

IME IN PRIIMEK: _____

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT

VERJETNOST

RAČUNSKI IZPIT

27. AVGUST 2025

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami na obeh straneh.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Andreja in Bojan izmenoma in brez vračanja vlečeta karte iz dobro premešanega kupa osmih kart, med katerimi so štiri rdeče. Začne Andreja.

- a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo Andreja prva izvlekla rdečo karto?

Rešitev: predstavljajmo si, da so izidi vse možne razporeditve štirih rdečih kart v kupu. Teh je $\binom{8}{4} = 70$. Andreja lahko prva izvleče rdečo karto bodisi v prvo bodisi v drugo bodisi v tretje – kot prvo, tretjo ali peto karto v kupu. Tako dobimo, da je ugodnih izidov $\binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 46$. Iskana verjetnost je torej enaka $46/70 = 23/35 \doteq 0,657$.

- b. (10) Recimo, da je Andreja res prva izvlekla rdečo karto. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je rdečo karto takoj za tem izvlekel tudi Bojan?

Rešitev: izidov, ko je Andreja prva izvlekla rdečo karto, takoj za njo pa je rdečo izvlekel še Bojan, je $\binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 22$. Iskana pogojna verjetnost je torej enaka $22/46 = 11/23 \doteq 0,478$.

2. (20) Previdna roparja A in B sta se odločila, da bosta na “delo” odhajala izmenično, dokler nekoga od njiju ne bodo dobili pri kraji. Privzemite, da so posamezni ropi med seboj neodvisni. Roparja A ujamejo z verjetnostjo a , roparja B pa z verjetnostjo b . Prvi začne z ropi A.

- a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bodo roparja A pri delu dobili prej kot roparja B?

Rešitev: označimo

$A_k = \{A\text{-ju spodleti v } k\text{-tem poskusu, vsi prejšnji poskusi pa so obema uspeli}\}.$

Ta dogodek se zgodi natanko takrat, ko je A uspešen $(k-1)$ -krat in B $(k-1)$ -krat, nato pa A-ju spodleti. Ker so ropi neodvisni, je

$$P(A_k) = (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a.$$

Dogodki A_k so za $k = 1, 2, \dots$ disjunktni, njihova unija pa je ravno dogodek, da roparja A ujamejo prej kot roparja B. Sledi

$P(\text{roparja A ujamejo prej kot roparja B})$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &= a \sum_{k=1}^{\infty} ((1-a)(1-b))^{k-1} \\ &= a \frac{1}{1 - (1-a)(1-b)} \\ &= \frac{a}{a + b - ab}. \end{aligned}$$

- b. (10) Naj bo X celotno število ropov, vključno z zadnjim, ki ne uspe. Izračunajte porazdelitev te slučajne spremenljivke.

Rešitev: možne vrednosti za spremenljivko X so $n = 1, 2, 3, \dots$. Ločiti moramo primera sodih in lihih n . Naj bo najprej $n = 2k$. V tem primeru je A uspešen k -krat, B uspešen $(k-1)$ -krat in na koncu B ujet. Sledi

$$P(X = 2k) = (1-a)^k(1-b)^{k-1}b.$$

Če je $n = 2k - 1$, je A uspešen $(k-1)$ -krat, B uspešen $(k-1)$ -krat in A ujet. Sledi

$$P(n = 2k - 1) = (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a.$$

3. (20) Slučajni spremenljivki Y in W naj bosta neodvisni z $Y \sim \exp(1)$ in $W \sim N(0, 1)$. Naj bo

$$X = \theta Y + \sigma \sqrt{Y} W,$$

kjer sta $\theta > 0$ in $\sigma > 0$ dani konstanti.

a. (10) Poiščite gostoto para (Y, X) .

Rešitev: zamislimo si preslikavo

$$\Phi(y, w) = (y, \theta y + \sigma \sqrt{y} w).$$

Na odprti množici $U = \{(y, w) : y > 0\}$ je preslikava bijektivna in preslika U nase. Računamo

$$\Phi^{-1}(y, x) = \left(y, \frac{x - \theta y}{\sigma \sqrt{y}} \right).$$

Predpostavke o zvezni odvedljivosti so izpolnjene in izračunamo

$$J_{\Phi^{-1}}(y, x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{y}}.$$

Sledi

$$f_{Y,X}(y, x) = f_{Y,W} \left(y, \frac{x - \theta y}{\sigma \sqrt{y}} \right) \cdot J_{\Phi^{-1}}(y, x).$$

Zaradi neodvisnosti je $f_{Y,W}(y, w) = f_Y(y)f_W(w)$. Sledi, da za $(y, x) \in U$ velja

$$f_{Y,X}(y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-y - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \theta y}{\sigma \sqrt{y}} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{y}},$$

sicer pa je $f_{Y,X}(y, x) = 0$.

b. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X . Kot znano privzemite, da za $a > 0$ in $b \geq 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay - \frac{b}{y}}}{\sqrt{y}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Rešitev: gostoto X izračunamo kot robno gostoto. Računamo

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{Y,X}(x, y) \, dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-y - \frac{x^2}{2\sigma^2 y} + \frac{\theta x}{\sigma^2} - \frac{\theta^2 y}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\theta x/\sigma^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 y} - \frac{(\theta^2 + 2\sigma^2)y}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\theta x/\sigma^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\theta^2 + 2\sigma^2}{2\sigma^2}}} \exp\left(-2\sqrt{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \sqrt{\frac{\theta^2 + 2\sigma^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2}} e^{-(|x|\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2} - \theta x)/\sigma^2}. \end{aligned}$$

4. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata po-razdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

Rešitev: potrebujemo verjetnost $P(X = k)$. Računamo

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} P(X = k, Y = l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{1}{n(n-k)} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Po definiciji je

$$\begin{aligned} E(Y|X = k) &= \sum_{l=1}^{n-k} l P(Y = l|X = k) \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} l \frac{P(X = k, Y = l)}{P(X = k)} \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{l}{n-k} \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \\ &= \frac{n-k+1}{2}. \end{aligned}$$

Torej

$$E(Y|X = k) = \frac{n-k+1}{2}.$$

b. (10) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

Rešitev: po definiciji je $E(Y|X = n) = 0$. Vemo, da je

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(E(Y|X)) \\ &= \sum_{k=1}^n E(Y|X = k)P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n - k + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{m=2}^n m \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2n}. \end{aligned}$$

5. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ in N neodvisne slučajne spremenljivke in $\lambda > 0$. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots$ naj bodo enako porazdeljene, slučajna spremenljivka N pa naj ima Poissonovo porazdelitev $\text{Pois}(\lambda)$, tj.

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

Nadalje je znano, da je porazdelitev slučajne spremenljivke $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ podana s predpisom

$$P(S = k) = \frac{1}{2^{k+1}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a. (15) Določite porazdelitev slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots$ za $\lambda = 1$.

Rešitev: označimo z G_X rodovno funkcijo slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots$, z G_N rodovno funkcijo slučajne spremenljivke N , z G_S pa rodovno funkcijo slučajne spremenljivke S . Vemo, da je $G_S(s) = G_N(G_X(s))$. S seštetjem ustreznih vrst dobimo

$$G_N(s) = e^{s-1} \quad \text{in} \quad G_S(s) = \frac{1}{2-s}.$$

Torej mora veljati

$$e^{G_X(s)-1} = \frac{1}{2-s},$$

od koder dobimo

$$G_X(s) = 1 - \ln(2-s) = 1 - \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{s}{2}\right) = 1 - \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k \cdot 2^k}.$$

Torej za $i = 1, 2, 3, \dots$ velja

$$P(X_i = 0) = 1 - \ln 2, \quad P(X_i = k) = \frac{1}{k \cdot 2^k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

b. (5) Za katere λ sploh obstajajo takšne slučajne spremenljivke?

Rešitev: veljati mora

$$e^{\lambda(G_X(s)-1)} = \frac{1}{2-s},$$

od koder dobimo

$$G_X(s) = 1 - \frac{\ln(2-s)}{\lambda} = 1 - \frac{\ln 2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k \cdot 2^k}.$$

Očitno je $G_X(1) = 1$, vsi koeficienti pa bodo nenegativni natanko tedaj, ko bo $\lambda \geq \ln 2$: to je potreben in zadosten pogoj za obstoj zahtevanih slučajnih spremenljivk.

6. (20) V vinski kleti stoji sod, ki drži 100 l (1000 dl). Ko ga do vrha napolnimo, ne opazimo, da pušča. Vsak dan iz sode odkaplja naključna količina vina. V povprečju odkaplja iz njega 0,1 dl vina na dan s standardnim odklonom 0,09 dl. Privzamemo, da so količine, ki odkapljajo na dan, med sabo neodvisne in enako porazdeljene.

- a. (10) Ali je mogoče, da je po enem letu v sodu manj kot 95 l vina kljub temu, da soda tekom leta nismo odpirali?

Rešitev: uporabimo centralni limitni izrek. Iščemo verjetnost, da je v 365 dneh iz sode izteklo več kot 5 l (50 dl) vina. Računamo

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 50) &= P\left(\frac{S_{365} - 365 \cdot 0,1}{\sqrt{365} \cdot 0,09} \geq \frac{50 - 365 \cdot 0,1}{\sqrt{365} \cdot 0,09}\right) \approx \\ &\approx P(Z \geq 7,9) = 0. \end{aligned}$$

Torej je to skoraj nemogoče.

- b. (10) Po kolikšnem času bomo lahko z več kot 50 % gotovostjo trdili, da je v sodu manj kot 90 l vina?

Rešitev: iščemo tak n , da bo $P(S_n \geq 100) = 0,5$ oziroma, da je

$$\frac{100 - n \cdot 0,1}{365 \cdot \sqrt{n}} = 0.$$

Rešitev te enačbe pa je $n = 1000$, torej po slabih treh letih.