Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

Računski izpit

30. avgust 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Total					

1. (20) Na 8 mest, ki so razporejena v krogu, neodvisno posadimo ničle in enice, tako da je na vsakem mestu ničla z verjetnostjo 1/2 in enica z verjetnostjo 1/2.

a. (15) Kolikšna je verjetnost, da ne bomo dobili nobenega zaporedja (vsaj) petih ničel?

Namig: načelo vključitev in izključitev.

Rešitev: Prvi način. *Označimo z X maksimalno število zaporednih ničel. Iskana verjetnost je enaka*

$$P(X < 5) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6) - P(X = 7) - P(X = 8)\,.$$

Vseh izidov, tj. razporeditev ničel in enic, je $2^8 = 256$. Dogodek $\{X = 8\}$ sestavlja en sam izid (same ničle). Dogodek $\{X = 7\}$ pomeni sedem ničel in eno enico, kar se zgodi pri 8 izidih. Dogodek $\{X = 6\}$ pomeni šest zaporednih ničel in dve zaporedni enici, kar se prav tako zgodi pri 8 izidih. Dogodek $\{X = 5\}$ pa pomeni pet zaporednih ničel, okoli njih na obeh straneh enica, na preostalem prostoru med enicama pa kar koli. To se zgodi pri 16 izidih. Iskana verjetnost je torej enaka

$$P(X < 5) = 1 - \frac{1 + 8 + 8 + 16}{256} = \frac{223}{256} = 0{,}8710938\,.$$

Drugi način. *Naj bo A dogodek, da smo dobili zaporedje (vsaj) petih ničel. Velja*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8\,,$$

kjer smo oštevilčili zaporedne peterice mest, A_i pa je dogodek, da so v i-ti peterici same ničle. Po načelu vključitev in izključitev je iskana verjetnost enaka

$$P(A^c) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7 + p_8\,,$$

kjer je p_k vsota verjetnosti vseh možnih presekov k različnih dogodkov A_i (vseh možnih naborov je torej $\binom{8}{k}$). Izračunajmo sedaj vrednosti p_k za vsak k posebej.

- *Ker za vsak i velja $P(A_i) = 2^{-5}$, je očitno $p_1 = 8 \cdot 2^{-5} = 1/4$.*
- *Če sta i-ta in j-ta peterica sosednji, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-6}$; takih neurejenih parov je 8. Če sta zamaknjeni za dve mesti, je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-7}$; takih neurejenih parov je spet 8. Sicer pa je $P(A_i \cap A_j) = 2^{-8}$; takih neurejenih parov je $\binom{8}{2} - 8 - 8 = 12$. Sledi $p_2 = 8 \cdot 2^{-6} + 8 \cdot 2^{-7} + 12 \cdot 2^{-8} = 15/64$.*
- *Če so i-ta, j-ta in k-ta peterica zaporedne, je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-7}$; takih neurejenih trojic je 8. Sicer je $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^{-8}$; takih neurejenih trojic je $\binom{8}{3} - 8 = 48$. Sledi $p_3 = 8 \cdot 2^{-7} + 48 \cdot 2^{-8} = 1/4$.*
- *Brž ko vzamemo nabor več kot treh peteric, le-te pokrijejo vsa mesta, torej je verjetnost ustreznega preseka enaka $2^{-8} = 1/256$. Za $k = 3, 4, \ldots, 8$ torej velja $p_k = \binom{8}{k}/256$.*

Torej je končno

$$P(A^c) = 1 - 4 + \frac{15}{64} - \frac{1}{4} + \frac{70 - 56 + 28 - 8 + 1}{256} = \frac{223}{256} = 0{,}8710938\,.$$

b. (5) Recimo, da nismo dobili nobenega zaporedja (vsaj) petih ničel. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bomo dobili zaporedje (vsaj) petih enic?

Rešitev: Izračunati je potrebno $P(B|A^c)$, kjer je A dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih ničel, B dogodek, da dobimo zaporedje (vsaj) petih enic. Toda če se zgodi B, se A zagotovo ne zgodi, zato je

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{33}{223} \doteq 0{,}148\,.$$

2. (20) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, za kateri privzamemo $X \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$,

$$P(Y = k+1 | X = k) = \frac{n-k}{n}$$

in

$$P(Y = k-1 | X = k) = \frac{k}{n}$$

za vse $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ter $P(Y = l | X = k) = 0$ za $|k - l| > 1$.

a. (10) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Rešitev: iz formule za popolno verjetnost dobimo

$$\begin{aligned} P(Y = l) &= P(X = l+1)\, P(Y = l | X = l+1) \\ &\qquad + P(X = l-1)\, P(Y = l | X = l-1) \\ &= P(X = l+1) \cdot \frac{l+1}{n} + P(X = l-1) \cdot \frac{n-l+1}{n} \\ &= \binom{n}{l+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{l+1}{n} + \binom{n}{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n-l+1}{n} \\ &= \binom{n-1}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n-1}{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Uporabili smo Pascalovo identiteto. Račun je pravilen za vse $l \in \mathbb{Z}$, če $\binom{n}{m}$ za $m > n$ in $m < 0$ interpretiramo kot 0. Torej je tudi $Y \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Rešitev: velja $E(X) = E(Y) = n/2$. Za kovarianco potrebujemo še $E(XY)$. Velja

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=0}^{n} \Big(k(k+1)\, P(X = k, Y = k+1) \\ &\qquad + k(k-1)\, P(X = k, Y = k-1) \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(k(k+1)\, P(X = k)\, \frac{n-k}{n} + k(k-1)\, P(X = k)\, \frac{k}{n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, P(X = k) \cdot \big((k+1)(n-k) + (k-1)k \big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, P(X = k) \cdot \big((n-2)k - n \big) \\ &= \frac{1}{n} \big((n-2)\, E(X^2) - n\, E(X) \big) . \end{aligned}$$

Iz $\operatorname{var}(X) = n/4$ *dobimo* $E(X^2) = (n^2 + n)/4$*, torej je*

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{1}{n}\left((n-2)\,\frac{n^2+n}{4} - n\,\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{n^2 - 3n - 2}{4}\,, \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{3n}{4} - \frac{1}{2}\,.$$

3. (20) Naj bodo X, Y in Z neodvisne standardne normalne slučajne spremenljivke.

a. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $W = \sqrt{(X-Y)^2 + 2Z^2}$.

Namig: za slučajno spremenljivko T, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, velja

$$T^2 \sim \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Rešitev: razlika $X - Y$ je neodvisna od $Z\sqrt{2}$. Obe slučajni spremenljivki sta porazdeljeni normalno $\mathrm{N}(0, 2)$, torej sta njuna kvadrata neodvisna in imata porazdelitev $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Vsota pa ima porazdelitev $\Gamma\left(1, \frac{1}{4}\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\right)$. Sledi

$$P(W \ge w) = P\left(W^2 \ge w^2\right) = e^{-\frac{w^2}{4}}$$

in končno

$$f_W(w) = \frac{w}{2}\, e^{-\frac{w^2}{4}}$$

za $w > 0$; drugje je gostota enaka nič.

b. (5) Pokažite, da so $X + Y$, $X - Y$ in Z neodvisne.

Rešitev: dovolj je dokazati neodvisnost slučajnih spremenljivk $X + Y$ in $X - Y$. Ti dve pa imata po transformacijski formuli skupno gostoto oblike

$$c \cdot \exp\left(\frac{-(x+y)^2}{8} - \frac{(x-y)^2}{8}\right).$$

V razvoju eksponenta se mešana člena odštejeta, zato je gostota produkt izraza, odvisnega le od x, in izraza, odvisnega le od y. Neodvisnost sledi.

c. (5) Naj bo

$$U = \frac{X + Y + \sqrt{(X-Y)^2 + 2Z^2}}{2} \quad \text{in} \quad V = \frac{X + Y - \sqrt{(X-Y)^2 + 2Z^2}}{2}.$$

Izračunajte gostoto slučajnega vektorja (U, V). Pri tem eksplicitno navedite, kje je gostota različna od nič.

Rešitev: uporabimo transformacijsko formulo. Slučajna spremenljivka $X + Y \sim \mathrm{N}(0, 2)$ ima zalogo vrednosti na celi realni osi, slučajna spremenljivka W pa le na $(0, \infty)$. Preslikava $\Phi(t, w) := \left(\frac{t+w}{2}, \frac{t-w}{2}\right)$ množico $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ bijektivno preslika na množico $\{(u, v); u > v\}$. Tam bo torej gostota slučajnega vektorja (U, V) različna od nič. Velja $\Phi^{-1}(u, v) = (u + v, u - v)$ in $J_{\Phi^{-1}} = 2$. Ker je $X + Y$ neodvisna od W, po transformacijski formuli za $u > v$ velja

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X+Y}(u+v) \cdot f_W(u-v) \cdot 2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{(u+v)^2}{4}} \cdot \frac{(u-v)}{2}\, e^{-\frac{(u-v)^2}{4}}, \end{aligned}$$

kar se poenostavi

$$\frac{u-v}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}.$$

4. (20) Naj bodo $X_1, \ldots, X_r$ neodvisne slučajne spremenljivke in naj bo $X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda_k)$ za $k = 1, 2, \ldots, r$. Označimo $S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$.

a. (10) Izračunajte $E(X_k^2 | S_r = n)$.

Rešitev: Označimo

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r \quad \textit{in} \quad p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r} \, .$$

Vemo, da sta slučajni spremenljivki $X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda_k)$ *in* $S_r - X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda - \lambda_k)$ *neodvisni. Za* $0 \le i \le n$ *torej velja*

$$P(X_k = i | S_r = n) = \frac{P(X_k = i, S_r - X_k = n - i)}{P(S_r = n)} = \binom{n}{i} p_k^i (1 - p_k)^{n-i} \, ,$$

kar pomeni, da je slučajna spremenljivka X_k *pogojno na* $\{S_r = n\}$ *porazdeljena binomsko* $\mathrm{Bin}(n, p_k)$. *Torej velja*

$$E(X_k^2 | S_r = n) = np_k(1 - p_k) + n^2 p_k^2 = np_k + (n^2 - n) p_k^2 \, .$$

b. (10) Za $k \neq l$ izračunajte $E(X_k X_l | S_r = n)$.

Namig: oglejte si $E\big((X_k + X_l)^2 \big| S_r = n\big)$.

Rešitev: slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_r$ *izvzemši* X_k *in* X_l *ter vsota* $X_k + X_l$ *so neodvisne Poissonove slučajne spremenljivke z vsoto* S_r. *Iz prvega dela dobimo*

$$E\big[(X_k + X_l)^2 \big| S_r = n\big] = n(p_k + p_l) + (n^2 - n)(p_k + p_l)^2 \, .$$

Po drugi strani pa je zaradi linearnosti pogojne pričakovane vrednosti zgornji izraz enak

$$E(X_k^2 | S_r = n) + 2E(X_k X_l | S_r = n) + E(X_l^2 | S_r = n) \, .$$

Ko odštejemo zunanji pogojni pričakovani vrednosti, ki ju poznamo iz prejšnje točke, dobimo

$$E(X_k X_l | S_r = n) = (n^2 - n) p_k p_l \, .$$

5. (20) Naj bodo $N, X_1, X_2, \ldots$ neodvisne nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke. Privzemimo, da so $X_1, X_2, \ldots$ enako porazdeljene. Označimo $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

a. (10) Je možno, da je $X_1 \sim \mathrm{Bernoulli}(p_1)$ in $X \sim \mathrm{Geom}(p_2)$ s $p_1, p_2 \in (0,1)$? Utemeljite.

Rešitev: veljalo bi

$$G_X(s) = G_N(G_1(s))\,,$$

kar bi v zgornjem primeru pomenilo

$$G_N(q_1 + p_1 s) = \frac{p_2 s}{1 - q_2 s}\,,$$

kjer je $q_1 = 1 - p_1$ in $q_2 = 1 - p_2$. Iz tega sledi, da je

$$G_N(u) = \frac{p_2\left(\frac{u - q_1}{p_1}\right)}{1 - q_2\left(\frac{u - q_1}{p_1}\right)}\,.$$

To pa bi pomenilo

$$P(N = 0) = G_N(0) = -\frac{p_2 q_1}{p_1 + q_1 q_2} < 0\,,$$

torej ni nobene slučajne spremenljivke N, ki bi zadoščala danim pogojem.

b. (10) Poiščite potreben in zadosten pogoj za p_1 in p_2, pod katerim je možno, da je $X_1 \sim \mathrm{Bernoulli}(p_1)$ in $X \sim \mathrm{Bin}(m, p_2)$ za neko slučajno spremenljivko N, neodvisno od $X_1, X_2, \ldots$ Če je ta pogoj izpolnjen, poiščite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

Rešitev: veljalo bi

$$G_N(q_1 + p_1 s) = (q_2 + p_2 s)^m$$

oziroma

$$G_N(u) = \left(q_2 + \frac{p_2(u - q_1)}{p_1}\right)^m\,,$$

kar preuredimo v

$$G_N(u) = \left(q_2 - \frac{p_2 q_1}{p_1} + \frac{p_2}{p_1}\,u\right)^m = \left(1 - \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_2}{p_1}\,u\right)^m\,.$$

Z razvojem desne strani po binomski formuli dobimo, da je G_N rodovna funkcija natanko tedaj, ko je $p_2 \le p_1$. V tem primeru je $N \sim \mathrm{Bin}(m, p_2/p_1)$.

6. (20) Srečko igra igro, v kateri z verjetnostjo 50% izgubi 1 evro, z verjetnostjo 5% dobi 9 evrov, z verjetnostjo 45% pa je na ničli. Igro odigra 500-krat, pri čemer so vse igre med seboj neodvisne.

a. (10) Čim natančneje izračunajte verjetnost, da ima Srečko po seriji 500 iger v denarnici vsaj 50 evrov več kot na začetku.

Rešitev: Če je X_i Srečkov dobiček v i-ti igri, je razlika med Srečkovim stanjem v denarnici na koncu in na začetku enaka S_{500}, kjer je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. To je vsota dovolj neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, da lahko pri predpisani natančnosti uporabimo centralni limitni izrek. Velja:

$$\begin{aligned} E(X_i) &= -0{,}05\,, & E(S_{500}) &= -500 \cdot 0{,}05 = -25\,, \\ \operatorname{var}(X_i) &= 4{,}5475\,, & \operatorname{var}(S_{500}) &= 500 \cdot 4{,}5475 = 2273{,}75\,, \end{aligned}$$

torej je

$$P(S_{500} \ge 50) = P(S_{500} \ge 49{,}5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{49{,}5 + 25}{\sqrt{2273{,}75}}\right) \doteq 0{,}059\,.$$

Točen rezultat: 0,06354382.

b. (10) Recimo, da ima Srečko po seriji 500 iger v denarnici res vsaj 50 evrov več kot na začetku. Čim natančneje izračunajte pogojno verjetnost, da je v prvi igri dobil 9 evrov.

Rešitev: Iskana verjetnost je enaka

$$\begin{aligned} P(X_1 = 9 \mid S_{500} \ge 50) &= \frac{P(X_1 = 9, S_{500} \ge 50)}{P(S_{500} \ge 50)} \\ &= \frac{P(X_1 = 9)\, P(S_{500} \ge 50 \mid X_1 = 9)}{P(S_{500} > 50)} \\ &= \frac{P(X_1 = 9)\, P(S_{499} \ge 41)}{P(S_{500} > 50)}\,. \end{aligned}$$

Podobno kot prej izračunamo:

$$E(S_{499}) = -499 \cdot 0{,}05 = -24{,}95\,, \quad \operatorname{var}(S_{499}) = 499 \cdot 4{,}5475 = 2269{,}2025$$

in

$$P(S_{499} \ge 41) = P(S_{499} \ge 40{,}5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{49{,}5 + 24{,}95}{\sqrt{2269{,}2025}}\right) \doteq 0{,}085$$

ter končno

$$P(X_1 = 9 \mid S_{500} \ge 50) \approx 0{,}072\,.$$

Točen rezultat: 0,06951523.