Ime in priimek: ________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Računski izpit

11. junij 2025

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami na obeh straneh.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.				•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Pri igri *Bingo75* dobi igralec kartico s 25 različnimi števili med 1 in 75 kot na spodnji sliki. Na kartici sta označena vzorca *Diagonala* s petimi polji. V igri potem naključno izberejo 50 števil med 1 in 75, tako da so vsi nabori 50 števil enako verjetni. Igralec dobi izplačilo, če so izbrana vsa števila na vsaj eni Diagonali.

16	10	72	75	2
50	39	34	42	47
48	5	43	40	44
32	57	3	62	4
73	30	19	65	21

16	10	72	75	2
50	39	34	42	47
48	5	43	40	44
32	57	3	62	4
73	30	19	65	21

Slika 1: kartica, ki jo dobi igralec, z označenima diagonalama.

a. (10) Z binomskim simboli izrazite verjetnost, da igralec dobi izplačilo.

Rešitev: označimo z A dogodek, da so izbrana vsa števila na prvi diagonali, in z B dogodek, da so izbrana vsa števila na drugi diagonali. Velja

$$P(A) = P(B) = \frac{\binom{70}{45}}{\binom{75}{50}} = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{75}{5}} = \frac{50!\,70!}{45!\,75!}\,.$$

Podoben razmislek da

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{66}{41}}{\binom{75}{50}} = \frac{\binom{50}{9}}{\binom{75}{9}} = \frac{50!\,66!}{41!\,75!}\,.$$

Iskana verjetnost je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

b. (10) Manjšo tolažilno nagrado dobi igralec, če je v vsaki vrstici izbrano število z vsaj ene diagonale. Z binomskimi simboli izrazite verjetnost, da se to zgodi.

Rešitev: za $i = 1, 2, 3, 4, 5$ naj bo

$$A_i = \{\textit{v i-ti vrstici je izbrano število z vsaj ene diagonale}\}\,.$$

Iščemo verjetnost dogodka $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$. Pri tem se splača pogojevati na A_3, ne pa tudi na ostale dogodke, saj število pokritih polj, ki jih zadevajo, ni fiksno. Pišimo torej

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_3)\,P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \mid A_3)\,.$$

Velja $P(A_3) = 2/3$, pogojno na A_3 pa je aktualnih še 74 števil, med katerimi se jih izbere 49 in vse možne izbire so enako verjetne.

Za dogodke A_1, A_2, A_4 in A_5 velja, da je lažje računati verjetnosti presekov njihovih komplementov kot verjetnosti presekov teh dogodkov samih. Zato uporabimo formulo za vključitve in izključitve (pogojno na A_3). Upoštevajoč simetrijo, dobimo

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5 \mid A_1) \\
&\qquad = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_4^c \cup A_5^c \mid A_3) \\
&\qquad = 1 - \binom{4}{1} P(A_1^c \mid A_3) + \binom{4}{2} P(A_1^c \cap A_2^c \mid A_3) - \binom{4}{3} P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_4^c \mid A_3) \\
&\qquad\qquad + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_4^c \cap A_5^c \mid A_3)\,.
\end{aligned}
$$

Končno je

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_3 \cap A_5) \\
&\qquad = \frac{2}{3}\left[1 - 4\,\frac{\binom{72}{49}}{\binom{74}{49}} + 6\,\frac{\binom{70}{49}}{\binom{74}{49}} - 4\,\frac{\binom{68}{49}}{\binom{74}{49}} + \frac{\binom{66}{49}}{\binom{74}{49}}\right] \\
&\qquad = \frac{2}{3}\left[1 - 4\,\frac{\binom{25}{2}}{\binom{74}{2}} + 6\,\frac{\binom{25}{4}}{\binom{74}{4}} - 4\,\frac{\binom{25}{6}}{\binom{74}{6}} + \frac{\binom{25}{8}}{\binom{74}{8}}\right] \\
&\qquad = \frac{2}{3}\Bigg[1 - 4\cdot\frac{25\cdot 24}{74\cdot 73} + 6\cdot\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{74\cdot 73\cdot 72\cdot 71} - 4\cdot\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{74\cdot 73\cdot 72\cdot 71\cdot 70\cdot 69} \\
&\qquad\qquad + \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{74\cdot 73\cdot 72\cdot 71\cdot 70\cdot 69\cdot 68\cdot 67}\Bigg]\,.
\end{aligned}
$$

2. (20) Pošten kovanec mečemo, dokler ne padeta dve zaporedni številki. Meti so med seboj neodvisni. Označimo z N število metov.

a. (5) Izračunajte $P(N = 2)$ in $P(N = 3)$.

Rešitev: Dogodek $\{N = 2\}$ se ujema z dogodkom, da je v prvem in drugem metu padla številka. Dogodek $\{N = 3\}$ pa se ujema z dogodkom, da je v prvem metu padel grb, v drugem in tretjem metu pa številka. Sledi

$$P(N = 2) = \frac{1}{4}\,, \qquad P(N = 3) = \frac{1}{8}\,.$$

b. (5) Za $n \geq 3$ utemeljite rekurzivno formulo

$$P(N = n) = \frac{P(N = n - 1)}{2} + \frac{P(N = n - 2)}{4}\,.$$

Rešitev: za $n = 3, 4, \ldots$ pa dogodek $\{N = n\}$ razdelimo na dva poddogodka:

- *V prvem metu pade grb, nato pa potrebujemo še natanko $n - 1$ metov, da padeta dve zaporedni številki.*
- *V prvem metu pade številka, v drugem grb, nato pa potrebujemo še natanko $n - 2$ metov, da padeta dve zaporedni številki.*

Od tod dobimo rekurzivno formulo

$$P(N = n) = \frac{P(N = n - 1)}{2} + \frac{P(N = n - 2)}{4}\,.$$

c. (10) Izrazite verjetnosti $P(N = n)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, s Fibonaccijevim zaporedjem $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Namig: delite z 2^n.

Rešitev: Zaporedje $a_n := 2^n\, P(N = n)$ zadošča rekurzivni zvezi

$$a_2 = a_3 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,$$

od koder dobimo, da je $a_n = F_{n-1}$ oziroma $P(N = n) = \dfrac{F_{n-1}}{2^n}$.

3. (20) Predpostavite, da sta slučajni spremenljivki U in Z neodvisni z $U \sim \exp(1)$ in $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Kot znano privzemite, da je za $a > 0$ in $b \geq 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-au-\frac{b}{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

Definirajte $X = \sqrt{2U}Z$.

a. (10) Poiščite gostoto para (U, X) in nato izpeljite gostoto slučajne spremenljivke X.

   Rešitev: definirajmo preslikavo

$$\Phi(u,z) = \left(u, \sqrt{2u}z\right)\,.$$

   Preslikava bijektivno preslika $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *nase in je ustrezno zvezno parcialno odvedljiva. Računamo*

$$\Phi^{-1}(u,x) = \left(u, \frac{x}{\sqrt{2u}}\right)$$

   in posledično

$$J_{\Phi^{-1}}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{2u}}\,.$$

   za $u > 0$ *in* $x \in \mathbb{R}$. *Sledi*

$$f_{U,X}(u,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} e^{-\frac{x^2}{4u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2u}}\,.$$

   Gostoto X *izračunamo kot robno gostoto. Iz znanega integrala preberemo, da je*

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}\,.$$

b. (10) Naj bosta X in Y neodvisni in enako porazdeljeni. Izračunajte gostoto vsote $S = X + Y$.

   Namig: računajte po formuli

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x) dx\,.$$

   Rešitev: računamo lahko po formuli

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x) dx\,.$$

Zaradi simetrije bo $f_S(s) = f_S(-s)$. *Predpostavimo* $s \geq 0$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x)dx \\
= &\ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-|x-s|}dx \\
= &\ \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2x-s}dx + \int_{0}^{s} e^{-s}dx + \int_{s}^{\infty} e^{-2x+s}dx\right) \\
= &\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{-s} + se^{-s} + \frac{1}{2}e^{-s}\right) \\
= &\ \frac{1}{4}(1+s)e^{-s}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$f_S(s) = \frac{1}{4}(1+|s|)e^{-|s|}\,.$$

4. (20) V posodi imamo kroglice m različnih barv. Števila kroglic posameznih barv so $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Označimo $N = B_1 + B_2 + \cdots + B_m$. Iz posode naključno in brez vračanja izberemo n kroglic, tako da so vsi nabori n kroglic enako verjetni. Z X označimo število kroglic prve barve, z Y pa število različnih barv med izbranimi kroglicami. Za $k = 1, 2, \ldots, n$ definirajte

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta izbrana kroglica prve barve;} \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

za $l = 1, 2, \ldots, m$ pa

$$J_l = \begin{cases} 1 & \text{če je } l\text{-ta barva zastopana med izbranimi kroglicami;} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (15) Izračunajte $\mathrm{cov}(I_k, J_l)$.

Namig: za izračun $P(J_l = 1 \mid I_k = 1)$ razmislite kakšna je porazdelitev $X_l\,|_{I_k=1}$.

Rešitev: vemo, da je k-ta kroglica z enako verjetnostjo katera koli kroglica, zato je

$$P(I_k = 1) = E(I_k) = \frac{B_1}{N}\,.$$

Če z X_l označimo število kroglic barve l, je $X_l \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B_l, N)$. Posledično je

$$P(J_l = 1) = E(J_l) = 1 - P(X_l = 0) = 1 - \frac{\binom{N-B_l}{n}}{\binom{N}{n}}\,.$$

Potrebujemo še $E(I_k J_l)$. Zapišemo

$$P(I_k = 1, J_l = 1) = P(J_l = 1 \mid I_k = 1) P(I_k = 1)\,.$$

Očitno je

$$P(J_1 = 1 \mid I_k = 1) = 1\,,$$

za $l \geq 2$ pa je $X_l\,|_{I_k=1} \sim \mathrm{HiperGeom}(n-1, B_l, N-1)$. Posledično je

$$P(J_l = 1 \mid I_k = 1) = 1 - P(X_l = 0 \mid I_k = 1) = 1 - \frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}}\,.$$

Sledi

$$E(I_k J_1) = E(I_k) = \frac{B_1}{N}$$

in

$$\mathrm{cov}(I_k, J_1) = \frac{B_1}{N} \frac{\binom{N-B_1}{n}}{\binom{N}{n}}\,,$$

za $l \geq 2$ pa je

$$E(I_k J_l) = \frac{B_1}{N} \left(1 - \frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}} \right)$$

in

$$\mathrm{cov}(I_k, J_l) = \frac{B_1}{N} \left(-\frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}} + \frac{\binom{N-B_l}{n}}{\binom{N}{n}} \right) = -\frac{B_1 B_l}{N^2} \frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}}\,.$$

b. (5) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$. Dovolj je, da rezultat izrazite z *enojno* vsoto.

Rešitev: velja $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$ *in* $Y = \sum_{l=1}^{m} J_l$. *Z uporabo bilinearnosti kovariance sledi*

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, Y) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \mathrm{cov}(I_k, J_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{cov}(I_k, J_1) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=2}^{m} \mathrm{cov}(I_k, J_l) \\
&= n \, \frac{B_1}{N} \left(\frac{\binom{N-B_1}{n}}{\binom{N}{n}} - \sum_{l=2}^{m} \frac{B_l}{N} \, \frac{\binom{N-B_l-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}} \right).
\end{aligned}$$

5. (20) V igri na srečo je možno zadeti bonus igri, torej to, da igramo dvakrat brez plačila stave. Verjetnost za bonus igri je $p < \frac{1}{2}$. Bonus igri sta identični izhodiščni igri, tako da lahko znotraj njiju spet zadenemo bonus igri. Predpostavljamo, da v primeru, ko igralec zadene bonus igro, odigra to igro in vse morebitne vgnezdene bonus igre, preden gre naprej. Izidi vseh iger so neodvisni med sabo. Lahko si mislimo, da ima vsaka igra lahko 0 ali 2 "potomca".

a. (10) Naj bo X število vseh iger, ki jih bo igralec odigral s prvo stavo in naj bo Y število bonus iger na prvem koraku. Izračunajte

$$E\left(s^X \mid Y = 0\right) \qquad \text{in} \qquad E\left(s^X \mid Y = 2\right)\,,$$

Rešitev: besedilo je identično procesu razvejanja, pri katerem je število potomcev nič z verjetnostjo $q = 1 - p$ ali dva z verjetnostjo p. Iščemo porazdelitev števila vseh posameznikov v procesu razvejanja. Naj bo Y število bonus iger na prvem koraku. Velja

$$E\left(s^X \mid Y = 0\right) = s \qquad \text{in} \qquad E\left(s^X \mid Y = 2\right) = sG_X(s)^2\,,$$

ker se v primeru bonus igre pojavita neodvisni identični drevesi še enkrat.

b. (10) Izpeljite

$$G_X(s) = qs + psG_X^2(s)\,.$$

in izračunajte $E(X)$.

Rešitev: po formuli za popolno pričakovano vrednost in točki a. velja

$$G_X(s) = qs + psG_X^2(s)\,.$$

Enačbo rešimo in dobimo

$$G_X(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}\,.$$

Iz Newtonove formule sledi, da moramo pri rešitvah kvadratne enačbe vzeti minus. Sledi

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} 4^k p^k q^k s^{2k-1}\,.$$

Za izračun $E(X)$ uporabimo povezavo $E(X) = G'_X(1)$. Najlaže je, če odvajamo zvezo iz besedila naloge na levi in desni po s, kar da

$$G'_X(s) = q + pG_X(s) + 2psG_X(s)G'_X(s)\,.$$

Ko $s \uparrow 1$, dobimo enačbo

$$E(X) = q + p + 2pE(X)\,,$$

iz česar sledi

$$E(X) = \frac{1}{1 - 2p}\,.$$

6. (20) Ponujena vam je naslednja igra na srečo: iz škatle, v kateri je veliko število listkov s števili, lahko naključno izberete 1000 listkov z vračanjem. Če je vsota izbranih števil med vključno a in $a+100$, dobite stavo, sicer jo izgubite. Število a si lahko še izberete. O škatli veste le to, da je povprečje 0,1 in standardni odklon 1,5811.

a. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da boste stavo dobili, če si izberete $a = 0$? Stavo torej dobite, če je vsota med vključno 0 in 100.

Rešitev: uporabimo centralni limitni izrek. Označimo vsoto s S_{1000}. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned} P(0 \leq S_n \leq 100) &= P(-100 \leq S_{1000} - 100 \leq 0) \\ &= P(-\frac{100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq 0) \\ &\approx P(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= 0,48\,. \end{aligned}$$

b. (10) Katera izbira za a je za vas najugodnejša? Utemeljite in izračunajte približno verjetnost za dobitek za izbrani a.

Rešitev: če si predstavljamo histogram za vsoto S_{1000}, *vemo da bo simetričen okrog pričakovane vrednosti* $\mu = 100$, *višine blokov pa bodo padale na vsako stran. Ker smemo izbrati le bloke z intervala dolgega 100, bomo seveda izbrali najvišje bloke okrog* μ, *torej interval od 50 do 150. Računamo*

$$\begin{aligned} &P(50 \leq S_n \leq 150) \\ &= P(-50 \leq S_{1000} - 100 \leq 50) \\ &= P(-\frac{50}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{50}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811}) \\ &\approx P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 0,68\,. \end{aligned}$$