Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

Računski izpit

12. junij 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in kalkulator.

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Total					

REŠITVE

1. (20) Štirim igralcem razdelimo vsakemu po 13 kart z dobro premešanega kupa 52 standardnih kart. Med 52 kartami so štirje asi.

a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo vsaj en igralec imel vsaj dva asa?

Rešitev: označimo dogodek, ki nas zanima, z A. Nasprotni dogodek je, da ima vsak igralec natanko enega asa. Naj bo A_i dogodek, da ima i-ti igralec natanko enega asa. Iščemo verjetnost

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)\,.$$

Velja

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \\ P(A_2 \mid A_2) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \\ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) &= \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \\ P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 1 \end{aligned}$$

Vstavimo in poenostavimo v

$$P(A^c) = \frac{4! \cdot 13^4}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\,.$$

Iskani odgovor je $1 - P(A^c)$.

b. (10) Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo vsaj en igralec imel vsaj dva asa, pri pogoju, da ima prvi igralec natanko enega asa.

Rev sitev: pogojno delimo trem igralcem karte s kupa 39 kart, med katerimi so trije asi. Oznacimo z B dogodek, da ima vsaj eden od preostalih treh igralcev vsaj dva asa. Podobno kot v prvem delu dobimo

$$P(B^c \mid A_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}}\,,$$

kar se poenostavi v

$$P(B^c \mid A_1) = \frac{3! \cdot 13^3}{39 \cdot 38 \cdot 37}\,.$$

2. (20) Standardni kup 52 kart dobro premešamo in štirim igralcem razdelimo po 13 kart. Naj bo X_i število asov, ki jih ima i-ti igralec za $i = 1, 2, 3, 4$. Med 52 kartami so štirje asi.

a. (10) Poiščite porazdelitev vektorja (X_1, X_2, X_3, X_4).

Rešitev: možni nabori vrednosti slučajnega vektorja so četverice (k_1, k_2, k_3, k_4) s $k_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{4} k_i = 4$. Privzamemo lahko, da prvi igralec dobi prvih 13 kart, drugi drugih 13, ... Med vsemi 52! permutacijami moramo prešteti vse tiste, ki imajo med prvimi 13 kartami k_1 asov, med drugimi 13 k_2 asov, ... Izberimo najprej pozicije za ase. To lahko naredimo na

$$\binom{13}{k_1}\binom{13}{k_2}\binom{13}{k_3}\binom{13}{k_4}$$

načinov. Ase lahko na te pozicije potaknemo na 4! načinov. Ostalih 48 kart je lahko poljubno premešanih, torej na 48! načinov. Sledi

$$P\left(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3, X_4 = k_4\right) = \frac{4! \cdot 48! \cdot \binom{13}{k_1} \cdot \binom{13}{k_2} \cdot \binom{13}{k_3} \cdot \binom{13}{k_4}}{52!}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ za $i \neq j$.

Rešitev:

Prvi način:

Definirajmo

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{če je } n\text{-ti as pri igralcu } i; \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

in

$$J_n = \begin{cases} 1 & \text{če je } n\text{-ti as pri igralcu } j; \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

Zaradi simetrije je

$$P(I_n = 1) = P(J_n = 1) = \frac{1}{4}\,.$$

Ker je $I_n J_n = 0$, je

$$\mathrm{cov}(I_n, J_n) = -\frac{1}{16}\,.$$

Za $n \neq m$ je

$$P(I_m = 1, J_n = 1) = \frac{13^2}{52 \cdot 51}$$

in posledično

$$\mathrm{cov}(I_m, J_n) = \frac{1}{816}\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= \operatorname{cov}\left(\sum_{m=1}^{4} I_m, \sum_{n=1}^{4} J_n\right)\\ &= 4\operatorname{cov}(I_1, J_1) + 12\operatorname{cov}(I_1, J_2)\\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{68}\\ &= -\frac{4}{17}\,.\end{aligned}$$

Drugi način:

Karte i tega in j-tega igralca so naključni vzorec 26 kart izmed vseh kart, zato je $X_i + X_j \sim \mathrm{HiperGeom}(26, 4, 52)$. *Sledi*

$$\operatorname{var}(X_1 + X_2) = 26 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{52 - 26}{52 - 1}\,.$$

Podobno je $X_i \sim \mathrm{HiperGeom}(13, 4, 52)$, *kar pomeni*

$$\operatorname{var}(X_i) = 13 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{52 - 13}{52 - 1}\,.$$

Velja

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{var}(X_i + X_j) - \operatorname{var}(X_i) - \operatorname{var}(X_j)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{16}{17} - \frac{24}{17}\right)\\ &= -\frac{4}{17}\,.\end{aligned}$$

Tretji na vcin:

Ker je $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4$, *je*

$$\operatorname{cov}(X_1, X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 0\,.$$

Zaradi simetrije so vse kovariance enake, z uporabo bilinearnsti pa sledi

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -\operatorname{var}(X_1)\,.$$

Vemo, da je $X_1 \sim \mathrm{HiperGeom}(13, 4, 52)$, *torej je*

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -13 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} \cdot \frac{52 - 13}{52 - 1} = -\frac{4}{17}\,.$$

3. (20) Naj bosta X in Y neodvisni z $X \sim \Gamma(a+b, \lambda)$ in $Y \sim \text{Beta}(a, b)$. Definirajte

$$Z = XY \qquad \text{in} \qquad W = X(1-Y)\,.$$

a. (10) Najdite gostoto slučajne spremenljivke Z.

Rešitev: najdimo najprej gostoto vektorja (X, XY)*. Preslikava*

$$\Phi(x, y) = (x, xy)$$

preslika $(0,\infty)\times(0,1)$ *bijektivno in zvezno odvedljivo na* $(x,z)\colon x>0, 0<z<x$*. Velja*

$$\Phi^{-1}(x, z) = \left(x, \frac{z}{x}\right)$$

in $J_{\Phi^{-1}}(x,z) = 1/x$*. Dobimo*

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} x^{a+b-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} (z/x)^{a-1} (1-z/x)^{b-1} \cdot \frac{1}{x}\,.$$

za $x > 0$ *in* $0 < y < x$*. Gostota* Z *je robna gostota* $f_{X,Z}(x,z)$*. Računamo*

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)} z^{a-1} \int_z^\infty (x-z)^{b-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)} z^{a-1} \int_0^\infty u^{b-1} e^{-\lambda(z+u)} du \\
&= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)} z^{a-1} e^{-\lambda z} \int_0^\infty u^{b-1} e^{-\lambda u} du
\end{aligned}$$

Opazimo, da je gostota sorazmerna z $z^{a-1}e^{-\lambda z}$*, torej gre za* $\Gamma(a,\lambda)$ *porazdelitev. Vse konstante se zmnožijo v* $\lambda^a/\Gamma(a)$*.*

b. (10) Sta slučajnji spremenljivki XY in $X(1-Y)$ neodvisni?

Rešitev: definiramo

$$\Phi(x, y) = (xy, x(1-y))\,.$$

Preslikava preslika območje $(0,\infty)\times(0,1)$ *bijektivno na* $(0,\infty)^2$ *in je zvezno parcialno odvedljiva na tem območju. Velja*

$$\Phi^{-1}(z, w) = \left(z+w, \frac{z}{z+w}\right)$$

in

$$J_{\Phi^{-1}}(y, w) = -\frac{1}{z+w}\,.$$

Označimo $W = X(1-Y)$. *Transformacijska formula da*

$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z,w) &= f_X(z+w) f_Y\left(\frac{z}{z+w}\right) \cdot \frac{1}{z+w} \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}(z+w)^{a+b-1} e^{-\lambda(y+w)} \cdot \\ &\qquad \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\left(\frac{z}{z+w}\right)^{a-1}\left(1-\frac{z}{z+w}\right)^{b-1}\frac{1}{z+w} \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)} z^{a-1} e^{-\lambda z} w^{b-1} e^{-\lambda w}\,. \end{aligned}$$

Gostota (Y,W) *je produkt funkcije odvisne samo od* z *in funkcije odvisne samo od* w *na* $(0,\infty)^2$*, iz česar sledi neodvisnost. Razberemo tudi* $W \sim \Gamma(b,\lambda)$.

4. (20) Naj bo Π slučajna permutacija n elementov. Za dano permutacijo π je torej $P(\Pi = \pi) = \frac{1}{n!}$. Par (i, j) z $1 \leq i < j \leq n$ imenujemo inverzijo permutacije π, če velja $\pi(i) > \pi(j)$. Naj bo S_n število vseh inverzij slučajne permutacije Π.

a. (10) Za fiksen $2 \leq j \leq n$ definirajte slučajne spremenljivke

$$X_j = \sum_{i=1}^{j-1} I_{ij} \,,$$

kjer so indikatorji I_{ij} definirani kot

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{če je } \pi(i) > \pi(j) \\ 0 & \text{sicer} \,. \end{cases}$$

Pokažite, da so spremenljivke $X_2, \ldots, X_n$ med sabo neodvisne in najdite njihovo porazdelitev. Pokažite, da je $S_n = X_2 + \cdots + X_n$.

Rešitev: naj bodo $k_2, \ldots, k_n$ nenegativna cela števila s $k_j < j$. Iz zadnjega števila k_n lahko ugotovimo, da je $\pi(n) = n - k_n$. Ko enkrat vemo $\pi(n)$, lahko iz k_{n-1} rekonstruiramo pozicijo $\pi(n-1)$. Nadaljujemo in sklepamo, da števila $k_1, k_2, \ldots, k_n$ natanko določajo permutacijo. Sledi

$$P\left(X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n\right) = \frac{1}{n!} \,.$$

Za vsak j je število $\Pi(j)$ porazdeljeno enakomerno na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sledi najprej

$$\Pi(X_n = k) = P(\Pi(n) = n - k) = \frac{1}{n}$$

za $k = 0, 1, \ldots, n$. Seštejemo

$$\sum_{k_n=0}^{n-1} P\left(X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n\right) = \frac{1}{(n-1)!} \,.$$

Če torej iz permutacije n elementov "odstranimo" n, sicer pa vrstnega reda ne spreminjamo, dobimo slučajno permutacijo $n - 1$ elementov. Po indukciji sledi

$$P(X_j = k) = \frac{1}{j}$$

za $0 \leq k < j$. Enakost $S_n = X_2 + \cdots + X_n$ je preštevanje v nekoliko drugačnem vrstnem redu.

b. (10) Izračunajte $E(S_n)$ in $\mathrm{var}(S_n)$.

Rešitev: iz prvega dela sledi, da je

$$E(X_j) = \frac{j-1}{2}$$

in

$$\mathrm{var}(X_j) = \frac{j^2 - 1}{12} \,.$$

Sledi

$$E(S_n) = \frac{n(n-1)}{4}$$

in

$$\operatorname{var}(S_n) = \frac{n\,(-5 + 3\,n + 2\,n^2)}{72}\,.$$

5. (20) V preprostem modelu epidemij predpostavljamo, da se vsak posameznik v populaciji velikosti n v prvem valu okužb okuži z verjetnostjo p neodvisno od ostalih. V drugem valu okužb se vsak še neokužen posameznik okuži z verjetnostjo enako deležu v prvem valu okuženih posameznikov neodvisno od ostalih. Naj bo X število okuženih posameznikov po prvem valu okužb, Y pa število vseh okuženih posameznikov po obeh valih okužb. Iz besedila izhaja, da je

$$P(Y = l | X = k) = \binom{n-k}{l-k} \left(\frac{k}{n}\right)^{l-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-l}$$

za $0 \leq k \leq l \leq n$, kjer interpretiramo $0^0 = 1$.

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} E(Y|X = k) &= \sum_{l=k}^{n} l P(Y = l|X = k) \\ &= \sum_{l=k}^{n} l \binom{n-k}{l-k} \left(\frac{k}{n}\right)^{l-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-l} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (k+i) \binom{n-k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k-i} \\ &= k + \frac{(n-k)k}{n} \,. \end{aligned}$$

Uporabili smo znano pričakovano vrednost binomske slučajne spremenljivke.

b. (10) Izračunajte $E(Y)$.

Rešitev: Ker je $X \sim \mathrm{Bin}(p)$, *po formuli za popolno pričakovano vrednost sledi*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} E(Y|X = k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{(n-k)k}{n}\right) P(X = k) \\ &= E(X) + \frac{1}{n} E(X(n - X)) \\ &= np - \frac{1}{n}\left(nE(X) - E(X^2)\right) \\ &= np - \frac{1}{n}\left(nE(X) - \mathrm{var}(X) - E(X)^2\right) \\ &= np - \frac{1}{n}\left(n^2 p - npq - n^2 p^2\right) \\ &= np + \frac{1}{n} \cdot n(n-1)pq \\ &= np + (n-1)pq \,. \end{aligned}$$

6. (20) Predlagana je naslednja igra na srečo: nasprotnika A in B bosta vsak zase vrgla pošten kovanec 1000-krat. Naj bo X število grbov igralca A in Y število grbov igralca B. Če je $|X - Y| \leq 15$, zmaga A, sicer zmaga B.

a. (10) Pri metu dveh kovancev so 4 možni izidi: GG, GŠ, ŠG, ŠŠ. Vsak izid ima verjetnost 1/4. Dopolnite stavek: Razlika $X - Y$ je kot vsota _____ slučajnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem z vračanjem iz škatle

$$\Big|\ \boxed{}\ \ \boxed{}\ \ \boxed{}\ \ \boxed{}\ \Big|$$

Rešitev: Pri vsakem metu dveh kovancev se razlika v številu grbov igralca A in igralca B ne spremeni (oba dobita grb ali oba številko) z verjetnostjo $1/2$*, razlika se poveča z verjetnostjo* $1/4$ *in zmanjša z verjetnostjo* $1/4$*. Škatla je*

$$\Big|\ \boxed{-1}\ \ \boxed{0}\ \ \boxed{0}\ \ \boxed{1}\ \Big|$$

b. (10) Aproksimirajte verjetnost, da zmaga igralec A.

Rešitev: povprečje škatle je $\mu = 0$*, standardni odklon pa* $\sigma = \sqrt{1/2}$*. Označimo vsoto naključnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem* $n = 1000$ *listkov iz škatle, z* S_{1000}*. Iz centralnega limitnega izreka sledi*

$$\begin{aligned}
P(|X - Y| \leq 15) &= P(|S_{1000}| \leq 15) \\
&= P(-15 \leq S_{1000} \leq 15) \\
&= P\left(-\frac{15}{\sqrt{1000/2}} \leq \frac{S_{1000}}{\sqrt{1000/2}} \leq \frac{15}{\sqrt{1000/2}}\right) \\
&\approx P(-0,67 \leq Z \leq 0,67) \\
&= \Phi(0,67) - \Phi(-0,67) \\
&\doteq 0,5\,.
\end{aligned}$$