Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

11. junij 2019

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: □□□□□□□□

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

REŠITVE

1. (20) Za okroglo mizo je $2n$ stolov. Na večerjo pride n parov, ki jih gostitelj naključno posede za mizo. Naj bo X_n število parov, ki sedijo diametralno. Označite $p(n,k) = P(X_n = k)$ za $0 \leq k \leq n$.

a. (10) Izračunajte $P(X_n = 0)$. Dobljenih vsot vam ni treba poenostavljati.

Namig: izračunajte najprej verjetnost nasprotnega dogodka.

Rešitev: Naj bo $A = \{X_n > 0\}$ in definirajmo

$$A_i = \{\textit{na } i\textit{-tem in } (n+i)\textit{-tem stolu sedi par}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$. Velja $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Potrebujemo verjetnost $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i)$. Prešteti je treba permutacije $2n$ elementov, ki ustrezajo zgornjemu preseku. Med n pari izberemo i parov, v vsakem paru enega od obeh in jih posedemo pa stolih $1, 2, \ldots, i$. To lahko naredimo na

$$\binom{n}{i} 2^i i!$$

načinov. Ostalih $2n - 2i$ ljudi lahko posedemo na preostale stole poljubno, torej na $(2n - 2i)!$ načinov. Sledi, da je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) = \frac{\binom{n}{i} 2^i i!(2n-2i)!}{(2n)!} \, .$$

Po formuli za vključitve in izključitve in zaradi simetrije je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\binom{n}{i}^2 2^i i!(2n-2i)!}{2n)!} \, .$$

b. (10) Izračunajte $P(X_n = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Dobljenih vsot vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Izberemo $2k$ stolov, na katerih sedijo pari diametralno, ostale pa posedemo tako, da nobeden od parov ne sedi diametralno. Izbir diametralnih stolov je $\binom{n}{k}$. Za različne izbire k parov diametralnih stolov so zgoraj opisani dogodki disjunktni, njihova unija pa je točno dogodek, katerega verjetnost moramo izračunati. Preštevanje ugodnih permutacij nam da

$$\binom{n}{k}^2 2^k k! \cdot p(n-k, 0)(2n-2k)! \, .$$

Sledi

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}^2 2^k k! \cdot b(n-k, 0)(2n-2k)!}{(2n)!}\,.$$

Upoštvali smo, da moramo potem, ko posedemo k parov diametralno, ostale posesti tako, da nobeden od parov ne sedi diametralno. Lahko si mislimo, da izbranih k diametralnih stolov odstranimo, ostalih $n-k$ parov pa posedemo tako, da nobena dva ne sedita na diametralnih stolih. To vprašanje pa je enako vprašanju iz prvega dela, le za $n-k$ parov.

2. (20) Naj bodo $\xi_1, \xi_2, \ldots$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, enakomerno porazdeljene na množici $\{1, 2, \cdots, m\}$, kjer je $m > 1$ dano število, torej

$$P(\xi_k = i) = \frac{1}{m}$$

za $i = 1, 2 \ldots, m$.

a. (10) Definirajte $B_r = \{\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r\}$ za $r \leq m$. Izračunajte verjetnost dogodkov B_r.

Rešitev: Opazimo, da je

$$B_r = \cup_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq m} \{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_r = k_r\} \ .$$

Dogodki v uniji so disjunktni in imajo vsi verjetnost m^{-r}. Izbir naraščjočih r-teric je $\binom{m}{r}$. Sledi, da je

$$P(B_r) = \binom{m}{r} \left(\frac{1}{m}\right)^r \ .$$

b. (10) Definirajte

$$A_r = \{\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r\} \cap \{\xi_{r+1} \leq \xi_r\} \, .$$

Izračunajte $P(A_r)$.

Rešitev: Velja

$$A_1 = B_r \backslash B_{r+1} \, ,$$

kjer je $B_{m+1} = \emptyset$. Ker je $B_{r+1} \subset B_r$, je

$$P(A_r) = \binom{m}{r} \left(\frac{1}{m}\right)^r - \binom{m}{r+1} \left(\frac{1}{m}\right)^{r+1} \ .$$

3. (20) Slučajni vektor (X, Y) naj ima gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)}} \left(e^{\frac{\rho xy}{1-\rho^2}} + e^{-\frac{\rho xy}{1-\rho^2}} \right)$$

za $|\rho| < 1$ in $\rho \neq 0$.

a. (10) Izračunajte robni porazdelitvi in določite, ali sta X in Y neodvisni.

Rešitev: Robna porazdelitev slučajne spremenljivke X je integral dvorazsežne:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)}} \left(e^{\frac{\rho xy}{1-\rho^2}} + e^{-\frac{\rho xy}{1-\rho^2}} \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Zdaj pa opazimo, da je v obeh integralih gostota bivariatne normalne porazdelitve, pri čemer sta obe robni porazdelitvi v obeh primerih standardni normalni. Ko upoštevamo še faktorja pred integraloma, dobimo

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Podobno dobimo, da je tudi Y standardna normalna. Ker za $\rho \neq 0$ velja

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)\,,$$

spremenljivki X in Y nista neodvisni.

b. (10) Definirajte $(U, V) = (X+Y, X-Y)$. Izračunajte gostoto slučajnega vektorja (U, V) in slučajne spremenljivke U.

Rešitev: Preslikava

$$\Phi(x,y) = (x+y, x-y)$$

zadošča vsem pogojem transformacijske formule in njena inverzna preslikava je

$$\Phi^{-1}(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}(u+v),\ \tfrac{1}{2}(u-v) \right)\,,$$

Jacobijeva determinanta pa je

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{u^2+v^2}{4(1-\rho^2)}} \left(e^{\frac{\rho(u^2-v^2)}{4(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{\rho(u^2-v^2)}{4(1-\rho^2)}} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(e^{-\frac{(1-\rho)u^2+(1+\rho)v^2}{4(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{(1+\rho)u^2+(1-\rho)v^2}{4(1-\rho^2)}} \right) . \end{aligned}$$

Robno porazdelitev spet dobimo z integracijo. Račun razpade na dva integrala. Brez konstant je prvi integral enak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1-\rho)u^2+(1+\rho)v^2}{4(1-\rho^2)}}\, dv = e^{-\frac{(1-\rho)u^2}{4(1-\rho^2)}} \cdot \sqrt{2\pi}\sqrt{2-2\rho}\,,$$

podobno pa pride tudi drugi integral. Ko pokrajšamo in seštejemo, dobimo

$$f_U(u) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{1+\rho}}\, e^{-\frac{u^2}{4(1+\rho)}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{1-\rho}}\, e^{-\frac{u^2}{4(1-\rho)}}\,.$$

4. (20) Za okroglo mizo sedi $n \geq 3$ kockarjev. Vsak vrže svojo kocko; vse kocke so standardne (kar pomeni, da lahko pade od 1 do 6 pik), poštene (kar pomeni, da so vsa števila enako verjetna) in neodvisne. Označimo z W število parov sosednjih kockarjev, za katere velja, da oba vržeta sosednji števili pik. Števili iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sta sosednji, če se razlikujeta za 1 (3 in 4 sta torej sosednji, 6 in 1 pa ne, prav tako tudi ne 3 in 3).

a. (10) Izračunajte $E(W)$.

Rešitev: Pišimo $W = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, kjer je I_i indikator dogodka, da i-ti kockar in njegov desni sosed vržeta sosednji števili pik. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}\,,$$

torej je:

$$E(W) = \frac{5n}{18}\,.$$

b. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(W)$.

Rešitev: Za izračun variance sta dva standardna načina. Lahko nastavimo:

$$\operatorname{var}(W) = E(W^2) - \big(E(W)\big)^2$$

in

$$E(W^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E(I_i I_j)\,.$$

Slučajna spremenljivka $I_i I_j$ je indikator dogodka, da za i-tega in j-tega kockarja velja, da s svojima desnima sosedoma vržeta sosednje število pik. Za $i = j$ je verjetnost tega dogodka seveda enaka $5/18$; takih členov je v zgodnji dvojni vsoti seveda n. Če sta i-ti in j-ti kockar sosednja, gre za verjetnost dogodka, da meti treh sosednjih kockarjev tvorijo verigo sosednjih števil. Verjetnost tega dogodka je:

$$E(I_i I_j) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12}\,;$$

takih členov je v zgornji vsoti $2n$. Če pa i in j nista niti enaka niti sosednja, je verjetnost tega dogodka enaka $(5/18)^2 = 25/324$; takih členov je v zgornji vsoti $n^2 - 3n$ (tukaj potrebujemo predpostavko, da je $n \geq 3$). Seštejemo in dobimo:

$$E(W^2) = n \cdot \frac{5}{18} + 2n \cdot \frac{1}{12} + (n^2 - 3n) \cdot \frac{25}{324} = \frac{25n^2 + 69n}{324}\,.$$

Odštejemo in dobimo:

$$\operatorname{var}(W) = \frac{23n}{108}\,.$$

Do tega pa lahko pridemo tudi s kovariancami – nastavimo:

$$\operatorname{var}(W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(I_i, I_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(I_iI_j) - E(I_i)E(I_j)\,.$$

Za $i = j$ *je* $\operatorname{cov}(I_i, I_j) = 5/18 - (5/18)^2 = 65/324$. *Če sta* i*-ti in* j*-ti kockar sosednja, je* $\operatorname{cov}(I_i, I_j) = 1/12 - 25/324 = 1/162$. *V vseh ostalih primerih pa je* $\operatorname{cov}(I_i, I_j) = 0$*: dogodka, da soseda* i*-tega in soseda* j*-tega kockarja vržeta sosednje število pik, sta neodvisna. Seštejemo in dobimo:*

$$\operatorname{var}(W) = n \cdot \frac{65}{324} + 2n \cdot \frac{1}{162} = \frac{23n}{108}\,,$$

kar je isto kot prej.

5. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja. Označite $G(s) = E(s^{Z_1})$.

a. (5) Naj bo $G_n(s)$ rodovna funkcija spremenljivke Z_n. Pokažite, da velja

$$G_{m+n}(s) = G_n(G_m(s)) .$$

Rešitev: S predavanj vemo, da je

$$G_n = G \circ G \circ \cdots \circ G .$$

Trditev sledi.

b. (15) Označite $\mu_n = E(Z_n)$ in $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(Z_n)$. Pokažite, da velja

$$\mu_{m+n} = \mu_n \mu_m$$

in

$$\sigma_{m+n}^2 = \mu_m \sigma_n^2 + \mu_n^2 \sigma_m^2 .$$

Namig: Odvajanje rodovnih funkcij.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$G'_{m+n}(s) = G'_n(G_m(s))\, G'_m(s) .$$

Upoštevajmo

$$\lim_{s \uparrow 1} G_X(s) = 1 \qquad \textit{in} \qquad \lim_{s \uparrow 1} G'_X(s) = E(X)$$

in dobimo

$$\lim_{s \uparrow 1} G_{m+n}(s) = G'_n(1)\, G'_m(1) .$$

Prva trditev sledi. Za dokaz druge trditve upoštevajmo, da je

$$\lim_{s \uparrow 1} G''_X(s) = E\left(X(X-1)\right) .$$

Z dvakratnim odvajanjem dobimo

$$G''_{m+n}(s) = G''_n(G_m(s))(G'_m(s))^2 + G'_n(G_m(s))\, G''_m(s) .$$

Ko $s \uparrow 1$, dobimo

$$\sigma_{m+n}^2 + \mu_{m+n}^2 - \mu_{m+n} = (\sigma_n^2 + \mu_n^2 - \mu_n)\mu_m^2 + \mu_n(\sigma_m^2 + \mu_m^2 - \mu_m) .$$

Uredimo člene in upoštevamo $\mu_{m+n} = \mu_m \mu_m$ in dobimo želeno zvezo.

6. (20) Kovanec mečemo $2n$-krat. Meti so neodvisni, verjetnost za grb pa je $p = 1/2$. Označimo število grbov v $2n$ metih z S_{2n}.

a. (10) Kolikšen mora biti n, da bo približno veljalo

$$P(S_{2n} = n) = 0,01\,?$$

Ocenite z uporabo $\Phi(0,0125) = 0,505$.

Rešitev: Metanje kovancev je kot izbiranje listkov iz škatle, v kateri sta samo števili 0 *in* 1*. Vemo, da je $\mu = 1/2$ in $\sigma = 1/2$. Računamo*

$$\begin{aligned}
P(S_{2n} = n) &= P\big(n - \frac{1}{2} \leq S_{2n} \leq n + \frac{1}{2}\big) \\
&= P\big(-\frac{1}{2} \leq S_{2n} - n \leq \frac{1}{2}\big) \\
&= P\big(-\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{S_{2n} - n}{\sqrt{2n}/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\big) \\
&\approx P\big(-\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq Z \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\big) \\
&= \Phi\big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) - \Phi\big(-\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) \\
&= 2\Phi\big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) - 1 \\
&= 0,01\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\Phi\big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\big) = 0,505\,,$$

torej

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = 0.0125\,.$$

Izračunamo $n = 3183$.

b. (10) Naj bo $n = 5000$. Kolikšna je verjetnost, da se število grbov in število številk v $2n = 10000$ metih razlikujeta za 100 ali manj?

Namig: Kolikšno mora biti število grbov, da se število grbov in število številk razlikujeta 100 ali manj?

Rešitev: Nalogo najprej malenkost prevedemo. Števili se bosta razlikovali za manj kot 100*, če bo število grbov med* 4950 *in* 5050*. Računamo*

$$\begin{aligned}
P(4950 \leq S_{2n} \leq 5050) &= P(-50 \leq S_{2n} - 5000 \leq 50) \\
&= P\Big(-\frac{50}{\sqrt{2n}/2} \leq \frac{S_{2n} - 5000}{\sqrt{2n}/2} \leq \frac{50}{\sqrt{2n}/2}\Big) \\
&= P\Big(-1 \leq \frac{S_{2n} - 5000}{\sqrt{2n}/2} \leq\leq 1\Big) \\
&\approx P\big(-1 \leq Z \leq\leq 1\big) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= 0,68\,.
\end{aligned}$$