Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

27. junij 2019

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

| Naloga | a. | b. | c. | d. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | • | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | • | • | |
| 4. | | | • | • | |
| 5. | | | • | • | |
| 6. | | | • | • | |
| Skupaj | | | | | |

**1.** (20) V škatli je 100 izdelkov, od katerih je 10 defektnih.

a. (10) Iz škatle na slepo izberemo 10 izdelkov. Kolikšna je verjetnost, da je med izbranimi vsaj en defekten?

*Rešitev: Naj bo $A$ dogodek, da je med izbranimi izdelki vsaj en defekten. Tedaj je*

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}}.$$

b. (10) Iz škatle na slepo izberemo 10 izdelkov. Prvega pogledamo in ugotovimo, da je defekten. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je med ostalimi devetimi izdelki, ki smo jih izbrali, še kakšen defekten.

*Rešitev: Naj bo $B$ dogodek, da sta med izbranimi izdelki vsaj dva defektna. Naj bo $C$ dogodek, da je prvi med izbranimi defekten. Tedaj je iskana verjetnost enaka*

$$P(B|C) = 1 - \frac{\binom{90}{9}}{\binom{99}{9}}.$$

**2.** (20) Naj bosta neodvisni slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ obe porazdeljeni eksponentno s parametrom 1. Naj bo $U = X/Y$ in $V = Y$.

a. (10) Pokažite, da je skupna gostota slučajnih spremenljivk $U$ in $V$ enaka

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} ve^{-v(1+u)}, & \text{če } u, v > 0; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Utemeljite vse korake.

*Rešitev: Skupna gostota slučajnih spremenljivk $X$ in $Y$ je enaka $f_{X,Y} = e^{-x-y}$ za $(x,y) \in A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ in $f_{X,Y}(x,y) = 0$ za $(x,y) \notin A$. Preslikava $\Phi(x,y) = (x/y, y)$ preslika množico $A$ bijektivno na $A$. Tako kot preslikava $\Phi$ je gladek tudi njen inverz $\Phi^{-1}(u,v) = (uv, v)$. Za $(u,v) \in A$ je absolutna vrednosti Jacobijeve determinante inverza $\Phi^{-1}$ enaka $v$. Za $(u,v) \in A$ velja torej*

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\Phi^{-1}(u,v))v = ve^{-v(1+u)},$$

*za $(u,v) \notin A$ pa velja $f_{U,V}(u,v) = 0$.*

b. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $U$.

*Rešitev: Velja $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv$, kar posledično pomeni, da je $f_U(u) = 0$ za $u \leq 0$. Za $u > 0$ pa velja*

$$f_U(u) = \int_0^\infty ve^{-v(1+u)}\,dv = \cdots = \frac{1}{(1+u)^2}.$$

*Pri tem integriramo 'per partes'.*

**3.** (20) Mečemo pošteno igralno kocko, pri čemer so vsi meti med sabo neodvisni. Naj bo $X$ dolžina začetnega niza, tj. dolžina niza samih enakih številk na začetku. Npr., če na začetku vržemo $3, 3, 3, 3, 3, 4, \ldots$, potem je $X = 5$.

a. (10) Naj bo $H_1$ dogodek, da v prvem metu vržemo enico. Izračunajte $E(X|H_1)$.

*Rešitev: Velja*

$$E(X|H_1) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k|H_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\frac{5}{6} = \frac{5}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{6}{5}.$$

*Pri tem smo uporabili enakost* $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ *za* $|x| < 1$, *ki jo dobimo z odvajanjem geometrijske vrste.*

b. (10) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

*Rešitev: Definiramo dogodke* $H_2, \ldots, H_6$ *na podoben način. Iz točke (a) ter simetrije sledi*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} E(X|H_i)P(H_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{5} = 1.2.$$

*Na podoben način izračunamo*

$$\begin{aligned}
E(X^2|H_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k|H_i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{5}{6} \\
&= \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{2\cdot\frac{1}{6}}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^3} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2}\right) = \frac{42}{25}
\end{aligned}$$

*za vsak* $i \in \{1, \ldots, 6\}$. *Pri tem smo uporabili enakost* $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$ *za* $|x| < 1$, *ki jo izpeljemo z dvakratnim odvajanjem geometrijske vrste. Sledi*

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} E(X^2|H_i)P(H_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{42}{25}\cdot\frac{1}{6} = \frac{42}{25}$$

*in posledično* $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6}{25} = 0.24$.

**4.** (20) Imamo 3 koše. Žogo mečemo v koše na slepo. Vsakič zadenemo en koš. Verjetnost, da v posameznem metu zadenemo določen koš, je enaka $1/3$. Meti so med sabo neodvisni. Naj bo $X$ število potrebnih metov, da zadenemo vse koše.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.

*Rešitev: Naj bo $X_2$ število potrebnih metov, da zadenemo drugi različni koš, potem ko smo enega že zadeli. Podobno naj bo $X_3$ število potrebnih metov, da zadenemo zadnji koš, potem ko smo dva različna že zadeli. Tedaj je $X = 1 + X_2 + X_3$ ter $X_2 \sim Geom(2/3)$ in $X_3 \sim Geom(1/3)$. Sledi*

$$E(X) = 1 + E(X_2) + E(X_3) = 1 + 3/2 + 3 = 5.5.$$

b. (10) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $X$.

*Rešitev: Zaradi neodvisnosti slučajnih spremenljivk $X_2$ in $X_3$ velja*

$$G_X(s) = sG_{X_2}(s)G_{X_3}(s) = s\frac{\frac{2}{3}s}{1-\frac{1}{3}s}\frac{\frac{1}{3}s}{1-\frac{2}{3}s} = \frac{2}{9}s^3\frac{1}{(1-\frac{1}{3}s)(1-\frac{2}{3}s)}.$$

*Poskusimo izračunati taki konstanti $A$ in $B$, da bo veljalo*

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{3}s)(1-\frac{2}{3}s)} = \frac{A}{1-\frac{1}{3}s} + \frac{B}{1-\frac{2}{3}s}.$$

*Enostaven izračun nam da $A = -1$, $B = 2$. Sledi*

$$G_X(s) = \frac{2}{9}s^3\left(2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}s\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}s\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{9}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)s^{k+3},$$

*tj.*

$$P(X = k) = \frac{2}{9}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-3}\right)$$

*za $k \in \{3, 4, \ldots\}$.*

**5.** (20) Dan je proces razvejanja $1 = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$, kjer je

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} - \sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte verjetnost izumrtja rodbine.

*Rešitev: Kvadratna enačba*

$$s = G(s) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)s + \frac{1}{2}s^2$$

*ima rešitvi $s = 1$ in $s = 3 - 2\sqrt{2}$. Ker je verjetnost izumrtja enaka najmanjši nenegativni rešitvi, je iskana verjetnost enaka $3 - 2\sqrt{2}$.*

b. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 6)$.

*Rešitev: Zapišemo lahko $G(s) = b(s + a)^2$, kjer je $a = \sqrt{2} - 1$ in $b = 1/2$. Ker je*

$$\begin{aligned} G(G(s)) &= b(b(s+a)^2 + a)^2 \\ &= b(b^2(s+a)^4 + 2ab(s+a)^2 + a^2) \\ &= b^3 s^4 + 4ab^3 s^3 + (6a^2b^3 + 2ab^2)s^2 + p(s), \end{aligned}$$

*kjer je $p$ ustrezen polinom stopnje $\leq 1$, ugotovimo, da je koeficient polinoma*

$$G_{Z_3}(s) = G(G(G(s))) = b\left(b^3 s^4 + 4ab^3 s^3 + (6a^2b^3 + 2ab^2)s^2 + p(s) + a\right)^2$$

*pri $s^6$ enak*

$$b(2b^3(6a^2b^3 + 2ab^2) + 16a^2b^6) = 28a^2b^7 + 4ab^6 = \frac{76 - 48\sqrt{2}}{2^7}.$$

*Sledi*

$$P(Z_3 = 6) = \frac{76 - 48\sqrt{2}}{2^7} \doteq 0.063.$$

**6.** (20) Pošteno igralno kocko vržemo 1000 krat, pri čemer so meti neodvisni. Naj bo $X$ vsota padlih pik.

a. (10) Ocenite verjetnost $P(X \geq 3400)$.

*Rešitev: Naj bo $X_i$ število padlih pik v $i$-tem metu, tj. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kjer je $n = 1000$. Tedaj je $\mu := E(X_i) = 3.5$ in $\sigma := \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{91/6 - 3.5^2}$. Sledi*

$$\begin{aligned} P(X \geq 3400) &\doteq 1 - P\left(\frac{3400 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &\doteq 1 - \Phi(-1.85) \\ &= \Phi(1.85) \doteq 0.9678. \end{aligned}$$

b. (10) Določite tako število $a$, da bo verjetnost $P(3500 - a \leq X \leq 3500 + a)$ znašala približno 0.95.

*Rešitev: Podobno kot zgoraj dobimo*

$$\begin{aligned} 0.95 &\doteq P(3500 - a \leq X \leq 3500 + a) \\ &\doteq P\left(\frac{3500 + a - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) - P\left(\frac{3500 - a - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{n}}\right) - P\left(\frac{-a}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &\doteq 2\Phi(\frac{a}{\sigma\sqrt{n}}) - 1, \end{aligned}$$

*iz česar sledi $\Phi(\frac{a}{\sigma\sqrt{n}}) \doteq 0.9750$ oz. $\frac{a}{\sigma\sqrt{n}} \doteq 1.96$. Sledi $a \doteq 106$.*