Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT (MA, MF)

Verjetnost

Računski izpit

4. september 2024

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa dosežete 100%. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in kalkulator.

Question	a.	b.	c.	d.	Total
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.				•	
6.			•	•	
Total					

1. (20) Igralca A in B imata vsak standarden kup 52 kart. Oba igralca kup dobro in neodvisno eden od drugega premešata in hkrati začneta polagati karte na mizo eno po eno z vrha svojega kupa. Z uporabo formule za vključitve in izključitve izračunajte spodnje verjetnosti.

a. (10) Naj bo C dogodek, da igralca vsaj enkrat hkrati na mizo položita asa. Med 52 standardnimi kartami so 4 asi. Izračunajte verjetnost $P(C)$. Izrazov, ki jih dobite, vam ni treba poenostavljati.

Rešitev: Definirajmo dogodke

$$C_i = \{i\text{-ti karti, ki ju igralca položita na mizo, sta obe as}\}$$

za $i = 1, 2, \ldots, 52$. *Velja* $C = \cup_{i=1}^{52} C_i$. *Uporabimo formulo za vključitve in izključitve, pri čemer opazimo, da so preseki* 5 *ali več različnih dogodkov izmed* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *vedno prazni. Po simetriji imajo tudi vsi preseki* k *različnih dogodkov enako verjetnost. Sledi*

$$\begin{aligned} P(C) &= \binom{52}{1} P(C_1) - \binom{52}{2} P(C_1 \cap C_2) \\ &\quad + \binom{52}{3} P(C_1 \cap c_2 \cap C_3) - \binom{52}{4} P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4)\,. \end{aligned}$$

Računamo po vrsti z uporabo neodvisnosti

$$P(C_1) = P\left(\textit{prvi karti igralcev sta asa}\right) = \left(\frac{4}{52}\right)^2,$$

$$P(C_1 \cap C_2) = P\left(\textit{prvi dve karti igralcev sta asa}\right) = \left(\frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}\right)^2,$$

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P\left(\textit{prve tri karte igralcev so asi}\right) = \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{52 \cdot 51 \cdot 50}\right)^2$$

in

$$P(C_1 \cap \cdots \cap C_4) = P\left(\textit{prve štiri karte igralcev so asi}\right) = \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\right)^2.$$

V skupnem seštevku dobimo

$$P(C) = \frac{15229}{54145} \doteq 0,281263\,.$$

b. (10) Naj bo D dogodek, da igralca vsaj enkrat hkrati na mizo položita isto karto. Izračunajte verjetnost $P(D)$.

Rešitev: Naloga je popolnoma enaka primeru, ko gre na ples 52 *parov in ob odhodu vsaka ženska v temi naključno izbere moškega. Na predavanjih smo izračunali, da je*

$$P(D) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{52!}\,.$$

Izračunamo in sledi

$$P(D) = \frac{33323980890946889067569406831865526501968231424164303372618082878 3}{527177615496365219422618541545122659969212453861982208000000000000} \doteq 0{,}6321\,.$$

2. (20) V posodi je b belih in 3 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

a. (10) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

Rešitev: možne vrednosti za slučajni spremenljivki so pari (k,l), za katere velja $k \geq 0$, $l \geq 0$ in $k+l \leq b$. Dogodek $\{X=k, Y=l\}$ se zgodi, če izberemo najprej k belih kroglic, potem rdečo, potem l belih in spet rdečo kroglico. Označimo $b+3=n$. Računamo

$$
\begin{aligned}
&P(X=k, Y=l) = \\
&= \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot \frac{3}{n-k} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{(b-k)(b-k-1)\cdots(b-k-l+1)}{(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-l)} \cdot \frac{2}{(n-k-l-1)} \\
&= \frac{b(b-1)\cdots(b-k-l+1)\cdot 3\cdot 2}{n(n-1)\cdots(n-k-l-1)} \\
&= \frac{b!\cdot(n-k-l-2)!\cdot 3\cdot 2}{(b-k-l)!\cdot n!}\,.
\end{aligned}
$$

b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

Namig: Porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

Rešitev: slučajna spremenljivka X je število belih kroglic do prve rdeče. Dogodek $\{X=k\}$ se zgodi, če dobimo najprej k belih kroglic in nato rdečo. Označimo spet $n=b+3$. Dobimo

$$
P(X=k) = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)\cdot 3}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}
$$

za $k=0,1,\ldots,b$. Po drugi strani dobimo porazdelitvi spremenljivk X in Y kot robni porazdelitvi dvorazsežne porazdelitve. Ker je ta porazdelitev simetrična funkcija k in l, morata biti porazdelitvi X in Y enaki. Ker poznamo porazdelitev X, poznamo tudi porazdelitev Y.

3. (20) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{za } x,y > 0 \text{ in } x+y < 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Kot znano privzemite, da preslikava Φ, dana z

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{x}{x+y}, 1-x-y\right),$$

preslika območje $G = \{(x,y) \colon x,y > 0 \text{ in } x+y<1\}$ bijektivno na kvadrat $H = (0,1)^2$.

a. (10) Izračunajte gostoto vektorja

$$(U,V) = \left(\frac{X}{X+Y}, 1-X-Y\right).$$

Utemeljite, da sta U in V neodvisni.

Rešitev: najprej potrebujemo inverz $\Phi^{-1}(u,v)$, kar pomeni, da moramo rešiti enačbi

$$\frac{x}{x+y} = u \quad \textit{in} \quad 1-x-y = v$$

za $(u,v) \in (0,1)^2$. Dobimo

$$x = x = u(1-v) \quad \textit{in} \quad y = (1-u)(1-v).$$

Sledi

$$J_{\Phi^{-1}}(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ -(1-v) & -(1-u) \end{pmatrix} = -(1-v).$$

Po transformacijski formuli je

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 2(1-v) & \textit{za } (u,v) \in (0,1)^2 \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Gostota je produkt členov odvisnih od u (kar je kar 1) in v, torej sta U in V neodvisni.

b. (10) Pokažite, da imajo X, Y in $1-X-Y$ enako gostoto.

Rešitev: za X in Y iz formule za robne gostote sledi za $0 < x,y < 1$

$$f_X(x) = 2(1-x) \quad \textit{in} \quad f_Y(y) = 2(1-y).$$

Iz prvega dela naloge sledi, da je gostota $V - 1 - X - Y$ enaka

$$f_V(v) = 2(1-v).$$

4. (20) Igralca A in B imata vsak standarden kup 52 kart. Oba igralca kup dobro in neodvisno eden od drugega premešata in hkrati začneta polagati karte na mizo eno po eno z vrha svojega kupa.

a. (10) Naj bo X število polaganj kart, ko igralca A in B na mizo hkrati položita asa. Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \textit{če na } k\textit{-tem polaganju oba igralca na mizo položita asa,} \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

S to definicijo je $X = I_1 + \cdots + I_{52}$. *Zaradi simetrije imajo vsi indikatorji enako pričakovano vrednost, zato je*

$$E(X) = 52 \cdot E(I_1) = 52 \cdot P(I_1 = 1) = 52 \cdot \left(\frac{4}{52}\right)^2 .$$

b. (10) Naj bo Y število asov, ki jih ima v preostalem kupu igralec B po vključno polaganju, ko igralec A prvič na mizo položi asa. Naj bo N polaganje kart, ko A prvič na mizo položi asa. Kot znano privzemite, da je $E(N) = \frac{53}{5}$. Izračunajte $E(Y)$.

Namig: za nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko N *velja formula* $E(N) = \sum_{n\geq 1} P(N \geq n)$.

Rešitev: definirajmo indikatorje

$$J_k = \begin{cases} 1 & \textit{igralec B na } k\textit{-tem polaganju na mizo položi asa in } N \geq k \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Vsota $J_1 + \cdots + J_{49}$ *je število asov, ki jih bo B položil na mizo do vključno trenutka, ko bo A na mizo položil prvega asa. Sledi, da je* $Y = 4 - J_1 + \cdots + J_{49}$. *Zaradi neodvisnosti in simetrije je*

$$P(J_k = 1) = \frac{4}{52} P(N \geq k) .$$

Sledi, da je

$$E\left(J_1 + \cdots + J_{49}\right) = \frac{4}{52} \sum_{k=1}^{49} P(N \geq k) .$$

Za vsako nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko N *je*

$$E(N) = \sum_{n\geq 1} P(N \geq n) .$$

Slučajna spremenljivka N *ima možne vrednosti* $1, 2, \ldots, 49$. *Iz zgornje formule sledi, da je*

$$\sum_{k=1}^{49} P(N \geq k) = E(N) = \frac{53}{5} .$$

Dobimo

$$E\left(J_1 + \cdots + J_{49}\right) = \frac{4}{52} \cdot \frac{53}{5}\,.$$

Končni rezultat je

$$E(Y) = 4 - E\left(J_1 + \cdots + J_{49}\right) = \frac{207}{65}\,.$$

5. (20) Danih je n posod, ki vse vsebujejo a rdečih in b belih kroglic. Na slepo izvlečemo kroglico iz prve posode in jo prestavimo v drugo, nato na slepo iz druge prav tako prestavimo naključno izbrano kroglico v tretjo posodo. Postopek nadaljujemo do prestavitve iz predzadnje v zadnjo posodo.

a. (5) Za $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ naj bo X_j število rdečih kroglic, izvlečenih iz j-te posode. Izračunajte $E(X_1)$ in za $j \geq 2$ še $E(X_j|X_{j-1} = k)$, kjer je k katerakoli možna vrednost X_{j-1}.

Rešitev: Ko bomo pri danem pogoju izbirali iz j-te posode, bo v njej $a + k$ rdečih in $b + (1 - k)$ belih kroglic. Pri tem je $k = 0, 1$. Sledi, da je

$$E(X_j|X_{j-1} = k) = P(X_j = 1|X_{j-1} = k) = \frac{a + k}{a + b + 1}\,.$$

Dobimo še

$$E(X_1) = P(X_1 = 1) = \frac{a}{a + b}\,.$$

b. (10) Za vse $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ izračunajte $E(X_j)$.

Rešitev: Dobimo

$$E(X_j) = \sum_{k=0}^{1} E(X_j|X_{j-1} = k)P(X_{j-1} = k)\,,$$

torej

$$E(X_j) = \frac{a}{a + b + 1} + \frac{E(X_{j-1})}{a + b + 1}\,.$$

Računamo po vrsti.

$$E(X_2) = \frac{a}{a + b + 1} + \frac{a}{(a + b)(a + b + 1)} = \frac{a}{a + b}\,.$$

Po indukciji je potem

$$E(X_j) = \frac{a}{a + b}$$

za vse j.

c. (5) Iz zadnje posode na slepo izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je rdeča?

Namig: izrazite

$$P\left(\textit{kroglica izvlečena iz zadnje posode je rdeča}|X_{n-1} = k\right)$$

za možne vrednosti k slučajne spremenljivke X_{n-1}.

Rešitev: Označimo $A =$ kroglica izvlečena iz zadnje posode je rdeča. Velja

$$P(A|X_{n-1} = k) = \frac{a + k}{a + b + 1}\,.$$

Sledi

$$P(A) = P(A|X_{n-1} = 0)P(X_{n-1} = 0) + P(A|X_{n-1} = 1)P(X_{n_1} = 1)\,.$$

Če poračunamo, sledi

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\,.$$

6. (20) Francoska ruleta ima 37 polj, med katerimi je 18 črnih, 18 rdečih in eno zeleno. Igralnica želi uvesti novo igro. Igralec, ki stavi en evro, bi v primeru, ko se kroglica ustavi na črnem polju, stavo izgubil. V primeru, ko bi se kroglica ustavila na rdečem polju, bi igralcu vrnili stavo, v primeru pa, ko bi se kroglica ustavila na zelenem polju, pa bi igralnica igralcu vrnila stavo in primaknila še x evrov. Privzamemo, da je cilinder pošten, torej da so vse polja enako verjetna in so zaporedne igre med sabo neodvisne.

a. (5) Pri katerem x bi bila igra poštena, torej bi bil pričakovani dobitek igralnice v eni igri enak nič?

Rešitev: Označimo z X_1 zaslužek igralnice po eni igri. Iz

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 18/37 & 18/37 & 1/37 \end{pmatrix}$$

izračunamo $E(X_1) = \dfrac{x-18}{37}$, *torej je igra poštena pri* $x = 18$.

b. (15) Pri katerem x ima igralnica po 10.000 neodvisnih igrah dobiček z verjetnostjo približno 95%?

Rešitev: Označimo z X_k zaslužek igralnice po k-ti igri, z S pa zaslužek po 10.000 igrah. Velja $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10000}$. Po centralnem limitnem izreku je S porazdeljen približno normalno z ustrezno pričakovano vrednostjo in varianco. Velja

$$\mathrm{var}(X_1) = \frac{x^2+18}{37} - \left(\frac{x-18}{37}\right)^2$$

ter

$$E(S) = \frac{10000(x-18)}{37} \quad \text{in} \quad \mathrm{var}(S) = 10000\left[\frac{(x^2+18)}{37} - \left(\frac{x-18}{37}\right)^2\right],$$

torej je

$$P(S>0) \approx 1 - \Phi\left(-\frac{E(S)}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}\right) = \Phi\left(\frac{100(x-18)}{\sqrt{37(x^2+18)-(x-18)^2}}\right),$$

torej x izberemo tako, da bo

$$\Phi\left(\frac{100(18-x)}{\sqrt{37(x^2+18)-(x-18)^2}}\right) = 0{,}95$$

oziroma

$$\frac{100(18-x)}{\sqrt{37(x^2+18)-(x-18)^2}} \doteq 1{,}645\,.$$

Očitno mora biti $x < 18$, sicer bi bilo $E(S) \le 0$ in bi imela igralnica dobiček največ z verjetnostjo približno $1/2$. Pri $x < 18$ je zgornja enačba ekvivalentna enačbi

$$10000(18-x)^2 = 1{,}645^2\big(37(x^2+18)-(x-18)^2\big)$$

oziroma

$$(10000 - 36 \cdot 1{,}645^2)x^2 - (360000 + 36 \cdot 1{,}645^2)x + 3240000 - 342 \cdot 1{,}645^2 = 0\,.$$

oziroma

$$9902{,}6\,x^2 - 360097{,}4\,x + 3239075 = 0\,.$$

Ta kvadratna enačba ima numerični rešitvi

$$x_1 \doteq 16{,}31\,, \qquad x_2 \doteq 20{,}05$$

in pravilna bo seveda prva. Za zeleno polje torej igralnica vplačani stavi primakne še 16 evrov in 31 centov.