Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

3. september 2019

Ime in priimek: ________________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Sprehajamo se po množici $\mathbb{Z}$ vseh celih števil na sledeč način. Iz števila i se z verjetnostjo $3/4$ premaknemo v število $i+1$, z verjetnostjo $1/4$ pa v število $i-1$. Slednje velja za vse $i \in \mathbb{Z}$ in neodvisno od predhodnih izbir. Na začetku se nahajamo v številu 0.

a. (10) Za vsako naravno število n izračunjate verjetnost, da se po natanko n korakih nahajamo v številu 15.

Rešitev: Očitno potrebujemo vsaj 15 korakov, da pridemo v število 15. Iskana verjetnost je torej enaka 0 za $n \leq 14$. *Za* $n \geq 15$ *bomo po* n *korakih v številu 15 natanko tedaj, ko se bomo* k*-krat premaknili 'levo' (tj. v smeri padanja) in* $(k+15)$*-krat premaknili 'desno' (tj. v smeri naraščanja), kjer je* $k+(k+15)=n$ *oz.* $k=(n-15)/2$. *V posebnem vidimo, da je iskana verjetnost enaka 0 za vse sode vrednosti* n. *Za lihe vrednosti* $n \geq 15$ *pa je iskana verjetnost enaka*

$$\binom{n}{\frac{n-15}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-15}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+15}{2}}.$$

b. (10) Naj bo X_n število, v katerem se nahajamo po n korakih (tj. $X_0 = 0$). Naj bo

$$T = \inf\{n \geq 0 : |X_n| = 2\}.$$

Pri tem razumemo $\inf \emptyset = \infty$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke T.

Rešitev: Očitno velja $T \geq 2$. *Ker je za lihe* n *liho tudi število* $|X_n|$, *sledi* $P(T = k) = 0$ *za vse lihe* k. *Naj bo sedaj* $k \geq 2$ *sod. Označimo*

$$A_{2i} = \{|X_0| = 0, |X_1| = 1, |X_2| = 0, |X_3| = 1, \ldots, |X_{2i-2}| = 0, |X_{2i-1}| = 1, |X_{2i}| = 0\}$$

ter $a_{2i} = P(A_{2i})$. *Tedaj je*

$$\begin{aligned}
P(\{T = k\}) &= P(\{|X_0| = 0, |X_1| = 1, |X_2| = 0, \ldots, |X_{k-2}| = 0, |X_{k-1}| = 1, |X_k| = 2\}) \\
&= P(A_{k-2} \cap \{|X_{k-1}| = 1\} \cap \{|X_k| = 2\}) \\
&= P(\{|X_{k-1}| = 1\} \cap \{|X_k| = 2\} | A_{k-2}) a_{k-2} \\
&= \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) a_{k-2} \\
&= \frac{5}{8} a_{k-2}.
\end{aligned}$$

Ker je $a_0 = 1$*, sledi* $P(T = 2) = 5/8$*. Za sod* $k \geq 4$ *pa velja*

$$\begin{aligned} a_{k-2} &= P(A_{k-4} \cap \{|X_{k-3}| = 1\} \cap \{|X_{k-2}| = 0\}) \\ &= P(\{|X_{k-3}| = 1\} \cap \{|X_{k-2}| = 0\} | A_{k-4}) a_{k-4} \\ &= \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) a_{k-4} \\ &= \frac{3}{8} a_{k-4}. \end{aligned}$$

Iz rekurzije dobimo $a_{k-2} = (3/8)^{(k-2)/2}$ *in posledično*

$$P(\{T = k\}) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^{(k-2)/2}$$

za vse sode $k \geq 2$*. Ker je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(T = 2i) = \frac{5}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^{i-1} = 1,$$

sledi še $P(T = \infty) = 0$*.*

2. (20) Na slepo izberemo točko iz zaprtega kroga z radijem 1. Tj., izbrana točka je porazdeljena enakomerno na dotičnem krogu, kar pomeni, da je verjetnost, da se izbrana točka nahaja v podliku s ploščino p enaka p/π. Naj bo X razdalja izbrane točke do roba kroga.

a. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Naj bo F_X porazdelitvena funkcija od X. Ker X zavzame le vrednosti iz itervala $[0,1]$, sledi $F_X(t) = P(X \leq t) = 0$ za vse $t < 0$ ter $F_X(t) = P(X \leq t) = 1$ za vse $t \geq 1$. Za $t \in [0,1)$ pa velja

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \frac{\pi - \pi(1-t)^2}{\pi} = 2t - t^2.$$

Za gostoto tako velja $f_X(t) = 2 - 2t$ za $t \in (0,1)$ in $f_X(t) = 0$ sicer.

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

Rešitev: Velja

$$E(X) = \int_0^1 t(2-2t)\,dt = t^2 - \frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. (20) Računalnik bo streljal v 50 tarč. Pri vsakem strelu zadene dano tarčo z verjetnostjo 1/2, neodvisno od predhodnega streljanja. Za vsako tarčo ima na voljo 2 strela. Če dano tarčo zadene že prvič, drugič ne strelja.

a. (10) Naj bo X število tarč, ki jih računalnik zadene. Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Za $1 \le i \le 50$ *naj bo* I_i *enako 1, če računalnik zadene i-to tarčo, in 0 sicer. Tedaj je*

$$I_i^2 = I_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Posledično je $E(I_i) = 3/4$ *in* $var(I_i) = 3/4 - (3/4)^2 = 3/16$*. Ker je* $X = I_1 + \cdots + I_{50}$*, sledi*

$$E(X) = 50 \cdot \frac{3}{4} = 37.5.$$

Ker so slučajne spremenljivke $I_1, \ldots, I_{50}$ *neodvisne, sledi tudi*

$$var(X) = 50 \cdot \frac{3}{16} = 9.375.$$

b. (10) Naj bo Y število strelov računalnika. Izračunajte $E(Y)$ in $\mathrm{var}(Y)$.

Rešitev: Za $1 \le i \le 50$ *naj bo* Z_i *enako 1 oz. 2, če računalnik pri streljanju v i-to tarčo porabi 1 oz. 2 strela. Tedaj je*

$$Z_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Posledično je $E(Z_i) = 3/2$, $E(Z_i^2) = 5/2$ *in* $var(Z_i) = 5/2 - (3/2)^2 = 1/4$*. Ker je* $Y = Z_1 + \cdots + Z_{50}$*, sledi*

$$E(Y) = 50 \cdot \frac{3}{2} = 75.$$

Ker so slučajne spremenljivke $Z_1, \ldots, Z_{50}$ *neodvisne, sledi tudi*

$$var(Y) = 50 \cdot \frac{1}{4} = 12.5.$$

4. (20) Računalnik nam generira niz iz števk 0,1,2, dokler ne izbere dveh enakih števk zaporedoma. V vsakem koraku izbere eno izmed treh števk z enako verjetnostjo in neodvisno od predhodnih izbir. Naj bo X dolžina niza (vključno z zadnjo števko), ki ga računalnik generira. Npr., če je generiran niz enak 10121011, tedaj velja $X = 8$.

a. (10) Za $i \in \{0, 1, 2\}$ naj bo H_i dogodek, da je prvi števka v nizu enaka i. Pokažite, da velja $E(X) = E(X|H_i)$ za vsak $i \in \{0, 1, 2\}$.

   Rešitev: Ker je $P(H_i) = 1/3$ za vsak i in so vrednosti $E(X|H_1)$, $E(X|H_2)$, $E(X|H_3)$ med sabo enake, sledi

$$E(X) = \sum_{i=0}^{2} E(X|H_i)P(H_i) = E(X|H_1) = E(X|H_2) = E(X|H_3).$$

b. (10) Izračunajte $E(X)$.

   Rešitev: Naj bo $Q(A) := P(A|H_0)$ pogojna porazdelitvena mera in E_Q pripadajoča pričakovana vrednost. Za $i \in \{0, 1, 2\}$ naj bo K_i dogodek, da je druga števka v nizu enaka i. Iz točke (a) sledi

$$\begin{aligned}
E(X) &= E_Q(X) \\
&= \sum_{i=0}^{2} E_Q(X|K_i)Q(K_i) \\
&= \frac{1}{3}\left(E_Q(X|K_0) + E_Q(X|K_1) + E_Q(X|K_2)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(E(X|H_0 \cap K_0) + E(X|H_0 \cap K_1) + E(X|H_0 \cap K_2)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2 + (1 + E(X)) + (1 + E(X))\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}E(X),
\end{aligned}$$

   in posledično $E(X) = 4$.

5. (20) Dana sta dva (med sabo neodvisna) procesa razvejanja $1 = Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ in $1 = \overline{Z}_0, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \ldots$, kjer sta rodovni funkciji slučajnih spremenljivk Z_1 oz. $\overline{Z}_1$ enaki

$$G(s) = 0.49 + 0.51s^2 \qquad oz. \qquad \overline{G}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s^3.$$

a. (10) Izračunajte verjetnost izumrtja za vsak proces razvejanja posebej.

Rešitev: Kvadratna enačba $G(s) = s$ ima rešitvi $s_1 = 49/51$ in $s_2 = 1$. Zato je verjetnost izumrtja procesa razvejanja $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ enaka 49/51.

Pri drugem procesu rešujemo enačbo

$$0 = \overline{G}(s) - s = \frac{1}{2}(s^3 - 2s - 1).$$

Ker bo 1 zagotovo ničla zgornjega polinoma, ga delimo z $s - 1$. Dobimo

$$0 = \frac{1}{2}(s-1)(s^2 + s - 1).$$

Preostali ničli dobimo z reševanjem kvadratne enačbe, kar nam da

$$s_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad s_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad s_3 = 1.$$

Verjetnost izumrtja je enaka najmanjši nenegativni rešitvi, ki je v tem primeru enaka

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

b. (10) Najmanj koliko bi morala biti vrednost $Z_0 \in \mathbb{N}$ (pri čemer bi ostalo $\overline{Z}_0 = 1$), da bi bila verjetnost izumrtja procesa $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ manjša od verjetnosti izumrtja procesa $\overline{Z}_0, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \ldots$?

Rešitev: Denimo, da je $Z_0 = n$. Tedaj dani proces razvejanja obravnavamo kot n med sabo neodvisnih procesov razvejanja $Z_0^{(i)}, Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, \ldots$ $(1 \leq i \leq n)$, kjer je $Z_0^{(i)} = 1$ za vsak i in je vsaka slučajna spremenljivka $Z_1^{(i)} = 1$ porazdeljena z rodovno funkcijo G. Za vsak i je seveda verjetnost izumrtja procesa razvejanja $Z_0^{(i)}, Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, \ldots$ enaka

$$a := \frac{49}{51}.$$

Zaradi neodvisnosti je verjetnost izumrtja procesa $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ enaka

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(Z_n^{(1)} = 0, Z_n^{(2)} = 0, \ldots, Z_n^{(n)} = 0) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} P(Z_n^{(1)} = 0)P(Z_n^{(2)} = 0)\cdots P(Z_n^{(n)} = 0) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} P(Z_n^{(1)} = 0) \lim_{n\to\infty} P(Z_n^{(2)} = 0) \cdots \lim_{n\to\infty} P(Z_n^{(n)} = 0) = a^n.
\end{aligned}$$

Ker je

$$a^n < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

natanko tedaj, ko velja

$$n > \frac{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln a} \doteq 12.029,$$

ugotovimo, da je najmanši iskan n *enak* 13*.*

6. (20) Hitra srečka stane 2 EUR. V obtoku je 4% srečk, kjer izplačilo znaša 10 EUR, 10% srečk, kjer izplačilo znaša 5 EUR, pri 50% srečk nam povrnejo 2 EUR, preostale srečke pa so brez dobitka. Ker je srečk v obtoku veliko in ves čas tiskajo nove srečke, lahko privzamemo, da se ti procenti z nakupom novih srečk ne spreminjajo. Prav tako privzamemo, da so srečke dobro premešane.

a. (10) Približno kolikšna je verjetnost, da po nakupu 100 srečk ne bomo v izgubi?

Rešitev: Naj bo X_i čisti dobitek pri i-ti srečki. Tedaj je

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 8 \\ 0.36 & 0.5 & 0.1 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

Posledično velja

$$\begin{aligned} \mu := E(X_i) &= (-2) \cdot 0.36 + 0 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.04 = -0.1, \\ E(X_i^2) &= (-2)^2 \cdot 0.36 + 0^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.1 + 8^2 \cdot 0.04 = 4.9, \\ \sigma := \sqrt{var(X_i)} &= \sqrt{E(X_i^2) - E(X_i)^2} = \sqrt{4.89}. \end{aligned}$$

Naj bo $n = 100$. Iz centralnega limitnega izreka dobimo oceno iskane verjetnosti, ki znaša

$$\begin{aligned} P(0 \leq X_1 + \cdots + X_n) &\doteq 1 - \Phi\left(\frac{0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{489}}\right) \\ &\doteq 1 - \Phi(0.45) \\ &\doteq 1 - 0.6736 \doteq 0.3264. \end{aligned}$$

b. (10) Ocenite največje naravno število n, da bo veljalo

$$P(\text{po nakupu } n \text{ srečk nismo v izgubi}) \geq 0.1.$$

Rešitev: Velja

$$\begin{aligned} P(\textit{po nakupu n srečk nismo v izgubi}) &= P(0 \leq X_1 + \cdots + X_n) \\ &\doteq 1 - \Phi\left(\frac{0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Ker je $\Phi(0.5398) \doteq 0.1$*, sledi* $\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} \doteq 0.5398$ *oz.*

$$n \doteq \left(\frac{0.5398\sigma}{\mu}\right)^2 \doteq 142.49.$$

Iskano število znaša torej približno $n = 142$*.*