Ime in priimek: ____________________ Vpisna št.: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

Računski izpit

16. avgust 2021

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik. Veliko uspeha!

Naloga	a.	b.	c.	d.	Total
1.			●	●	
2.			●	●	
3.			●	●	
4.				●	
5.			●	●	
6.			●	●	
Skupaj					

1. (20) Mečemo pošteno kocko, meti so neodvisni. Naj bo A_k dogodek, da v metih $k-5, k-4, \ldots, k$ dobimo zaporedje $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Temu bomo rekli *sosledje, zaključeno v k-tem metu.* Za fiksen n označimo
$A = \{\text{v prvih } n \text{ metih je vsaj eno zaključeno sosledje}\}$.

a. (10) Naj bo $6 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le n$. Katere so možne vrednosti za $P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_r})$?

   Rešitev: če se kateri koli dve množici $\{k_i, k_i + 1, \ldots, k_i + 5\}$ prekrivata, je verjetnost danega preseka enaka 0. Če ne, pa mora biti $6r \le n$. Če so vse množice $\{k_i - 5, k_i - 4, \ldots, k_i\}$, kjer je $i = 1, 2, \ldots, r$, disjunktne, so dogodki A_i neodvisni z verjetnostjo $\left(\frac{1}{6}\right)^6$. V tem primeru pa je

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_r}) = \left(\frac{1}{6}\right)^{6r} .$$

b. (10) Izračunajte verjetnost $P(A)$. Vsot vam ni treba eksplicitno izračunati.

   Namig: da preštejete izbire množic $\{k_i - 5, k_i - 4, \ldots, k_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, ki se ne prekrivajo, združite vsako od izbranih množic v en sam element.

   Rešitev: uporabimo formulo za vključitve in izključitve. Za dani r, za katerega je $6r \le n$, moramo prešteti izbire množic $\{k_i - 5, k_i - 4, \ldots, k_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, ki se ne prekrivajo. Po namigu se to ujema s številom izbir r izmed $n - 5r$ elementov. Sledi

$$P(A) = \sum_{r;\ 6r \le n} (-1)^{r-1} \binom{n - 5r}{r} \left(\frac{1}{6}\right)^{6r} .$$

2. (20) Dan je kup 52 kart, v katerem so 4 asi. Kup dobro premešamo. Naj bo X položaj prvega, Y pa položaj zadnjega asa, oboje šteto od zgoraj navzdol.

a. (10) Za $1 \le k \le 49$ izračunajte verjetnosti $P(X = k)$.

Rešitev:

Prvi način: *zaradi simetrije prvih k kart od zgoraj tvori enostavni slučajni vzorec iz množice 52 kart. Porazdelitev števila asov med temi k kartami je hipergeometrijska* $\mathrm{HiperGeom}(k, 4, 52)$. *Dogodek $\{X > k\}$ se zgodi, če v omenjenem vzorcu velikosti k ni asov. Sledi*

$$P(X > k) = \frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}}$$

in

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \frac{\binom{48}{k-1}}{\binom{52}{k-1}} - \frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}} = \frac{4}{49-k}\,\frac{\binom{48}{k}}{\binom{52}{k}}\,,$$

pri čemer interpretiramo $\binom{a}{b} = 0$, če je $b > a$.

Drugi način: *gledamo položaje asov v kupu, pri čemer asov ne ločimo. Tako je vseh možnih razporeditev asov v kupu $\binom{52}{4}$, tistih, pri katerih je najbolj zgornji as na k-tem mestu od zgoraj, pa je $\binom{52-k}{3}$. Tako je*

$$P(X = k) = \frac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$$

in da se preveriti, da je to isto kot pri prvem načinu.

b. (10) Za $1 \le k \le 48$ in $k - l \ge 3$ izračunajte verjetnosti $P(Y \le l \mid X = k)$. Zapišite še porazdelitev para (X, Y).

Rešitev: pogojno na dogodek $\{X = k\}$ so med preostalimi $52-k$ kartami natanko trije asi in vsi njihovi medsebojni položaji so enako verjetni. Pogojna verjetnost $P(Y \le l \mid X = k)$ je zato enaka verjetnosti, da so vsi ti trije asi na položajih $k+1, k+2, \ldots, l$. Torej je

$$P(Y \le l \mid X = k) = \frac{\binom{49-k}{l-k-3}}{\binom{52-k}{l-k}} = \frac{\binom{l-k}{3}}{\binom{52-k}{3}}\,,$$

pri čemer interpretiramo $\binom{a}{b} = 0$, če je $b < 0$; spet se da preveriti, da se obe obliki ujemata. Končno je

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = l) &= P(X = k)\big(P(Y \le l \mid X = k) - P(Y \le l-1 \mid X = k)\big) \\ &= \frac{12}{(49-k)(l-k)}\,\frac{\binom{48}{k}\binom{49-k}{l-k-3}}{\binom{52}{k}\binom{52-k}{l-k}} = \frac{\binom{l-k-1}{2}}{\binom{52}{4}}\,. \end{aligned}$$

Rezultat v slednji obliki pa lahko dobimo tudi neposredno: če gledamo razporeditve štirih asov v kupu, je vseh možnih $\binom{52}{4}$, takih, pri katerih je $X = k$ in $Y = l$, pa je $\binom{l-k-1}{2}$.

3. (20) Naj bosta X in Z neodvisni z $X \sim \exp(1)$ in $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

a. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajnega vektorja

$$\left(Z, \sqrt{2XZ^2}\right) .$$

Rešitev: preslikava

$$\Phi(x,z) = \left(z, \sqrt{2xz^2}\right)$$

bijektivno preslika množico $(0,\infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *na množico* $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times (0,\infty)$. *Njen inverz je*

$$\Phi^{-1}(z,w) = \left(\frac{w^2}{2z^2},\ z\right)$$

in ima Jacobijevo determinanto

$$J_{\Phi^{-1}}(z,w) = -\frac{w}{z^2} .$$

Če označimo $W := \sqrt{2XZ^2}$, *nam transformacijska formula da*

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{w}{z^2} e^{-\frac{w^2}{2z^2} - \frac{z^2}{2}} .$$

b. (10) Izračunajte gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $W := \sqrt{2XZ^2}$. Kot znano lahko privzamete, da za $a, b > 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u^3}} e^{-\frac{a}{u} - bu} \, du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}} .$$

Rešitev: integrirati moramo po z. *Ker je integrand za fisken* w *sod v* z, *lahko integriramo samo po* $(0,\infty)$. *Nato uvedemo novo spremenljivko* $z^2 = y$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= 2 \int_0^\infty f(z,w) dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{w}{z^2} e^{-\frac{w^2}{2z^2} - \frac{z^2}{2}} \, dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{w}{2\sqrt{y^3}} e^{-\frac{w^2}{2y} - \frac{y}{2}} \, dy \\
&= \frac{w}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{w^2}} e^{-w} \\
&= e^{-w} .
\end{aligned}$$

4. (20) Zaporedoma mečemo pošteno kocko in privzamemo, da so meti neodvisni. Rečemo, da na k-tem koraku dobimo *sosledje*, če v metih $k-5, k-4, \ldots, k$ dobimo števila pik $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Naj bo X število metov, dokler prvič ne dobimo sosledja, vključno s sosledjem samim.

a. (5) Naj bo $B = \{\text{prvi met je } 1\}$. Poiščite zvezo med $E(X)$ in $E(X \mid B)$.

Rešitev:

Prvi način: *po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$E(X) = E(X \mid B)\, P(B) + E(X \mid B^c)\, P(B^c)\,.$$

Če na prvem metu ne pade ena pika, zaradi neodvisnosti ponovno začnemo čakati na sosledje, zato je $E(X \mid B^c) = 1 + E(X)$. *Če to uporabimo v zgornji formuli, sledi*

$$E(X) = \tfrac{1}{6}\, E(X \mid B) + \tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{6}\, E(X)$$

in po ureditvi

$$E(X) = E(X \mid B) + 5\,.$$

Drugi način: *če je Y število metov, preden prvič vržemo eno piko, za vsak* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *velja* $E(X \mid Y = k) = k + E(X \mid B)$. *Po formuli za popolno pričakovano vrednost je*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(X \mid Y = k)\, P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bigl(k + E(X \mid B)\bigr)\, P(Y = k) \\ &= E(Y) + E(X \mid B)\,. \end{aligned}$$

Ker je $Y + 1 \sim \mathrm{Geom}(1/6)$, *je* $E(Y) = 6 - 1 = 5$ *in dobimo isto kot pri prvem načinu.*

b. (5) Za $j = 1, 2, \ldots, 6$ naj bo $C_j = \{X > 6\} \cap \{\text{šesti met je } j\}$. Izračunajte $P(C_j)$.

Rešitev: za $j = 1, 2, \ldots, 5$ *je* $P(C_j) = \frac{1}{6}$. *Dogodek* C_6 *se zgodi, če na šestem metu dobimo šest pik, na prvih petih pa ne dobimo po vrsti* $1, 2, 3, 4, 5$ *pik. Zaradi neodvisnosti sledi*

$$P(C_6) = \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^5\right) \cdot \frac{1}{6}\,.$$

c. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: naj bo B_j *dogodek, da v prvih* j *metih dobimo zaporedje* $1, 2, \ldots, j$: *velja torej* $B_1 = B$. *Nadalje naj bo* $B_{j,k}$ *dogodek, da v prvih* j *metih dobimo zaporedje* $1, 2, \ldots, j$, *v* $(j+1)$*-tem metu pa dobimo* k. *Tedaj je:*

$$\begin{aligned} E(X \mid B_{j,1}) &= j + E(X \mid B) = j - 5 + E(X)\,, \\ E(X \mid B_{j,j+1}) &= E(X \mid B_{j+1})\,, \end{aligned}$$

za $k \in \{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{1, j+1\}$ *pa je:*

$$E(X \mid B_{j,k}) = j + 1 + E(X)\,.$$

Lotimo se zdaj računanja pogojnih pričakovanih vrednosti $E(X \mid B_j)$. *Očitno je* $E(X \mid B_6) = 6$, *za* $j = 1,2,3,4,5$ *pa izhajamo iz:*

$$E\big[X\mathbf{1}_{B_j}\big] = \sum_{k=1}^{6} E\big[X\mathbf{1}_{B_{j,k}}\big]\,,$$

torej

$$E(X \mid B_j)\,P(B_j) = \sum_{k=1}^{6} E(X \mid B_{j,k})\,P(B_{j,k})\,,$$

kar nam da

$$\begin{aligned} E(X \mid B_j) &= \sum_{k=1}^{6} E(X \mid B_{j,k})\,\frac{P(B_{j,k})}{P(B_j)} \\ &= \sum_{k=1}^{6} E(X \mid B_{j,k})\,P(B_{j,k} \mid B_j) \\ &= \tfrac{1}{6}\big(j - 5 + E(X)\big) + \tfrac{1}{6}\,E(X \mid B_{j+1}) + \tfrac{4}{6}\big(j + 1 + E(X)\big) \\ &= \tfrac{5}{6}j - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6}\,E(X) + \tfrac{1}{6}\,E(X \mid B_{j+1})\,. \end{aligned}$$

Dobili smo rekurzivno zvezo med temi pogojnimi verjetnostmi. Induktivno lahko dokažemo, da je

$$E(X \mid B_j) = j + \big(1 - 6^{j-6}\big)E(X)\,.$$

Za $j = 1$ *je torej*

$$E(X \mid B_1) = 1 + \big(1 - 6^{-5}\big)E(X)\,,$$

obenem pa tudi

$$E(X \mid B_1) = E(X \mid B) = E(X) - 5\,.$$

Izenačimo, razrešimo in dobimo $E(X) = 6^6$.

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki z isto porazdelitvijo. Za $k \geq 1$ naj velja

$$P(X = k) = \tfrac{1}{4}\, P(X + Y = k - 1)\,.$$

Naj bo G rodovna funkcija teh dveh slučajnih spremenljivk.

a. (10) Poiščite enačbo, ki ji zadošča ta rodovna funkcija.

Rešitev: obe strani dane relacije pomnožimo z s^k in seštejemo po $k \geq 1$. Če označimo še $P(X = 0) = p$, za levo stran dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\, s^k = G_X(s) - p\,,$$

za desno stran pa dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\, P(X + Y = k - 1)\, s^k = \frac{s}{4}\, G_{X+Y}(s)\,.$$

Ker imata X in Y isto porazdelitev, je $G_{X+Y}(s) = G(s)^2$. Iskana enačba je tako

$$G(s) - p = \frac{s}{4}\, G(s)^2\,.$$

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Namig: upoštevajte, da je $G(1) = 1$, in uporabite Newtonov razvoj:

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k\,; \quad |x| < 1\,.$$

Rešitev: če v enačbo iz prve točke vstavimo $G(1) = 1$, dobimo $p = \frac{3}{4}$. Zdaj pa to vstavimo v zvezo in jo rešimo za splošni s:

$$G(s) = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3s}{4}}\right)}{s}\,.$$

Ker morajo biti koeficienti v razvoju nenegativni in ker je $(-1)^k\binom{1/2}{k} < 0$ za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$, je pravilna izbira negativni predznak korena. Razvoj v potenčno vrsto nam tako da

$$G(s) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} \frac{3^k s^{k-1}}{4^k}$$

in končno

$$P(X = k) = 2(-1)^k \binom{1/2}{k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\,.$$

6. (20) Berti odpre stojnico z igro s tremi kockami. V vsaki igri, ki stane 1 euro, se vse tri kocke vržejo. Če ne pade nobena šestica, Berti obdrži vplačani znesek. Če pade natanko ena šestica, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še en euro. Če padeta natanko dve šestici, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še dva eura. Če pa padejo tri šestice, Berti igralcu vrne vplačani znesek in še 14 eurov. Privzamemo, da so kocke standardne in da so vsi meti neodvisni.

a. (10) Izračunajte pričakovano vrednost in varianco Bertijevega dobička po n igrah.

Rešitev: Naj bo X_i Bertijev dobiček v i-ti igri. Velja:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -14 & -2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{216} & \frac{15}{216} & \frac{75}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix},$$

od koder po krajšem računu dobimo $E(X_i) = 1/36$ in $\mathrm{var}(X_i) = 2735/1296$. Če torej z S_n označimo Bertijev dobiček po n igrah, velja $E(S_n) = n/36$ in $\mathrm{var}(S_n) = 2735n/1296$.

b. (10) Po približno koliko igrah ima Berti s približno 95% verjetnostjo pozitiven dobiček?

Rešitev: Označimo spet število iger z n. Iz centralnega limitnega izreka sledi, da mora približno veljati

$$1 - \Phi\left(\frac{-\frac{1}{36}\,n}{\sqrt{\frac{2735}{1296}\,n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2735}}\right) = 0{,}95$$

oziroma

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2735}} \doteq 1{,}645$$

kar je res, če je n približno 7400.