Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Računski izpit

27. junij 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami na obeh straneh.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			●	●	
2.				●	
3.			●	●	
4.			●	●	
5.			●	●	
6.			●	●	
Skupaj					

1. (20) Predpostavite, da imate 52 kart oštevilčenih s števili $1, 2, \dots, 13$. Vsako od števil se na kartah pojavi natanko štirikrat. Igralcu bomo razdelili pet naključno izbranih kart, tako da so vse izbire enako verjetne.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo igralec dobil karte, na katerih bo pet zaporednih števil kot na primer $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Vrstni red, v katerem bo igralec dobil karte, ni pomemben.

Rešitev: za vsak $i = 1, 2, \dots, 9$ *označimo*

$$A_i = \{\textit{igralec bo dobil števila } i, i+1, i+2, i+3, i+4\}\,.$$

Iščemo verjetnost unije $A = \cup_{i=1}^{9} A_i$. *Dogodki v uniji so disjunktni, zato je dovolj poiskati verjetnosti posameznih* A_i. *Prešteti moramo vse podmnožice po pet kart, ki imajo po enega predstavnika števil* $i, i+1, i+2, i+3, i+4$. *Ker imamo v vsaki kategoriji 4 izbire, je takih peteric* 4^5. *Iskana verjetnost je*

$$P(A_i) = \frac{4^5}{\binom{52}{5}}$$

in posledično

$$P(A) = \frac{9 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{192}{54145} \doteq 0{,}003546034\,.$$

b. (10) Privzemite, da kartam dodamo *Joker* karto, ki lahko nadomesti katerokoli število, tako da je kart 53. Primer: če joker karto označimo z J, zaporedje $\{3, \mathrm{J}, 5, 6, 7\}$ pomeni pet zaporednih števil, ker J nadomesti število 4. Kolikšna je verjetnost, da bo igralec dobil pet zaporednih števil v tem primeru?

Rešitev: pet zaporednih kart lahko dobimo na naslednje disjunktne načine:

- *pet zaporednih kart:* $9 \cdot 4^5$ *izidov*
- *štiri zaporedne karte plus joker:* $10 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+2, i+3, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+1, i+3, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*
- $i, i+1, i+2, i+4$ *plus joker:* $9 \cdot 4^4$ *izidov*

Skupaj je to $73 \cdot 4^4$ *izidov, vseh izidov pa je* $\binom{53}{5}$. *Iskana verjetnost je torej*

$$\frac{73 \cdot 4^4}{\binom{53}{5}} = \frac{18688}{2869685} \doteq 0{,}006512213\,.$$

2. (20) Imamo dva kovanca. Na prvem pade grb z verjetnostjo α, na drugem pa z verjetnostjo β. Kovanca mečemo izmenično. Začnemo s prvim. Predpostavljamo, da so meti med sabo neodvisni. Naj bo X število metov do prvega grba vključno s prvim grbom.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Namig: ločite primera za lihe in sode k.

Rešitev: možne vrednosti so $k = 1, 2, \ldots$. Če želimo, da prvi grb pade na k-tem metu, mora $(k-1)$-krat pasti cifra, potem pa grb. Ločiti moramo primera, ko je k lih ali sod. Za lih $k = 2m+1$ dobimo

$$P(X = 2m+1) = (1-\alpha)^m(1-\beta)^m\alpha$$

za sod $k = 2m$ za $m = 1, 2, \ldots$ pa dobimo

$$P(X = 2m) = (1-\alpha)^m(1-\beta)^{m-1}\beta\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

za $|x| < 1$.

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)P(X=2m+1) + \sum_{m=1}^{\infty} 2mP(X=2m) \\
&= \alpha \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(1-\alpha)^m(1-\beta)^m + \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{m=1}^{\infty} 2m(1-\alpha)^m(1-\beta)^m \\
&= \frac{2\alpha(1-\alpha)(1-\beta)}{\left(1-(1-\alpha)(1-\beta)\right)^2} + \frac{1}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} + \\
&\qquad + \frac{2\beta}{1-\beta}\cdot\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\left(1-(1-\alpha)(1-\beta)\right)^2}\,.
\end{aligned}$$

3. (20) Slučajni spremenljivki U in V naj bosta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na $(0,1)$.

a. (10) Izračunajte gostoto vektorja $(X,Y) = (U, V(1-U))$.

Rešitev: v transformacijski formuli vzamemo

$$\Phi(u,v) = (u, v(1-u))\,.$$

Izračunamo

$$\Phi^{-1}(x,y) = \left(x, \frac{y}{1-x}\right)$$

in posledično

$$J_{\Phi^{-1}}(x,y) = \frac{1}{1-x}\,.$$

Sledi

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{1-x}$$

za $x, y \in (0,1)$ *in* $x + y < 1$.

b. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $Z = U + V(1-U)$.

Rešitev: po formuli je

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx\,.$$

V našem primeru integriramo samo tam, kjer je gostota različna od nič. Sledi

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z \frac{dx}{1-x} \\ &= -\log(1-z)\,. \end{aligned}$$

Formula za gostoto velja za $0 < z < 1$.

4. (20) Za slučajni spremenljivki X in Y z vrednostmi v množici $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$ naj velja

$$\begin{aligned} P(Y = k+1|X = k) &= \tfrac{k(m-k)}{m^2} \\ P(Y = k|X = k) &= \tfrac{k^2+(m-k)^2}{m^2} \\ P(Y = k-1|X = k) &= \tfrac{k(m-k)}{m^2} \end{aligned}$$

za $k = 0, 1, \ldots, m$.

a. (10) Izrazite $E(Y)$ z $E(X)$.

Rešitev: po definiciji je

$$E(Y|X = k) = (k+1) \cdot \frac{k(m-k)}{m^2} + k \cdot \frac{k^2 + (m-k)^2)}{m^2} + (k-1) \cdot \frac{k(m-k)}{m^2}.$$

Z nekaj računanja sledi, da je $E(Y|X = k) = k$*. Po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{m} E(Y|X = k)\, P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} k\, P(X = k) \\ &= E(X)\,. \end{aligned}$$

b. (10) Izrazite $\mathrm{var}(Y)$ z varianco $\mathrm{var}(X)$ in pričakovano vrednostjo $E(X)$.

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned} E(Y^2|X = k) &= (k+1)^2 \frac{k(m-k)}{m^2} + k^2 \frac{k^2 + (m-k)^2)}{m^2} + (k-1)^2 \frac{k(m-k)}{m^2} \\ &= \frac{2mk + k^2(m^2-2)}{m^2}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{m} E(Y^2|X = k)P(X = k) = \frac{2}{m}E(X) + \left(1 - \frac{2}{m^2}\right) E(X^2)\,.$$

Ker je $E(X^2) = \mathrm{var}(X) + E(X)^2$*, dobimo*

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \frac{2}{m}E(X) + \left(1 - \frac{2}{m^2}\right)(\mathrm{var}(X) + E(X)^2)\,. \end{aligned}$$

5. (20) Na začetku imamo eno bakterijo. V trenutkih $n = 1, 2, \ldots$ se lahko zgodi dvoje: vse bakterije se razdelijo v dve z verjetnostjo p ali pa se ne zgodi nič z verjetnostjo $q = 1 - p$. Označimo z Z_n slučajno število bakterij v trenutku n. Z $G_n(s)$ označimo rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = qG_n(s) + pG_n(s^2)\,.$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$E(Z_{n+1}) = (1 + p)E(Z_n)$$

in izračunajte $E(Z_n)$.

Rešitev: vemo, da je $E(Z_n) = G_n'(1)$. Odvajamo levo in desno stran rekurzivne formule in dobimo

$$G_{n+1}'(s) = qG_n'(s) + 2psG_n'(s^2)\,.$$

Vstavimo $s = 1$ in dobimo

$$E(Z_{n+1}) = qE(Z_n) + 2pE(Z_n) = (1 + p)E(Z_n)\,.$$

Z indukcijo takoj ugotovimo, da je $E(Z_n) = (1 + p)^n$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k}\,.$$

Izračunajte $P(Z_n = 2^k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Namig: po Pascalu je

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,.$$

Rešitev: podana formula velja za $n = 0$. Pa denimo, da formula drži za n. Računamo

$$\begin{aligned}
&G_{n+1}(s) = \\
&= \quad qG_n(s) + pG_n(s^2) \\
&= \quad q\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k} + p\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, (s^2)^{2^k} \\
&= \quad q\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k} + p\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^{k+1}} \\
&= \quad qq^n s + \sum_{k=1}^{n} \left(q\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k} + p\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} s^{2^k} \right) + pp^n s^{2^{n+1}} \\
&= \quad q^{n+1}s + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} p^k q^{n-k} + p^{n+1} s^{2^{n+1}} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k} s^{2^k}\,.
\end{aligned}$$

Razberemo lahko, da je $P(Z_n = 2^k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ *za* $k = 0, 1, \ldots, n$. *Za števila* m*, ki niso potence števila* 2*, je* $P(Z_n = m) = 0$.

6. (20) Igralniška hiša se odloči, da bo naslednjim $n = 30.000$ gostom ponudila promocijsko igro. Vsak gost bo vrgel pošteno kocko. Če bo dobil 6, bo lahko vstopil zastonj in dobil še dva eura. Če bo dobil 5, bo lahko vstopil zastonj. V vseh drugih primerih bo gost plačal običajno vstopnino 1 euro.

a. (10) Naj bo X_1 čisti dobiček hiše za prvega gosta. Izračunajte $E(X_1)$ in $\mathrm{var}(X_1)$.

Rešitev: možne vrednosti za slučajno spremenljivko X_1 so -2, 0 in 1 z verjetnostmi $1/6$, $1/6$ in $4/6$. Sledi

$$E(X_1) = \frac{-2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \quad \textit{in} \quad \mathrm{var}(X_1) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}\,.$$

b. (10) Izračunajte verjetnost, da bo skupni čisti dobiček manjši od 10.490 eurov.

Rešitev: označimo $S_{30000} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{30000}$ in računamo z uporabo centralnega limitneg izreka.

$$\begin{aligned}
P(S_{30000} \leq 10490) &= P(S_{30000} - 10000 \leq 10490 - 10000) \\
&= P\left(\frac{S_{10000} - 10000}{\sqrt{30000}\cdot\sqrt{11/9}} \leq \frac{10490 - 10000}{\sqrt{30000}\cdot\sqrt{11/9}}\right) \\
&= P\left(\frac{S_{10000} - 10000}{\sqrt{30000}\cdot\sqrt{11/9}} \leq 2,56\right) \\
&\approx P(Z \leq 2,56) \\
&= 0,9948\,.
\end{aligned}$$