Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

Računski izpit

21. junij 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Total					

1. (20) Štirim igralcem razdelimo po pet kart z dobro premešanega kupa standardnih 52 kart. *Kraljeva lestvica* (angl. *royal flush*) pomeni, da igralec dobi asa, kralja, damo, fanta in desetico iste barve.

a. (10) Izračunajte verjetnost, da nobeden od igralcev ne dobi kraljeve lestvice. Binomskih simbolov vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: za $i = 1, 2, 3, 4$ *označimo* $A_i = \{i\text{-ti igralec dobi kraljevo lestvico}\}$. *Velja:*

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 4 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}}\,, \\ P(A_1 \cap A_2) &= 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}}\,, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}}\,, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}}\,. \end{aligned}$$

Iskana verjetnost je $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right)$. *Iz načela vključitev in izključitev ter simetrije dobimo*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) = 4\,P(A_1) - 6\,P(A_1 \cap A_2) + 4\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\,,$$

iskana verjetnost pa je

$$1 - \frac{16}{\binom{52}{5}} + \frac{72}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}} - \frac{96}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}} + \frac{24}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}}\,.$$

Numerični rezultat je $1 - 6{,}16 \cdot 10^{-6}$.

b. (10) Eden od igralcev je gospod Lancelot. Izračunajte pogojno verjetnost, da gospod Lancelot dobi kraljevo lestvico, če vemo, da je kraljevo lestvico dobil vsaj eden od igralcev.

Rešitev: naj bo B *dogodek, da vsaj eden od igralcev dobi barvno lestvico,* A *pa naj bo dogodek, da jo dobi gospod Lancelot. Velja*

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{\binom{52}{5}}$$

in $A \cap B = A$. *Iskana pogojna verjetnost je torej enaka* $P(A)/P(B)$. *Numerični rezultat je* $0{,}25000073$.

2. (20) Naj bo σ permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za element $k \geq 2$ pravimo, da je *točka dviga* permutacije σ, če je $\sigma(k-1) < \sigma(k)$. Privzemimo zdaj, da permutacijo izberemo naključno, tako da so vse možne permutacije enako verjetne. Naj bo X število točk dviga te slučajne permutacije.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: za $k = 2, 3, \ldots, n$ definiramo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k \text{ točka dviga} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja $X = I_2 + \cdots + I_n$. Zaradi simetrije sta elementa permutacije na položajih k and $k-1$ slučajni par, pri čemer so vsi možni pari različnih elementov enako verjetni. Verjetnost, da je k točka dviga, je torej enaka $\frac{1}{2}$ in sledi

$$E(X) = \frac{n-1}{2}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(X)$.

Rešitev: potrebujemo verjetnosti $P(I_k = 1, I_l = 1)$ za $k \neq l$. Ločimo tri primere:

(i) *Če je $k = l$, je $\operatorname{cov}(I_k, I_l) = \operatorname{var}(I_k) = \frac{1}{4}$.*

(ii) *Če je $l = k + 1$, morajo elementi na položajih $k - 1, k, k + 1$ tvoriti naraščajoče zaporedje. Zaradi simetrije je verjetnost tega dogodka enaka $\frac{1}{6}$, torej je $\operatorname{cov}(I_k, I_l) = -\frac{1}{12}$. Enako velja tudi za $k = l + 1$.*

(iii) *Če je $|k-l| > 1$, sta I_k in I_l zaradi simetrije neodvisna, torej je $\operatorname{cov}(I_k, I_l) = 0$.*

Seštejemo in dobimo

$$\operatorname{var}(X) = \frac{n-1}{4} - \frac{2(n-2)}{12} = \frac{n+1}{12}\,.$$

3. (20) Naj bodo U_1, U_2 in U_3 neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na intervalu $(0,1)$. Definirajmo

$$X = U_1, \qquad Y = U_2(1-U_1) \quad \text{in} \quad Z = U_3(1-U_2)(1-U_1)\,.$$

a. (10) Izračunajte gostoto slučajnega vektorja (X, Y, Z). Pri tem ekplicitno navedite, kje je pozitivna.

Rešitev: definirajmo preslikavo

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = \big(u_1,\, u_2(1-u_1),\, u_3(1-u_2)(1-u_1)\big)\,.$$

Preslikava Φ preslika množico $(0,1)^3$ bijektivno na množico $\Delta = \big\{(x,y,z)\colon\ x,y,z > 0,\ x+y+z < 1\big\}$ in velja

$$\Phi^{-1}(x,y,z) = \left(x,\ \frac{y}{1-x},\ \frac{z}{1-x-y}\right)\,.$$

Jacobijeva matrika je spodnje trikotna, torej je za $J_{\Phi^{-1}}$ dovolj gledati diagonalce. Dobimo

$$J_{\Phi^{-1}}(x,y,z) = \frac{1}{(1-x)(1-x-y)}$$

in sledi, da je

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{(1-x)(1-x-y)}$$

na množici Δ, sicer pa je $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 0$.

b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke $W = 1 - X - Y - Z$.

Namig: ena možnost je, da izrazite W z U_1, U_2 in U_3.

Rešitev: velja

$$W = (1-U_1)(1-U_2)(1-U_3)\,.$$

Zdaj pa opazimo, da je $-\log(1-U_i) \sim \exp(1)$, torej je $-\log W \sim \Gamma(3,1)$, torej

$$f_{-\log W}(x) = \frac{x^2}{2}\, e^{-x}$$

za $x > 0$, sicer pa je $f_{-\log W}(x) = 0$. Funkcija $\Psi(x) = e^{-x}$ preslika $(0,\infty)$ bijektivno na $(0,1)$ in velja $\Psi^{-1}(w) = -\log w$, $J_{\Psi^{-1}}(w) = \big(\psi^{-1}\big)'(w) = -\frac{1}{w}$. Spet po transformacijski formuli je W porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_W(w) = \frac{(\log w)^2}{2}$$

za $w \in (0,1)$, sicer pa je $f_W(w) = 0$.

4. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke z $X_i \sim \mathrm{Geom}(p)$. Za $k \geq 1$ označimo $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

a. (10) Izberimo fiksen $n \geq 1$ in definirajmo $B_k = \{S_k \leq n, S_{k+1} > n\}$. Izračunajte $P(B_k)$.

Namiga:

- $B_k = \cup_{l=k}^{n} \{S_k = l, S_{k+1} > n\}$;
- $\binom{l-1}{k-1} + \binom{l-1}{k} = \binom{l}{k}$ *(pri dogovoru, da je* $\binom{l}{k} = 0$*, če je* $k < 0$ *ali* $k > l$*).*

Rešitev: vemo, da je $S_k \sim \mathrm{NegBin}(k, p)$*. Označimo* $q = 1 - p$*. Iz neodvisnosti sledi*

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P\big(S_k \leq n, S_{k+1} > n\big) \\ &= \sum_{l=k}^{n} P\big(S_k = l, X_{k+1} > n - l\big) \\ &= \sum_{l=k}^{n} P(S_k = l) P(X_{k+1} > n - l) \\ &= \sum_{l=k}^{n} \binom{l-1}{k-1} p^k q^{l-k} \cdot q^{n-l} \\ &= p^k q^{n-k} \sum_{l=k}^{n} \binom{l-1}{k-1} . \end{aligned}$$

Zdaj pa uporabimo drugi namig in to prepišemo v obliki

$$\begin{aligned} P(B_k) &= p^k q^{n-k} \sum_{l=k}^{n} \left[\binom{l}{k} - \binom{l-1}{k} \right] \\ &= p^k q^{n-k} \left[\binom{n}{k} - \binom{k-1}{k} \right] \\ &= p^k q^{n-k} \binom{n}{k} . \end{aligned}$$

b. (10) Za $k \leq n$ izračunajte pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $S_{k+1} - n$ glede na B_k.

Rešitev: Fiksirajmo $m \geq 1$ *in izračunajmo*

$$\begin{aligned}
P\big(\{S_{k+1} - n = m\} \cap B_k\big) &= \sum_{l=k}^{n} P\big(\{S_{k+1} - n = m\} \cap \{S_k = l\}\big) \\
&= \sum_{l=k}^{n} P\big(\{X_{k+1} = m + n - l\} \cap \{S_k = l\}\big) \\
&= \sum_{l=k}^{n} pq^{m+n-l-1} \binom{l-1}{k-1} p^k q^{l-k} \\
&= p^{k+1} q^{m+n-k-1} \sum_{l=k}^{n} \binom{l-1}{k-1} \\
&= p^{k+1} q^{m+n-k-1} \binom{n}{k} .
\end{aligned}$$

Torej je

$$P(S_{k+1} - n = m | B_k) = pq^{m-1} ,$$

in iskana pogojna porazdelitev je $\mathrm{Geom}(p)$*.*

5. (20) Cepetin ima dve oktaedrski kocki. Vsaka od njiju ima na svojih osnovnih ploskvah zapisane številke od 1 do 8. Cepetaj pa ima prav tako dve oktaedrski kocki, a številke na osnovnih ploskvah niso enake kot pri Cepetinu, so pa prav tako nenegativna cela števila. Če vržeta obe svoji kocki, imata oba isto porazdelitev vsote številk, ki padeta. Privzamemo, da se kocki vržeta neodvisno in da so vse osnovne ploskve enako verjetne.

a. (10) Označimo z X vsoto, ki jo dobi Cepetin. Utemeljite, da je

$$G_X(s) = \frac{1}{64}\, s^2(1+s)^2(1+s^2)^2(1+s^4)^2\,.$$

Rešitev: slučajna spremenljivka X je vsota dveh slučajnih spremenljivk, ki imata obe rodovno funkcijo

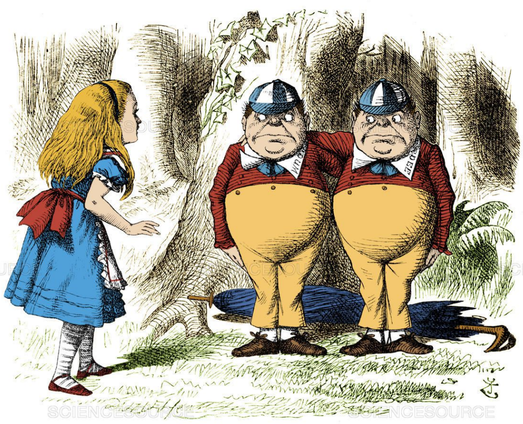
$$\frac{1}{8}\left(s + s^2 + \cdots + s^8\right) = \frac{1}{8}\, s(s+1)(s^2+1)(s^4+1)\,.$$

Rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je kvadrat zgornjega izraza, kar je natančno zahtevana funkcija.

b. (5) Vemo, da ima ena od Cepetajevih kock zapisano število 0. Utemeljite, da na njegovi drugi kocki ni števila 0 ali 1.

Rešitev: z verjetnostjo 1 je najmanjša možna vsota enaka 2. Če ima torej prva kocka število 0, mora biti najmanjše število na drugi kocki enako 2.

c. (5) Zdaj pa vemo, da je na eni od Cepetajevih kock najmanjše zapisano število enako 0, največje pa 8. Katera števila so zapisana na Cepetajevih kockah? Števila na Cepetajevih kockah se lahko ponavljajo.



Cepetin in Cepetaj iz Alice v čudežni deželi Lewisa Carrolla

Rešitev: naj bo Y slučajno število, ki ga dobimo pri metu Cepetajeve kocke z ničlo, in naj bo Z slučajno število, ki ga dobimo pri metu druge Cepetajeve kocke. Veljati mora $G_X(s) = G_Y(s) \cdot G_Z(s)$. Rodovni funkciji na desni morata *biti polinoma. To pomeni, da morata biti $G_Y(s)$ in $G_Z(s)$ sestavljena iz faktorjev polinoma $G_X(s)$. Privzamemo lahko, da je vsak od teh faktorjev pri $s = 1$ enak 1, tako da so ti faktorji*

$$s\,, \quad \frac{1+s}{2}\,, \quad \frac{1+s^2}{2} \quad \textit{in} \quad \frac{1+s^4}{2}\,,$$

pri čemer vsak izmed teh faktorjev skupaj nastopi natanko dvakrat. Ker morajo biti vse verjetnosti večkratniki števila $1/8$, lahko vsaka od rodovnih funkcij G_Y in G_Z vsebuje največ tri izmed faktorjev $\frac{1+s}{2}$, $\frac{1+s^2}{2}$ in $\frac{1+s^4}{2}$. Ker pa je teh faktorjev skupaj natanko šest, mora vsak izmed njih v posamezni rodovni funkciji nastopiti natanko trikrat, pri čemer se lahko faktorji ponavljajo.

Ker ima kocka s številom 0 največje zapisano število 8, je $G_Y(s)$ polinom stopnje 8 brez faktorja s, a z natanko tremi faktorji $\frac{1+s}{2}$, $\frac{1+s^2}{2}$ and $\frac{1+s^4}{2}$, ki se lahko tudi ponavljajo. Edina možnost je

$$G_Y(s) = \frac{(1+s^2)^2(1+s^4)}{8} = \frac{1 + 2s^2 + 2s^4 + 2s^6 + s^8}{8}\,,$$

ki nam da

$$G_Z(s) = \frac{s^2(1+s)^2(1+s^4)}{8} = \frac{s^2 + 2s^3 + s^4 + s^6 + 2s^7 + s^8}{8}\,.$$

Ena Cepetajeva kocka mora torej imeti številke $0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8$, druga pa $2, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 8$.

6. (20) Berti odpre stojnico z igro s tremi kockami. V vsaki igri, ki stane 1 euro, se vse tri kocke vržejo. Če ne pade nobena šestica, Berti obdrži vplačani znesek. Če pade natanko ena šestica, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še en euro. Če padeta natanko dve šestici, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še dva eura. Če pa padejo tri šestice, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še 14 eurov. Privzamemo, da so kocke standardne in da so vsi meti neodvisni.

a. (10) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco Bertijevega dobička po n igrah.

Rešitev: Naj bo X_i Bertijev dobiček v i-ti igri. Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -14 & -2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{216} & \frac{15}{216} & \frac{75}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix},$$

od koder po krajšem računu dobimo $E(X_i) = 1/36$ in $\mathrm{var}(X_i) = 2735/1296$. Če torej z S_n označimo Bertijev dobiček po n igrah, velja $E(S_n) = n/36$ in $\mathrm{var}(S_n) = 2735n/1296$.

b. (10) Po približno koliko igrah ima Berti s približno 95% verjetnostjo pozitiven dobiček?

Rešitev: Označimo spet število iger z n. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da mora približno veljati

$$1 - \Phi\left(\frac{-\frac{1}{36}\,n}{\sqrt{\frac{2735}{1296}\,n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2735}}\right) = 0{,}95$$

oziroma

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2735}} \doteq 1{,}645$$

kar je res, če je n približno 7400.