Ime in priimek: ______________________ Vpsna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

2. kolokvij

1. junij 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Iz posode, v kateri je n belih označenih kroglic z oznakami od 1 do n in b modrih kroglic, na slepo in z vračanjem vlečemo kroglice, dokler prvič ne izvlečemo modre. Takrat se ustavimo. Naj bo X število različnih oznak, ki smo jih izvlekli, N število vseh vlečenj, dokler ne dobimo prve modre kroglice (vključno z zadnjim, ko izvlečemo modro kroglico) in naj bo Y_k število pojavljanj oznake k za $k = 1, \ldots, n$.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Namig: indikatorji so ena od možnosti.

Rešitev: Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1\,, & \text{če vidimo kroglico z oznako } k; \\ 0\,, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja

$$X = \sum_{k=1}^{n} I_k\,.$$

Zaradi simetrije imajo vsi indikatorji isto pričakovano vrednost, ki je enaka $P(I_1 = 1)$. *Verjetnost, da bo izvlečena kroglica z oznako* 1 *izvlečena pred prvo modro kroglico, je zaradi simetrije*

$$P(I_1 = 1) = \frac{1}{b+1}\,.$$

Sledi

$$E(X) = \frac{n}{b+1}\,.$$

b. (10) Za $k = 1, 2, \ldots, n$ izračunajte $E(Y_k)$.

Namig: kaj je vsota $Y_1 + \ldots + Y_n$*?*

Rešitev: Velja $Y_1 + \ldots + Y_n = N - 1$. *Zaradi simetrije so vse vrednosti* $E(Y_k)$ *enake. Slučajna spremenljivka* N *je porazdeljena geometrijsko s parametrom* $p = \frac{b}{b+n}$, *zato*

$$E(N) = \frac{1}{p} = 1 + \frac{b}{n}.$$

Sledi

$$nE(Y_k) = E(N) - 1 = \frac{b}{n}$$

in končno

$$E(Y_k) = \frac{b}{n^2}$$

za $k = 1, \ldots, n$.

2. (20) Naj bo porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y dana z

$$P(X=k, Y=l) = \binom{2k}{k} \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)_l}{4^k \cdot 3^{k+l+\frac{1}{2}} \cdot l!} = \frac{[2(k+l)]!}{4^{k+l} \cdot 3^{k+l+\frac{1}{2}} \cdot (k+l)! \cdot k! \cdot l!}$$

za $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, kjer je

$$(a)_l = \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)}$$

Pochammerjev simbol.

a. (10) Poiščite porazdelitev vsote $Z = X + Y$.

Rešitev: možne vrednosti za Z so $n = 0, 1, 2, \ldots$. Računamo

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) \\ &= \frac{(2n)!}{4^n \cdot 3^{n+\frac{1}{2}} \cdot n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n \cdot 3^{n+\frac{1}{2}} \cdot n! \cdot n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n \cdot 3^{n+\frac{1}{2}} \cdot n! \cdot n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n \cdot 3^{n+\frac{1}{2}} \cdot n! \cdot n!} \cdot 2^n \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{2^n \cdot 3^{n+\frac{1}{2}}} . \end{aligned}$$

b. (10) Poiščite porazdelitev X.

Namig: spomnite se, da Newtonova formula da

$$(1-x)^{-a} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l}{l!} .$$

Rešitev: uporabimo formulo za računanje robnih porazdelitev in dobimo

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(X=k, Y=l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k \cdot 3^{k+l+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)_l}{l!} \\
&= \frac{\binom{2k}{k}}{4^k \cdot 3^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)_l}{l! \cdot 3^k} \\
&= \frac{\binom{2k}{k}}{4^k \cdot 3^{k+\frac{1}{2}}} \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-k-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\binom{2k}{k}}{\sqrt{2} \cdot 8^k} \,.
\end{aligned}$$

3. (20) Naj bosta Y in W neodvisni slučajni spremenljivki in naj velja $Y \sim \exp(1)$ in $W \sim \mathrm{N}(0,1)$. Naj bo

$$X = \theta Y + \sigma\sqrt{Y}W\,,$$

kjer sta $\theta > 0$ in $\sigma > 0$ dani konstanti.

a. (10) Poiščite gostoto (Y, X).

Rešitev: naj bo

$$\Phi(y,w) = (y, \theta y + \sigma\sqrt{y}w)\ .$$

Preslikava je bijektivna na odprti množici $U = \{(y,w) \colon y > 0\}$ *in preslika* U *samo nase. Računamo*

$$\Phi^{-1}(y,x) = \left(y, \frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)\ .$$

Vse predpostavke za uporabo transformacijske formule so izpolnjene, zato računamo

$$J_{\Phi^{-1}}(y,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\,.$$

Sledi

$$f_{Y,X}(y,x) = f_{Y,W}\left(y, \frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right) \cdot J_{\Phi^{-1}}(y,x)\,.$$

Zaradi neodvisnosti velja $f_{Y,W}(y,w) = f_Y(y) f_W(w)$, *torej imamo za* $(y,x) \in U$

$$f_{Y,X}(y,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-y - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta y}{\sigma\sqrt{y}}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{y}}\,,$$

in $f_{Y,X}(y,x) = 0$ *sicer.*

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X. Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay-\frac{b}{y}}}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Rešitev: gostota slučajne spremenljivke X je robna porazdelitev$f_{Y,X}(y,x)$. Računamo

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f_{Y,X}(x,y)\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\,\exp\left(-y - \frac{x^2}{2\sigma^2 y} + \frac{\theta x}{\sigma^2} - \frac{\theta^2 y}{2\sigma^2}\right)\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\theta x/\sigma^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 y} - \frac{(\theta^2+2\sigma^2)y}{2\sigma^2}\right)\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\theta x/\sigma^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\theta^2+2\sigma^2}{2\sigma^2}}}\exp\left(-2\sqrt{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{\theta^2+2\sigma^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\theta^2+2\sigma^2}}\,e^{-(|x|\sqrt{\theta^2+2\sigma^2}-\theta x)/\sigma^2}\,.
\end{aligned}$$

4. (20) V kupu $a + b$ kart je a belih in b rdečih. Karte premešamo, tako da je vsaka permutacija enako verjetna, nakar jih z vrha polagamo na mizo. Naj bo X število belih kart pred prvo rdečo, Y pa število belih kart za zadnjo rdečo.

a. (10) Bele karte oštevilčimo s $k = 1, 2, \ldots a$ in definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta bela karta pred prvo rdečo;} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

in

$$J_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta bela karta za zadnjo rdečo;} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

Utemeljite, da je $X = \sum_{k=1}^{a} I_k$ in $Y = \sum_{l=1}^{a} J_l$. Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Rešitev: Če gledamo samo prvo belo karto in rdeče karte, so te naključno permutirane. Verjetnost, da je prva bela karta pred vsemi rdečimi, je tako

$$P(I_1 = 1) = \frac{1}{b+1}\,.$$

Zaradi simetrije velja isto za J_1. Nadalje je

$$P(I_1 = 1, J_1 = 1) = 0 \quad \textit{in} \quad P(I_1 = 1, J_2 = 1) = \frac{1}{(b+1)(b+2)}\,.$$

Nadaljujemo lahko na vsaj dva načina.

Prvi način: *izračunamo*

$$E(X) = E(Y) = \frac{a}{b+1} \quad \textit{in} \quad E(XY) = \frac{a(a-1)}{(b+1)(b+2)}\,,$$

in sledi

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)\,E(Y) \\ &= \frac{a(a-1)}{(b+1)(b+2)} - \frac{a^2}{(b+1)^2} \\ &= -\frac{a(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}\,. \end{aligned}$$

Drugi način: *upoštevamo bilinearnost kovariance in simetrijo. Tako velja*

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{k,l=1}^{a} \mathrm{cov}(I_k, J_l)\,.$$

Zaradi simetrije so za $k \neq l$ vse kovariance enake, prav tako so enake vse kovariance, ko je $k = l$. Sledi

$$\operatorname{cov}(X,Y) = a\operatorname{cov}(I_1,J_1) + a(a-1)\operatorname{cov}(I_1,J_2)\,.$$

Ker je $I_1 J_1 = 0$, je

$$\operatorname{cov}(I_1,J_1) = -\frac{1}{(1+b)^2}\,.$$

Nadalje je

$$\operatorname{cov}(I_1,J_2) = \frac{1}{(b+1)(b+2)} - \frac{1}{(b+1)^2} = -\frac{1}{(b+1)^2(b+2)}\,.$$

Dobimo

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{a}{(b+1)^2} - \frac{a(a-1)}{(b+1)^2(b+2)} = -\frac{a(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}\,,$$

kar je isto kot prej.

b. (10) Privzemite, da je $b \geq 2$ in je Z število belih kart med prvo in drugo rdečo karto. Za $l \leq a$ izračunajte

$$\operatorname{cov}(X,Y \mid Z = l)\,.$$

Namig: pomislite na pogojno porazdelitev, preden greste računat.

Rešitev: mislimo si lahko, da iz kupa odstranimo bele karte med prvo in drugo rdečo karto, z drugo rdečo karto vred. Ostane $a-l$ belih in $b-1$ rdečih kart in vsaka izvirna razporeditev, pri kateri je $Z = l$, ustreza natanko eni razporeditvi $a-l$ belih in $b-1$ rdečih kart. Torej morajo biti tudi te razporeditve naključno permutirane. Iz prvega dela naloge tako razberemo

$$\operatorname{cov}(X,Y \mid Z = l) = -\frac{(a-l)(a+b-l)}{b^2(b+1)}\,.$$

5. (20) Iz posode, v kateri so kroglice z oznakami 0, 1 in 2, te kroglice na slepo vlečemo in jih vanjo spet vračamo. Število izvlečenih kroglic ima Poissonovo porazdelitev Pois(3). Privzamemo, da so posamezna vlečenja neodvisna tako med seboj kot tudi od števila izvlečenih kroglic in da je vsaka kroglica izvlečena z verjetnostjo 1/3. Označimo z Z vsoto oznak, ki se pojavijo pri posameznih vlečenjih.

a. (10) Izračunajte $P(Z = 1)$.

Rešitev: pišemo lahko $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, kjer je X_i oznaka i-te izvlečene kroglice, N pa je število izvlečenih kroglic. Rodovna funkcija oznake pri posameznem vlečenju je

$$G(s) = \frac{1 + s + s^2}{3},$$

rodovna funkcija števila izvlečenih kroglic pa je:

$$H(s) = e^{3(s-1)}.$$

Rodovna funkcija vsote oznak je torej:

$$K(s) = H(G(s)) = e^{s^2+s-2}.$$

Iz

$$K'(s) = (2s + 1)\, e^{s^2+s-2}$$

dobimo

$$P(Z = 1) = K'(0) = e^{-2} \doteq 0{,}135.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(Z)$.

Rešitev: Najprej izračunamo

$$E(Z) = K'(1) = 3,$$

iz

$$K''(s) = (4s^2 + 4s + 3)\, e^{s^2+s-2}$$

pa dobimo

$$E\big[Z(Z-1)\big] = K''(1) = 11$$

in končno

$$\mathrm{var}(Z) = E(Z^2) - \big(E(Z)\big)^2 = E\big[Z(Z-1)\big] + E(Z) - \big(E(Z)\big)^2 = 5.$$

6. (20) Ponujena vam je naslednja igra na srečo: iz škatle, v kateri je veliko število listkov s števili, lahko naključno izberete 1000 listkov z vračanjem. Če je vsota izbranih števil med vključno a in $a + 100$, dobite stavo, sicer jo izgubite. Število a si lahko še izberete. O škatli veste le to, da je povprečje 0,1 in standardni odklon 1,5811.

a. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da boste stavo dobili, če si izberete $a = 0$? Stavo torej dobite, če je vsota med vključno 0 in 100. Upoštevajte, da je $\Phi(-2) = 0,0228$.

Rešitev: Uporabimo centralni limitni izrek. Označimo vsoto s S_{1000}. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned} P(0 \leq S_n \leq 100) &= P(-100 \leq S_{1000} - 100 \leq 0) \\ &= P(-\frac{100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq 0) \\ &\approx P(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= 0,48\,. \end{aligned}$$

b. (10) Katera izbira za a je za vas najugodnejša?

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned} P(a \leq S_n \leq a + 100) &= P(a - 100 \leq S_{1000} - 100 \leq a) \\ &= P(\frac{a - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{a}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811}) \\ &\approx P(\frac{a - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq Z \leq \frac{a}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811}) \\ &= 0,48\,. \end{aligned}$$

Zadnja verjetnost je integral standardno normalne slučajne gostote na intervalu dolžine $100/(\sqrt{1000} \cdot 1,5811) = 2$. *Ta integral bo največji, če bo simetričen okrog ničle, kar pomeni*

$$\frac{a}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} = 1.$$

V tem primeru je verjetnost zmage okrog $0,68$ *in je* $a \approx 50$.