodkov izmed $A_1, \ldots, A_7$ pa je enaka 0.

b. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo imel delilec sedmico, vsaj eden od ostalih igralcev pa za obe svoji karti sedmici v istem simbolu kot delilec, recimo da ima delilec srčevo sedmico in še vsaj eden od igralcev dve srčevi sedmici?

Rešitev: če za $k = 1, 2, \ldots, 7$ označimo z A_k dogodek, da imata delilec in igralec k same srčeve sedmice, je iskani dogodek, da imata delilec in vsaj en igralec sedmice v srcu, natančno unija $\cup_{k=1}^{7} A_k$. Po formuli za vključitve in izključitve in zaradi simetrije je

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{7} A_k\right) = 7 \cdot P(A_1) - 21 \cdot P(A_1 \cap A_2)\,.$$

Simboli so štirje, tako da je iskana verjetnost enaka

$$28 \cdot P(A_1) - 84 \cdot P(A_1 \cap A_2) \doteq 0{,}000112\,.$$

3. (20) Mečemo kovanec in čakamo, da bomo videli vsaj dva grba in vsaj dve številki. Privzamemo, da so meti neodvisni, verjetnost grba pa je $\frac{1}{2}$. Naj bo X potrebno število metov.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da v n-tem metu prvič vidimo dva grba za $n = 2, 3, \ldots$.

   Rešitev: naj bo Y slučajno število metov dokler prvič ne vidimo dveh grbov. Vemo, da je $Y \sim \mathrm{NegBin}(2, \frac{1}{2})$ in s tem iskana verjetnost

$$P(Y = n) = \frac{(n-1)}{2^n}$$

   za $n = 2, 3, \ldots$.

b. (10) Navedite $P(X = n)$ za $n = 4, 5, \ldots$.

   Rešitev: za $n \geq 4$ je dogodek $\{X = n\}$ enak disjunktni uniji dogodkov, da v n-tem metu prvič vidimo dva grba ali prvič vidimo dve številki. Sledi

$$P(X = n) = 2P(Y = n) = \frac{n-1}{2^{n-1}}\,.$$

4. (20) Naj ima slučajna spremenljivka X Weibullovo gostoto dano z

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}}$$

za $x > 0$ in 0 sicer, pri čemer $\alpha, \sigma > 0$.

a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke

$$Y = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^{\alpha}.$$

Rešitev: Opazimo, da je

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}}$$

za $x > 0$. Računamo za $y > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(\left(\frac{X}{\sigma}\right)^{\alpha} \leq y\right) \\ &= P\left(X \leq \sigma y^{1/\alpha}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{\sigma y^{1/\alpha}}{\sigma}\right)^{\alpha}} \\ &= 1 - e^{-y}. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$f_Y(y) = e^{-y}$$

za $y > 0$ in 0 sicer ali $Y \sim \exp(1)$.

b. (10) Naj bo $U \sim U(0,1)$. Pokažite, da ima slučajna spremenljivka

$$Z = \sigma\left(-\log U\right)^{1/\alpha}$$

za $\alpha, \sigma > 0$ Weibullovo gostoto.

Rešitev: Slučajna spremenljivka Z ima samo pozitivne vrednosti. Za $z > 0$ računamo

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(\sigma\left(-\log U\right)^{1/\alpha} \leq z\right) \\ &= P\left(-\log U \leq \left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha}\right) \\ &= P\left(\log U \geq -\left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha}\right) \\ &= P\left(U \geq e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha}}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\alpha}}. \end{aligned}$$

5. (20) Standardni kup 52 kart dobro premešamo in štirim igralcem razdelimo po 13 kart. Naj bo X_i število asov, ki jih ima i-ti igralec za $i = 1, 2, 3, 4$. Med 52 kartami so štirje asi.

a. (10) Poiščite porazdelitev vektorja (X_1, X_2).

Rešitev: možni nabori vrednosti slučajnega vektorja so $0 \leq k, l \leq 4, k+l \leq 4$. *Vse možnosti so brez omejitev, torej prvi igralec izbere 13 kart izmed 52 kart in drugi igralec izbere 13 kart izmed preostalih 39 kart. Ko preštevamo ugodne možnosti, si lahko predstavljamo, da prvi igralec najprej izbere k asov izmed 4 asov in nato še preostalih* $13 - k$ *kart izmed 48 kart. Drugi igralec izmed* $4 - k$ *preostalih asov izbere l asov in nato izbira še* $13 - l$ *kart izmed preostalih* $48 - 13 + k$ *kart. Sledi*

$$P\left(X_1 = k, X_2 = l\right) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{48}{13-k} \cdot \binom{4-k}{l} \cdot \binom{48-13+k}{13-l}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} \,.$$

b. (10) Poiščite porazdelitev vektorja (X_1, X_2, X_3, X_4).

Rešitev: možni nabori vrednosti slučajnega vektorja so četverice (k_1, k_2, k_3, k_4) *s* $k_i \geq 0$ *in* $\sum_{i=1}^{4} k_i = 4$. *Privzamemo lahko, da prvi igralec dobi prvih 13 kart, drugi drugih 13, ... Med vsemi 52! permutacijami moramo prešteti vse tiste, ki imajo med prvimi 13 kartami k_1 asov, med drugimi 13 k_2 asov, ... Izberimo najprej pozicije za ase. To lahko naredimo na*

$$\binom{13}{k_1}\binom{13}{k_2}\binom{13}{k_3}\binom{13}{k_4}$$

načinov. Ase lahko na te pozicije potaknemo na 4! načinov. Ostalih 48 kart je lahko poljubno premešanih, torej na 48! načinov. Sledi

$$P\left(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3, X_4 = k_4\right) = \frac{4! \cdot 48! \cdot \binom{13}{k_1} \cdot \binom{13}{k_2} \cdot \binom{13}{k_3} \cdot \binom{13}{k_4}}{52!} \,.$$

6. (20) Porazdelitev slučajne spremenljivke X naj bo dana z

$$P\left(X=n\right)=\frac{\beta^{a}\cdot a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!\cdot(1+\beta)^{a+n}}$$

za $n=0,1,2,\ldots$, kjer sta $a,\beta>0$. Za $n=0$ razumemo produkt $a(a+1)\cdots(a+n-1)$ kot 1.

a. (5) Preverite, da za $n\geq 1$ velja

$$nP(X=n)=\frac{(a+n-1)}{1+\beta}P(X=n-1)\,.$$

Rešitev: Enačbo preverimo z neposrednim računom.

b. (15) Izračunajte $E(X)$. Kot znano privzemite, da je $E(X)<\infty$.

Rešitev: Seštejemo leve in desne strani enačbe za $n=1,2,\ldots$. Dobimo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) \\
&= \frac{1}{1+\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(a+n-1)P(X=n-1) \\
&= \frac{1}{1+\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(X=n-1)+a\sum_{n=1}^{\infty}P(X=n-1)\right) \\
&= \frac{1}{1+\beta}\left(E(X)+a\right)\,.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da se verjetnosti v porazdelitvi seštejejo v 1. Linearno enačbo za $E(X)$ rešimo in sledi

$$E(X)=\frac{a}{\beta}\,.$$