Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

Računski izpit

21. avgust 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in kalkulator.

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Total					

1. (20) V r škatel vržemo n kroglic. Privzamemo, da so meti med sabo neodvisni, vsako škatlo pa zadenemo z enako verjetnostjo. Označimo z X število praznih škatel na koncu.

a. (10) Definirajte

$$A_k = \{k\text{-ta škatla je prazna}\}$$

za $k = 1, 2, \ldots, r$. Izrazite dogodek $A = \{X = 0\}$ z dogodki A_k.

Rešitev: $A = \cap_{k=1}^{r} A_k^c$.

b. (10) Izračunajte $P(X = 0)$.

Rešitev: velja $A^c = \cup_{k=1}^{r} A_k$. *Računali bomo po formuli za vključitve in izključitve, zato potrebujemo verjetnosti* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ *za vse* k. *Z drugimi besedami, računamo verjetnost, da bomo v vseh metih zadeli preostalih* $r - k$ *škatel. Zaradi neodvisnosti metov je*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

Zaradi simetrije ima presek katerih koli k *dogodkov izmed* $A_1, \ldots, A_r$ *enako verjetnost, zato velja*

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \left(\frac{r-k}{r}\right)^n .$$

2. (20) Pošteno kocko mečemo, dokler ne dobimo šestice. Privzamemo, da so meti neodvisni in imajo vse ploskve enako verjetnost. Označite z X_i število pojavitev izida i pred šestico za $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Označite z X število metov do prve šestice.

a. (10) Najdite porazdelitev vektorja (X_i, X).

Rešitev: možne vrednosti zgornjega slučajnega vektorja so pari (k, l) z $l \geq 1$ in $0 \leq k \leq l - 1$. Dogodek $\{X_i = k, X = l\}$ se lahko zgodi na naslednje načine: v prvih $l - 1$ metih dobimo natanko k-krat izid i in nobene šestice, na l-tem metu pa dobimo šestico. Pozicije za izid i lahko izberemo na $\binom{l-1}{k}$ načinov, na ostalih pozicijah pa so izidi različni od i in 6. Z upoštevanjem neodvisnosti sledi

$$P(X_i = k, X = l) = \binom{l-1}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{l-1-k} \cdot \frac{1}{6}\,.$$

Izraz se poenostavi v

$$P(X_i = k, X = l) = \binom{l-1}{k} \cdot \frac{4^{l-1-k}}{6^l}\,.$$

Pri tem interpretiramo $\binom{0}{0} = 1$.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_i, X)$.

Rešitev: zaradi simetrije so kovariance $\mathrm{cov}(X_i, X)$ enake za $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Velja torej

$$\mathrm{cov}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5, X) = 5 \cdot \mathrm{cov}(X_1, X)\,.$$

Po drugi strani je $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = X - 1$, zato je

$$\mathrm{cov}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5, X) = \mathrm{cov}(X - 1, X) = \mathrm{var}(X)\,.$$

Ker je $X \sim \mathrm{Geom}(\frac{1}{6})$, je

$$\mathrm{var}(X) = 30\,,$$

torej je

$$\mathrm{cov}(X_1, X) = \mathrm{cov}(X_i, X) = 6\,.$$

3. (20) Porazdelitev *Beta* s parametroma $a, b > 0$ je dana z gostoto

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

za $0 < x < 1$, pri čemer je

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\,.$$

a. (10) Naj bosta X in Y neodvisni ter

$$X \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad Y \sim \mathrm{Beta}\left(1, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Pokažite, da je gostota vektorja $(U, V) = (X, XY)$ dana z

$$f_{U,V}(u,v) = f_X(u)\, f_Y(v/u)\, \frac{1}{u}$$

za $0 < v < u < 1$. Izračunajte gostoto XY eksplicitno. Kot znano privzemite,da je

$$\int_v^1 \frac{1}{u}(1-u)^{-1/2}(u-v)^{-1/2}du = \frac{\pi}{\sqrt{v}}\,.$$

Rešitev: preslikava $\Phi(x,y) = (x, xy)$ je bijektivna in ustrezno parcialno odvedljiva med množicama $(0,1)^2$ in $\{(u,v)\colon 0 < u < v < 1\}$. Z odvajanjem sledi, da je $J_{\Phi^{-1}}(u,v) = u^{-1}$. Formula za gostoto sledi iz transformacijske formule. Gostoto $V = XY$ dobimo kot robno gostoto, torej

$$\begin{aligned}
&f_V(v)\\
&= \int_v^1 f_X(u)\, f_Y(v/u)\, \frac{1}{u}\, du\\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)} \int_v^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{u}\,du\\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)} \int_v^1 u^{-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(u-v)^{-\frac{1}{2}}\,du\\
&= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{v}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{v}}\,.
\end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo upoštevali znani integral. Konstanta je enaka $\frac{1}{2}$, ker je rezultat gostota z integralom enakim 1. Zapišemo lahko $XY \sim \mathrm{Beta}\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

b. (10) Naj bosta X in Y neodvisni z

$$X \sim \mathrm{Beta}(a,b) \quad \text{in} \quad Y \sim \mathrm{Beta}(a+b, c)$$

za pozitivne konstante a, b in c. Izračunajte gostoto XY. Pri tem upoštevajte, da je

$$\int_v^1 \frac{(1-u)^{b-1}(u-v)^{c-1}du}{u^{b+c}} = \mathrm{B}(b,c)\, v^{-b}(1-v)^{b+c-1}\,.$$

Rešitev: po formuli iz prvega dela naloge je

$$\begin{aligned} f_V(v) & \\ &= \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)\mathrm{B}(a+b,c)} \int_v^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\left(\frac{v}{u}\right)^{a+b-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{c-1}\frac{1}{u}du \\ &= \frac{v^{a+b-1}}{\mathrm{B}(a,b)\mathrm{B}(a+b,c)} \int_v^1 \frac{(1-u)^{b-1}(u-v)^{c-1}\,du}{u^{b+c}} \\ &= \frac{\mathrm{B}(b,c)}{\mathrm{B}(a,b)\mathrm{B}(a+b,c)}\, v^{a-1}(1-v)^{b+c-1}\,. \end{aligned}$$

Sledi $V \sim \mathrm{Beta}(a, b+c)$.

4. (20) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedja ničel in enk. Privzemamo, da so posamezna generirana števila neodvisna in je vsako generirano število enako 1 z verjetnostjo 1/2.

a. (10) Pri preverjanju kvalitete generatorja slučajnih števil definiramo slučajno spremenljivko Y, ki šteje, kolikokrat sta se v nizu n generiranih slučajnih ničel in enk pojavili dve enki zapovrstjo. Pri tem dopuščamo prekrivanje v smislu, da sta se v nizu 1011011110111 dve enki zapovrstjo pojavili šestkrat. Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: Definiramo indikatorske slučajne spremenljivke s predpisom

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če sta na mestih } k \text{ in } k+1 \text{ enki}, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Velja* $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1}$, *poleg tega pa se hitro prepričamo, da je*

$$E(I_k) = P(I_k = 1) = \frac{1}{4}.$$

Sledi

$$E(Y) = \frac{n-1}{4}.$$

b. (15) Naj bo Z število pojavljanj zaporedja 011 v nizu n generiranih slučajnih števil, pri čemer ne dopuščamo prekrivanja. Izračunajte $E(Z)$ in $\mathrm{var}(Z)$.

Rešitev: dve prekrivajoči zaporedji po treh generiranih števil ne moreta biti hkrati enaki 011, zato omejitev na neprekrivajoče nize ni pomembna. Spet definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če so na mestih } k \text{ in } k+1 \text{ in } k+2 \text{ števila 011}, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-2$. *Velja* $Z = I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-2}$. *Zaradi neodvisnosti je* $E(I_k) = 1/8$, *torej*

$$E(Z) = \frac{n-2}{8}.$$

Za izračun variance potrebujemo kovariance. Naj bo $l > k$. *Če je* $l - k \le 2$, *je* $I_l I_k = 0$ *z verjetnostjo 1 in je zato* $\mathrm{cov}(I_k, I_l) = -E(I_k)E(I_l) = -1/64$. *Za* $l - k \ge 3$ *pa sta* I_k *in* I_l *neodvisna, zato je njuna kovariance enaka* 0. *Računamo*

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Z) &= \sum_{k=1}^{n-2} \mathrm{var}(I_k) + 2 \sum_{1 \le k < l \le n-2} \mathrm{cov}(I_k, I_l) \\ &= \frac{(7(n-2)}{64} - \frac{6(n-4)}{64} \\ &= \frac{n+10}{64}. \end{aligned}$$

5. (20) Standardnih 52 kart dobro premešamo in jih začnemo deliti brez vračanja, dokler ne dobimo prvič enega od štirih asov. Naj bo N število kart vključno z asom, ki jih bomo razdelili, X pa število kraljev med razdeljenimi kartami

a. (10) Utemeljite, da je

$$P(X = k | N = n) = \frac{\binom{4}{k}\binom{44}{n-k-1}}{\binom{48}{n-1}}\,.$$

za $n = 1, 2, \ldots, 49$ in $k = 0, 1, \ldots, \min(4, n-1)$. Pogojna porazdelitev X glede na dogodek $\{N = n\}$ je torej $\text{HiperGeom}(n-1, 4, 48)$.

Rešitev: pogojno na $\{N = n\}$ so izbrane karte naključno izbran vzorec velikosti $n-1$ izmed 48 kart, ki niso asi. Med temi kartami so 4 kralji.

b. (10) Izrazite $E(X)$ z $E(N)$.

Rešitev: po formuli za popolno pričakovano vrednost je

$$E(X) = \sum_{n=1}^{49} E(X|N = n)P(N = n)\,.$$

Iz prvega dela naloge sledi $E(X|N = n) = (n-1) \cdot \frac{4}{48}$, torej je

$$E(X) = \frac{4}{48}\sum_{n=1}^{49}(n-1)P(N = n) = \frac{E(N) - 1}{12}\,.$$

6. (20) Igralca A in B izmenično mečeta kovanec, vsak tolikokrat, da dobi grb. Meti so neodvisni, verjetnost za grb pa naj bo $p = 1/2$. Ena "runda" igre je to, da A meče kovanec, dokler ne dobi grba in potem B meče kovanec, dokler ne dobi grba.

a. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da bosta A in B v 1000 rundah igre skupaj vrgla kovanec 4081-krat ali večkrat?

Rešitev: število metov kovanca do prvega grba je geometrijsko porazdeljena slučajna spremenljivka $X_1 \sim \mathrm{Geom}(1/2)$. *Vemo, da je* $E(X_1) = 1/p = 2$ *in* $\mathrm{var}(X_1) = q/p^2 = 2$. *Po* 1000 *rundah igre je število metov enako*

$$S_{2000} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{2000}\,,$$

kjer so X_i *med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Po centralnem limitnem izreku je*

$$\begin{aligned} P(S_{2000} \geq 4081) &= P\left(\frac{S_{2000} - E(S_{2000})}{\sqrt{\mathrm{var}(S_{2000})}} \geq \frac{4081 - E(S_{2000})}{\sqrt{\mathrm{var}(S_{2000})}}\right) \\ &= P\left(\frac{S_{2000} - E(S_{2000})}{\sqrt{\mathrm{var}(S_{2000})}} \geq \frac{4081 - 4000}{\sqrt{4000}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 1,28) \\ &= 1 - \Phi(1,28) \\ &= 0,1\,. \end{aligned}$$

b. (10) Igralec A zmaga, če je po 1000 rundah igre število njegovih metov za 100 ali več manjše od števila metov igralca B. Kolikšna je približno verjetnost, da bo A zmagal?

Namig: glejte razliko metov v vsaki rundi.

Rešitev: označite z Z_k *razliko med številom metov igralca A in številom metov igralca B v k-ti rundi. Ker je* $Z_1 = X_1 - X_2$, *je zaradi neodvisnosti* $E(Z_1) = 0$ *in* $\mathrm{var}(Z_1) = 4$. *V teh oznakah naloga sprašuje po verjetnosti*

$$P(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{1000} \leq -100)\,.$$

Označimo $T_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$. *Po centralnem limitnem izreku bo*

$$\begin{aligned} P(T_{1000} \leq -100) &= P\left(\frac{T_{1000} - E(T_{1000})}{\sqrt{\mathrm{var}(T_{1000})}} \leq \frac{-100 - E(T_{1000})}{\sqrt{\mathrm{var}(T_{1000})}}\right) \\ &\approx P\left(Z \leq \frac{-100}{\sqrt{4000}}\right) \\ &= P(Z \leq -1,58) \\ &= 0,057\,. \end{aligned}$$