Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

2. kolokvij

4. junij 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			●	●	
2.			●	●	
3.			●	●	
4.			●	●	
5.			●	●	
6.			●	●	
Skupaj					

1. (20) Iz posode, v kateri je sprva B belih in R rdečih kroglic, na slepo in brez vračanja vlečemo kroglice, dokler prvič ne izvlečemo rdeče. Naj bo X število izvlečenih belih kroglic.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: uporabite indikatorje.

Rešitev: oštevilčimo bele kroglice s $k = 1, 2, \ldots, B$ in si zamislimo, da vlečemo še naprej, dokler ne izvlečemo vseh kroglic. Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če je } k\textit{-a bela kroglica izvlečena pred prvo rdečo} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Velja

$$X = \sum_{k=1}^{B} I_k \,.$$

Zaradi simetrije imajo vsi indikatorji isto pričakovano vrednost, ki je enaka $P(I_1 = 1)$. Za dogodek, da je $I_1 = 1$, pa so pomembni le medsebojni položaji k-te bele in R rdečih kroglc pri vlečenju. Ker so vse permutacije enako verjetne, je

$$P(I_1 = 1) = \frac{1}{R+1} \,.$$

Sledi

$$E(X) = \frac{B}{R+1} \,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(X)$.

Rešitev: uporabimo indikatorje iz rešitve prve točke. Najprej izračunamo

$$\operatorname{var}(I_k) = \frac{R}{(R+1)^2}$$

za vse k. Tudi kovariance $\operatorname{cov}(I_k, I_l)$ so zaradi simetrije za vse $k \neq l$ enake. Verjetnost $P(I_k = 1, I_l = 1)$ izračunamo s pomočjo medsebojnih položajev k-te in l-te bele kroglice ter R rdečih kroglic pri vlečenju. Verjetnost, da sta beli kroglici pred vsemi rdečimi, je

$$E(I_k I_l) = P(I_k = 1, I_l = 1) = 2 \cdot \frac{1}{R+1} \cdot \frac{1}{R+2} \,,$$

od koder sledi

$$\operatorname{cov}(I_k, I_l) = \frac{2}{(R+1)(R+2)} - \frac{1}{(R+1)^2} \,,$$

kar se poenostavi v

$$\operatorname{cov}(I_k, I_l) = \frac{R}{(R+1)^2(R+2)} .$$

Iz formule za varianco vsote sledi

$$\operatorname{var}(X) = B \cdot \frac{R}{(R+1)^2} + B(B-1) \cdot \frac{R}{(R+1)^2(R+2)} ,$$

kar se poenostavi v

$$\operatorname{var}(X) = \frac{BR(B+R+1)}{(R+1)^2(R+2)} .$$

2. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko $\mathrm{Geom}(p)$, tj.

$$P(X_1 = r) = pq^{r-1}\,; \quad r = 1, 2, \ldots\,,$$

kjer je $q = 1 - p$. Označimo $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

a. (10) Za vse $1 \le k \le n$ izračunajte $P(S_k = n)$.

Rešitev: ker so vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih geometrijsko z istim parametrom, porazdeljene negativno binomsko, je $S_k \sim \mathrm{NegBin}(k, p)$, *torej*

$$P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}\,.$$

b. (10) Za vsak $n \ge 1$ izračunajte

$$f_n = P\left(S_k = n \text{ za neki } k = 1, 2, \ldots, n\right)\,.$$

Rešitev: pišimo

$$f_n = P\big(\cup_{k=1}^n \{S_k = n\}\big)$$

in opazimo, da so dogodki v uniji disjunktni. Torej je

$$f_n = \sum_{k=1}^n P(S_k = n)\,.$$

Z uporabo rezultata prve točke in binomske formule dobimo

$$f_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = p\,.$$

3. (20) Slučajni vektor (U, X, Y) naj bo porazdeljen zvezno z gostoto

$$f(u,x,y) = \frac{xy}{4\pi\sqrt{u^3(1-u)^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2u}}\, e^{-\frac{y^2}{2(1-u)}}$$

za $u \in (0,1)$ in $x, y > 0$; drugje naj bo gostota enaka nič. Definirajmo

$$W = \frac{X}{\sqrt{U}} \qquad \text{in} \qquad Z = \frac{Y}{\sqrt{1-U}}\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajnega vektorja (U, W, Z). So slučajne spremenljivke U, W in Z neodvisne?

Rešitev: definirajmo funkcijo

$$\Phi(u,x,y) = \left(u,\ \frac{x}{\sqrt{u}},\ \frac{y}{\sqrt{1-u}}\right)$$

in opazimo, da Φ preslika množico $(0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ bijektivno samo vase, inverz pa je enak

$$\Phi^{-1}(u,w,z) = \left(u,\ w\sqrt{u},\ z\sqrt{1-u}\,\right),$$

od koder sledi $J_{\Phi^{-1}}(u,w,z) = \sqrt{u(1-u)}$. Transformacijska formula nam da

$$f_{U,W,Z}(u,w,z) = \frac{\sqrt{u(1-u)}\,wz}{4\pi\sqrt{u^3(1-u)^3}}\, e^{-\frac{w^2}{2}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sqrt{u(1-u)}\,,$$

kar se poenostavi v

$$f_{U,W,Z}(u,w,z) = \frac{wz}{4\pi\sqrt{u(1-u)}}\, e^{-\frac{w^2}{2}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

Iz tega razberemo, da so U, W in Z neodvisne.

b. (10) Izračunajte gostoto slučajnega vektorja $(U, Y) = \left(U, Z\sqrt{1-U}\,\right)$ in slučajne spremenljivke Y.

Namig: pri računanju robne gostote uporabite novo spremenljivko

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} = v\,.$$

Rešitev: ker je $\int_0^\infty w\, e^{-w^2/2} dw = 1$, ima slučajni vektor (U, Z) gostoto

$$f_{U,Z}(u,z) = \frac{z}{4\pi\sqrt{u(1-u)}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

Iz transformacijske formule za preslikavo $\Phi(u,z) = \bigl(u, \sqrt{1-u}\cdot z\bigr)$ *dobimo*

$$f_{U,Y}(u,y) = f_{U,Z}\bigl(u, y/\sqrt{1-u}\,\bigr)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,.$$

Slednji enakosti se združita v

$$f_{U,Y}(u,y) = \frac{y}{4\pi\sqrt{u(1-u)^3}}\,e^{-\frac{y^2}{2(1-u)}}\,.$$

Gostota slučajne spremenljivke Y *je robna gostota, kar pomeni, da moramo zgornjo gostoto integrirati po* u. *Skladno z namigom uvedemo novo spremenljivko*

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} = v$$

in dobimo

$$\frac{du}{2\sqrt{u(1-u)^3}} = dv \qquad in \qquad \frac{1}{1-u} = 1 + v^2\,.$$

Končno je

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{y}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2(1+v^2)}{2}}\,dv \\ &= \frac{y}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2v^2}{2}}\,dv \\ &= \frac{y}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\frac{1}{2y} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,, \end{aligned}$$

seveda za $y > 0$; *drugje je gostota enaka nič.*

4. (20) V zaporedju neodvisnih metov poštenega kovanca naj bo X število metov do prve pojavitve vzorca GG, Y pa naj bo število metov do druge pojavitve tega vzorca. Primera:

GŠŠGGŠŠŠGŠGG	$X = 5, \quad Y = 12$
GŠŠGŠŠGŠŠGGG	$X = 11, \quad Y = 12$

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: definirajmo dogodke $B_1 = \{\textit{prvi met je } \check{S}\}$, $B_2 = \{\textit{prva dva meta sta } G\check{S}\}$ *in* $B_3 = \{\textit{prva dva meta sta } GG\}$. *Velja*

$$E(X|B_1) = 1 + E(X)\,, \quad E(X|B_2) = 2 + E(X) \quad \textit{in} \quad E(X|B_3) = 2\,.$$

Formula za popolno pričakovano vrednost nam da

$$E(X) = \tfrac{1}{2}\big(1 + E(X)\big) + \tfrac{1}{4}\big(2 + E(X)\big) + \tfrac{1}{4} \cdot 2\,.$$

Rešimo linearno enačbo in dobimo $E(X) = 6$.

b. (10) Izračunajte $E(Y - X)$.

Rešitev: za $k = 2, 3, \ldots$ *definiramo*

$$B_k = \{X = k, (k+1)\textit{-ti met je } G\}$$

in

$$C_k = \{X = k, (k+1)\textit{-ti met je } \check{S}\}\,.$$

Velja

$$E(Y - X|B_k) = 1 \quad \textit{in} \quad E(Y - X|C_k) = 1 + E(X)\,.$$

Dogodki $B_2, B_3, \ldots, C_2, C_3, \ldots$ *tvorijo particijo in formula za popolno pričakovano vrednost nam da*

$$E(Y - X) = \sum_{k=2}^{\infty} P(B_k) + \sum_{k=2}^{\infty} \big(1 + E(X)\big) P(C_k)\,.$$

Ker je $P(B_k) = P(C_k)$ *in ker ti dogodki tvorijo particijo, je* $\sum_{k=2}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=2}^{\infty} P(C_k) = \frac{1}{2}$. *Sledi*

$$E(Y - X) = 1 + \tfrac{1}{2} E(X) = 4\,.$$

5. (20) Naj bosta X in Y nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki z isto porazdelitvijo. Za $k \geq 1$ naj velja

$$P(X = k) = \frac{1}{4} P(X + Y = k - 1) .$$

Naj bo G rodovna funkcija spremenljivk X in Y.

a. (10) Poiščite enačbo, ki ji zadošča ta rodovna funkcija..

Rešitev: pomnožimo obe strani dane zveze z s^k in seštejmo po $k \geq 1$. Če označimo $P(X = 0) = p$, velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) s^k = G_X(s) - p$$

in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} P(X + Y = k - 1) s^k = \frac{s}{4} G_{X+Y}(s) .$$

Ker imata X in Y isto porazdelitev, velja $G_{X+Y}(s) = G(s)^2$. Iskana enačba je

$$G(s) - p = \frac{s}{4} G(s)^2 .$$

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Namig: upoštevajte, da je $G(1) = 1$, in uporabite Newtonov razvoj:

$$\sqrt{1 - x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k ; \quad |x| < 1 .$$

Rešitev: ker je $G(1) = 1$, nam enačba iz prve točke da

$$1 - p = \frac{1}{4} ,$$

torej $p = \frac{3}{4}$. Zdaj pa to vstavimo v zvezo in jo rešimo:

$$G(s) = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3s}{4}}\right)}{s} .$$

Ker morajo biti koeficienti v razvoju nenegativni in ker je $(-1)^k\binom{1/2}{k} < 0$ *za vse* $k = 1, 2, 3, \ldots$, *je pravilna izbira negativni predznak korena. Razvoj v potenčno vrsto nam tako da*

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\binom{1/2}{k}(-1)^{k-1}\frac{3^k s^{k-1}}{4^k}$$

in končno

$$P(X = k) = 2\binom{1/2}{k+1}(-1)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}.$$

6. (20) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p = 0{,}00198079$.

a. (10) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več.

Rešitev: Po centralnem limitnem izreku s popravkom za zveznost je

$$P(S_n \geq 920) = P(S_n \geq 919{,}5) = P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(S_n)}} \geq \frac{919{,}5 - E(S_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(S_n)}}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{919{,}5 - E(S_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(S_n)}}\right),$$

kjer je $Z \sim N(0,1)$. Označimo $q = 1 - p$ ter izračunamo $E(S_n) = np = 871{,}55$ in $\sqrt{\operatorname{var}(S_n)} = \sqrt{npq} = 29{,}49$. Izračunamo

$$\frac{919{,}5 - E(S_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(S_n)}} \doteq \frac{919{,}5 - 871{,}55}{29{,}49} \doteq 1{,}63$$

in iz tabele razberemo, da je iskana verjetnost približno

$$P(S_n \geq 920) \approx 0{,}052\,.$$

Opomba. S pomočjo točnih binomskih verjetnosti lahko dobimo natančnejši rezultat. V okviru prikazane natančnosti je to $P(S_n \geq 920) \doteq 0{,}5295$.

b. (10) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. To pomeni, da, če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Približno izračunajte najvišjo možno vrednost x, pri kateri ima igralnica po 440.000 igrah izgubo z verjetnostjo največ 0,01.

Rešitev: Hiša v vsaki igri bodisi pridobi 1 enoto ali izgubi x enot. Dobiček hiše, ki je lahko v primeru izgube tudi negativen, je vsota 440.000 med sabo neodvisnih slučajnih spremenljivk, torej $W_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, pri čemer je $P(Y_i = 1) = q$ in $P(Y_i = -x) = p$. Mejna vrednost je x, za katerega je približno

$$P(W_n < 0) = 0{,}01\,.$$

Izračunamo $E(X_i) = q - px$, $\operatorname{var}(X_i) = pq(x+1)^2$ *in* $\operatorname{var}(W_n) = npq(x+1)^2$. *Sledi*

$$
\begin{aligned}
P(W_n < 0) &= P\left(\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(W_n)}} < -\frac{E(W_n)}{\sqrt{\operatorname{var}(W_n)}}\right) \\
&= P\left(Z < -\frac{(q-px)\sqrt{n}}{(x+1)\sqrt{pq}}\right) \\
&\approx 0{,}01\,.
\end{aligned}
$$

Iz tabele normalne porazdelitve dobimo

$$
-\frac{(q-px)\sqrt{n}}{(x+1)\sqrt{pq}} \approx -2{,}33\,.
$$

Rešimo na x *in dobimo*

$$
x \approx \frac{q\sqrt{n} - 2{,}33\sqrt{pq}}{p\sqrt{n} + 2{,}33\sqrt{pq}} \doteq 466{,}95\,.
$$

Opomba. Spet lahko s pomočjo eksaktnih binomskih verjetnosti dobimo natančnejši rezultat. Z oznakami iz prejšnje točke je namreč dobiček igralnice enak $-S_n x + (n - S_n)$, *torej ima igralnica izgubo natanko tedaj, ko je* $S_n > \frac{n}{x+1}$. *Iz eksaktnih binomskih verjetnosti sledi, da je* $P(S_n > 940) > 0{,}01$ *in* $P(S_n > 941) < 0{,}01$. *Torej je* $P(S_n > y) \le 0{,}01$ *natanko tedaj, ko je* $y \ge 941$. *Maksimalni možni* x *je torej*

$$
x = \frac{n}{941} - 1 \doteq 466{,}5877\,.
$$