FAMNIT - Matematične znanosti

Verjetnost z mero

Seminarska naloga

Navodila

Naloge so sestavni del predmeta. Oceno dobite, ko oddate rešitve.

Izjava: S podpisom potrjujem, da so rešitve moje delo. Ime: ______________________
Podpis: ____________________.

Teorija mere

1. ❍ Za dogodke $A_1, A_2 \dots$ velja $P(A_n) \to 0$ in $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$. Dokažite, da je $P(\limsup_n A_n) = 0$.

2. ◗ Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ neodvisne slučajne spremenljivke in za $1 \le m \le n$ definirajte

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n} X_j \\ S_{m,n} &= \sum_{j=m+1}^{n} X_j \end{aligned}$$

   $(S_{n,n} = 0)$

   a. Naj bo $\epsilon > 0$ and $T = \inf\{1 \le j \le n \colon |S_j| > 2\epsilon\}$, pri čemer je $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Dokažite, da je

   $$\cup_{j=1}^{n} \{T = j, |S_{j,n}| \le \epsilon\} \subset \{|S_n| > \epsilon\}\,.$$

   b. Dokažite Ottavianijevo neenačbo

   $$P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j| > 2\epsilon\right) \le \frac{P(|S_n| > \epsilon)}{\min_{1\le j\le n} P(S_{j,n} \le \epsilon)}\,.$$

3. ◗ Naj bo μ končna mera na $[0,1)$. Ali obstaja taka Borelova množica A, da za vsak interval $[a,b) \subset [0,1)$ velja $\mu([a,b) \cap A) = \frac{\mu([a,b))}{2}$?

4. ● Naj bo λ Lebesgueova mera na $[0,1)$. Ali obstaja taka Borelova podmnožica $A \subset [0,1)$, da za vsak interval $[a,b) \subset [0,1)$ velja

   $$0 < \lambda([a,b) \cap A) < \lambda([a,b))\,?$$

5. ❍ Naj bodo μ_n za $n \ge 1$ pozitivne mere na merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$ in $f \colon S \to \mathbb{R}_+$ merljiva funkcija. Definirajte $\mu = \sum_{n\ge 1} \mu_n$. Pokažite, da je μ mera in velja

   $$\int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{n\ge 1} \int f(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x)\,.$$

6. ◗ Naj bodo $f_n \geq 0$ in $f \geq 0$ merljive funkcije in naj $f_n \to f$, ko $n \to \infty$ s.g.. Predpostavljajte, da velja

$$\int f_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \to \int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)\,,$$

ko $n \to \infty$ in dokažite, da velja

$$\int |f_n(x) - f(x)|\,\mu(\mathrm{d}x) \to 0\,,$$

ko $n \to \infty$. (Trditev je znana kot Scheffféjev izrek).

7. ◗ ☞ Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in naj bo dan π–sistem $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Predpostavimo $\Omega \in \mathcal{A}$. Predpostavite, da družina slučajnih spremenljivk $\mathcal{M}$ izpolnjuje naslednje pogoje:

   (i) $\mathcal{M}$ je vektorski prostor, torej iz $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ sledi $\alpha X_1 + \beta X_2 \in \mathcal{M}$ za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (ii) Če je $X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ naraščajoče zaporedje slučajnih spremenljivk in je $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) < \infty$ za vsak $\omega \in \Omega$, potem je $X \in \mathcal{M}$.

   (iii) $I_A \in \mathcal{M}$ za vsak $A \in \mathcal{A}$.

   Dokažite:

   a. Družina $\mathcal{M}$ vsebuje natanko $\sigma(\mathcal{A})$ merljive slučajne spremenljivke. *Ta trditev je izrek o monotonih razredih.*

   b. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in naj bo Y merljiva glede na $\sigma(X)$. Uporabite (a) za dokaz, da obstaja Borelova funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z $Y = \phi(X)$. *Namig:* $\mathcal{A} = \sigma(X)$.

   c. Če je Y merljiva glede na $\sigma(X)$ in neodvisna od X, kaj lahko rečemo o slučajni spremenljivki Y?

8. ☞ ◗ Naj bo $\mathcal{A}$ algebra dogodkov na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Predpostavljajte, da je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, torej algebra $\mathcal{A}$ generira $\mathcal{F}$.

a. Dokažite, da za poljuben dogodek $A \in \mathcal{F}$ in za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja dogodek $A_\epsilon \in \mathcal{A}$, tak da je

$$P\left((A \cap A_\epsilon^c) \cup A^c \cap A_\epsilon)\right) = P(A \triangle A_\epsilon) < \epsilon\,.$$

b. Naj bo $\{X_t\colon t \in \mathbb{Z}^d\}$ družina neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, pri čemer je $P(X_t = 1) = p$ in $P(X_t = 0) = 1 - p$ za nek $p \in (0,1)$. Predpostavljajte, da je A dogodek v $\sigma(\{X_t\colon t \in \mathbb{Z}^d\})$ invarianten na translacije v naslednjem smislu:

$$I_A = \Phi(X)$$

za neko merjlivo funkcijo na $\Phi\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \to [0,1]$ in velja

$$I_A = \Phi(X^s) \ \text{ s.g.}$$

za vsak $s \in \mathbb{Z}^d$, kjer je $X_t^s = X_{t+s}$. Pokažite, da je ali $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

Namig: Oglejte si najprej Φ, ki so odvisne samo od končno mnogo komponent X. Nato uporabite a.

9. ❍ Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in predpostavimo, da je $E(|X+Y|) < \infty$. Če sta X in Y neodvisni, sledi potem iz predpostavke, da je $E(|X|) < \infty$?

10. ◗ Naj bosta μ in ν končni meri na $[0,1]$ in definirajte za $x \in [0,1]$

$$F(x) = \mu([0,x]) \qquad \text{in} \qquad G(x) = \nu([0,x])$$

Pokažite, da velja formula za integracijo *per partes* oblike

$$\int_{[0,1]} F(x)\nu(\mathrm{d}x) = F(1)G(1) - \int_{[0,1]} G(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_{[0,1]} \mu(\{x\})\, \nu(\mathrm{d}x)\,.$$

Namig: uporabite Fubinijev izrek za funkcijo $1_{(0 \le y \le x \le 1)}$.

11. ◗ Naj bo f merljiva funkcija na kartezičnem produktu $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$. Predpostavite, da sta meri μ in ν σ-končni in velja

$$\int_{S_1} \mu(ds_1) \int_{S_2} |f(s_1,s_2)|\, \nu(ds_2) < \infty\,.$$

Pokažite, da je potem

$$\begin{aligned}\int_{S_1}\mu(ds_1)\int_{S_2}f(s_1,s_2)\,\nu(ds_2) &= \int_{S_1\times S_2}f(s_1,s_2)\,(\mu\times\nu)(ds_1,ds_2)\\ &= \int_{S_2}\nu(ds_2)\int_{S_1}f(s_1,s_2)\,\mu(ds_1)\end{aligned}$$

12. ◗ Naj bosta μ in ν verjetnostni meri meri na kvadratu $[0,1]^2$ in predpostavljajte $\nu \ll \mu$. Naj bosta ν_x in μ_x projekciji danih mer na $[0,1]$ definirani z

$$\mu_x(B) = \mu(B\times[0,1]) \qquad \text{in} \qquad \nu_x(B) = \nu(B\times[0,1])\,.$$

Očitno je tudi $\nu_x \ll \mu_x$. V kakšni zvezi je ta odvod z odvodom

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,?$$

13. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke z $E|X_k| < \infty$ za $k \geq 1$. Naj $X_k \overset{\text{s.g.}}{\to} X$, ko $k\to\infty$. Pokažite, da v primeru, ko je $E|X| < \infty$ in velja $E|X_n| \to E|X|$, ko $n\to\infty$, velja $E|X_n - X| \to 0$, ko $n\to\infty$.

14. Naj bo $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ množica vseh zaporedij ničel in enk. Množico S opremimo s produktno topologijo, kjer na faktorjih $\{0,1\}$ v produktu vzamemo diskretno topologijo. Naj bo P_n projekcija S na n-to komponento. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na S z bazo odprtih množic, ki so končni preseki množic oblike $P_n^{-1}(\{0\})$ in $P_n^{-1}(\{1\})$. Pokažite, da je Borelova σ-algebra generirana z baznimi odprtimi množicami.

15. Naj bo f Lebesgue integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Dokažite, da vrsta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

konvergira absolutno za skoraj vse $x\in\mathbb{R}$.

16. Privzemite, da je $1 \leq p_0 < p_1$. Naj bo za $0<t<1$

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}\,.$$

Dokažite, da iz $f \in L^{p_0}(\mu)\cap L^{p_1}(\mu)$ sledi, da je $f\in L^{p_t}(\mu)$ in velja

$$\|f\|_{p_t} \leq \|f\|_{p_0}^{1-t}\|f\|_{p_1}^{t}\,.$$

Pogojne porazdelitve in pogojna matematična upanja

17. ◗ Naj bo (X,Y) slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{R}^2$ in porazdelitvijo $\mu_{X,Y}$. Naj bo $\mathcal{G} = \sigma(|X|,|Y|)$. Opišite pogojno porazdelitev vektorja (X,Y) glede na σ–algebro $\mathcal{G}$.

18. ◗ Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v poljskem prostoru $(S,\mathcal{S})$ z Borelovo σ–algebro. Privzemite, da obstaja končna grupa (T_α) merljivih transformacij $(S,\mathcal{S})$, takih, da je porazdelitev X invariantna za vsak T_α, torej
$$\mu_X(T_\alpha^{-1}(B)) = \mu_X(B)$$
za vsak $B \in \mathcal{S}$. Naj bo τ družina vseh merljivih podmnožic $(S,\mathcal{S})$, ki so invariantne za vse T_α, torej
$$T_\alpha^{-1}(B) = B\,.$$
   a. Dokažite, da je τ σ–algebra.
   b. Naj bo $\mathcal{G} = X^{-1}\tau$. Opišite pogojno porazdelitev X glede na $\mathcal{G}$.

19. ◗ Naj imata slučajni spremenljivki X in Y s vrednostmi v $\mathbb{R}$ gostoto $f_{X,Y}$. V elementarni verjetnosti je pogojna porazdelitev X glede na $\sigma(Y)$ definirana kot
$$Q(\omega,B) = \begin{cases} \dfrac{\int_B f_{X,Y}(x,Y(\omega))\,\mathrm{d}x}{f_Y(Y(\omega))}\,, & \text{če je } f_Y(Y(\omega)) \neq 0 \\ \nu(B) & \text{sicer,} \end{cases}$$
kjer je ν lahko poljubna verjetnostna mera.
   a. Dokažite po vseh pravilih dlakocepstva, da Q res zadošča definiciji pogojne porazdelitve.
   b. Recimo, da je T celoštevilska slučajna spremenljivka in je funkcija $P(X \leq x, T = n) = \int_{-\infty}^x g_n(u)\,\mathrm{d}u$ za vsak x za neko funkcijo $g_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Pokažite, spet po vseh pravilih dlakocepstva, da je
$$E(T|X) = \psi(X)\,,$$

kjer je

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_X(x)} \sum_{\mathbb{Z}} n \cdot g_n(x) & \text{če je } f_X(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Obstoj gostote f_X spremenljivke X je del naloge.

c. Naj bodo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ med sabo neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z porazdelitveno funkcijo G in zvezno gostoto $g > 0$. Označimo $T = \inf\{n > 0\colon Z_n > Z_0\}$ (vemo, da je $P(T < \infty) = 1$).

$$P(Z_T \leq t, T = n) = \frac{G^{n+1}(t)}{n(n+1)}\,.$$

d. Oznaka 1_Λ pomeni indikator množice Λ. Izračunajte

$$E(1_{(T=n)}|Z_T)\,.$$

20. ☞ ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, enako porazdeljene strogo pozitivne slučajne spremenljivke. Predpostavite $n \geq 3$. Naj bo J celoštevilska slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{1, 2, \ldots, n\}$, za katero velja

$$P(J = j|X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_j}{S_n}\,,$$

kjer je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Definirajte vektor $X^* = (X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)$ s predpisom

$$X_i^* = \begin{cases} X_i, & \text{če } i < J \\ X_{i+1}, & \text{če } i \geq J\,. \end{cases}$$

a. Pokažite, da za poljubno omejeno Borelovo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja

$$E[f(X_J, X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*)] = nE[\frac{X_1}{S_n} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)]\,.$$

b. Naj bo $S_{n-1}^* = X_1^* + \cdots + X_{n-1}^*$. Pokažite, da za poljubne omejene Borelove funkcije $f, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ velja

$$E\left[f(X_J)g(X^*)h(S_{n-1}^*)\right] = nE\left[\frac{X_1}{S_n} f(X_1)g(X_{n-1})h(S_{n-1})\right]\,,$$

kjer je $X_{n-1} = (X_2, \ldots, X_n)$ in $S_{n-1} = X_2 + \cdots + X_n$.

c. Dokažite
$$E\left[g(X^*)|X_J, S^*_{n-1}\right] = E\left[g(X^*)|S^*_{n-1}\right] .$$

d. Sklepajte, da je
$$E\left[f(X_J)g(X^*)|S^*_{n-1}\right] = E\left[f(X_J)|S^*_{n-1}\right] E\left[g(X^*)|S^*_{n-1}\right] .$$

21. ☞ ● Naj bo X slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in naj bo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

    a. Predpostavite $E(X^2) < \infty$ in $E(X|\mathcal{G}) \stackrel{d}{=} X$. Pokažite, da je $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.g.

    b. Predpostavite, da je $E|X| < \infty$ in $E(X|\mathcal{G}) \stackrel{d}{=} X$. Pokažite, da je tudi v tem primeru $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.g.

22. ❍ Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_1 > 0$, $EX_1 = \mu$ in $E(X_1^q) < \infty$ za $1 < q \leq 2$. Dokažite
$$(EX_1)^q \leq E(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j)^q \leq E\left[X_1\left(\frac{X_1 + (n-1)\mu}{n}\right)^{q-1}\right] .$$
Namig: Pogojni Jensen.

23. ◗ Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in $L^2(P)$ Hilbertov prostor vseh slučajnih spremenljivk s končnim drugim momentom.

    a. Naj bo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ poljubna σ–algebra. Dokažite, da je podprostor vseh ekvivalenčnih razredov v $L^2(P)$, ki imajo $\mathcal{G}$–merljivega predstavnika, zaprt.

    b. Naj bo za slučajno spremenljivko $X \in L^2(P)$ spremenljivka $\pi_{\mathcal{G}}(X)$ ortogonalna projekcija X na zaprt podprostor iz a. Pokažite, da je poljuben $\mathcal{G}$–merjiv predstavnik te ortogonalne projekcije v $L^2(P)$ verzija pogojnega matematičnega upanja $E(X|\mathcal{G})$.

c. Ali lahko uporabite b. za dokaz eksistence pogojnega upanja za poljubno spremenljikvo v $L^1(P)$?

d. Interpretirajte formulo

$$\mathrm{var}(X) = E(\mathrm{var}(X|\mathcal{G})) + \mathrm{var}(E(X|\mathcal{G}))$$

v luči zgornje definicije pogojnega matematičnega upanja.

24. ◗ Naj bodo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ neodvisne slučajne spremenljivke in naj za $i = 1, \ldots, n$ velja $\xi_i \sim \Gamma(p_i, \lambda)$. Naj bo $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

a. Opišite pogojno porazdelitev $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ glede na $\sigma(\xi)$.

b. Opišite pogojno porazdelitev $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)/\xi$ glede na $\sigma(\xi)$.

Opomba: Ta pogojna porazdelitev se imenuje Dirichletova porazdelitev s parametrom $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

c. Naj ima vektor $P = (P_1, \ldots, P_n)$ Dirichletovo porazdelitev s parametrom $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Predpostavljajte, da je pogojna porazdelitev vektorja $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ s celoštevilskimi komponentami glede na $\sigma(\mathbf{P})$ multinomialna definirana s

$$P(M_1 = k_1, \ldots, M_n = k_n|\mathbf{P}) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots,k_n!} \prod_{i=1}^n P_i^{k_i}$$

za $\sum_{i=1}^n k_i = n$. Poiščite pogojno porazdelitev vektorja $\mathbf{P}$ glede na $\sigma(\mathbf{M})$.

25. Predpostavljajte, da za integrabilni slučajni spremenljivki X in Y velja $E(X|Y) = Y$ in $E(Y|X) = X$.

a. Dokažite, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} 0 &\leq E[(X-Y)1(Y \leq x < X)] = E[(Y-X)1(X > x, Y > x)] \\ 0 &\geq E[(X-Y)1(X \leq x < Y)] = E[(Y-X)1(X > x, Y > x)] \end{aligned}$$

b. Dokažite, da je $X = Y$ s.g.

26. Naj bodo X_n slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Predpostavite, da je $|X_n| \leq Y$ za vse n in je $EY < \infty$. Predpostavite, da $X_n \to X$ skoraj gotovo, ko $n \to \infty$.

    a. Naj bo $\mathcal{G}_n$ naraščajoče zaporedje σ-algeber z $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$. Naj bo $\mathcal{G}$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Pokažite, da velja skoraj gotovo
    $$E\left(X_n | \mathcal{G}_n\right) \to E\left(X | \mathcal{G}\right) ,$$
    ko $n \to \infty$.

    b. Naj bo $\mathcal{G}_n$ padajoče zaporedje σ-algeber z $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$. Naj bo $\mathcal{G} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Pokažite, da velja skoraj gotovo
    $$E\left(X_n | \mathcal{G}_n\right) \to E\left(X | \mathcal{G}\right) ,$$
    ko $n \to \infty$.

Martingali

27. ● Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)$ pozitivni supermartingal in naj bo $U(a, b)$ število prečkanj intervala (a, b) za $0 < a < b < \infty$. Dokažite Dubinsovo neenakost
$$P(U(a, b) \geq k) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k E \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right) .$$

28. Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ delne vsote zaporedja neodvisnih slučajnih spremenljivk s pričakovano vrednostjo 0. Dokažite naslednje trditve:

    a. $E(S_1^+) \leq E(S_2^+) \leq \cdots \leq E(S_n^+)$.

    b. $P(S_j \geq -2E(S_n^+)) \geq 1/2$ za vse $1 \leq j \leq n$.

    c. Za poljuben $a \geq 0$ je
    $$P(\max_{1 \leq j \leq n} S_j \geq a + 2E(S_n^+)) \leq 2P(S_n \geq a) .$$

29. ● Naj bodo (X_n), (Y_n) in (Z_n) pozitivna adaptirana zaporedja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_n)$. Predpostavljajte $E|X_n| < \infty$ in

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq (1 + Z_n) \cdot X_n + Y_n$$

in $\sum_n Y_n < \infty$ in $\sum_n Z_n < \infty$ s.g. Dokažite, da (X_n) konvergira s.g. proti končni limiti.

Namig: (X_n) je "skoraj" super-martingal.

30. ◗ Dano je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ z vrednostmi na intervalu $(0, 1)$, ki ustrezajo zvezam

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} &= aX_n + (1-b)|X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_n \\ P(X_{n+1} &= aX_n|X_0, X_1, \ldots, X_n) = 1 - X_n \end{aligned}$$

pri čemer je $X_0 = x_0 \in (0, 1)$ konstanta in $0 < a < b < 1$.

a. Dokažite, da je (X_n) ne-negativni supermartingal.
b. Dokažite, da $X_n \to X_\infty$ s.g., ko $n \to \infty$.
c. Izračunajte $P(X_\infty = 0)$.

   Namig: Izračunajte $E(X_\infty)$.

31. ● Predpostavljajte, da igrate ruleto in vedno stavite na rdeče. Če stavite x enot denarja, potem v primeru, da se kroglica ne ustavi na rdečem, izgubite stavo, sicer pa vam stavo vrnejo in dobite še enkrat x enot denarja, tako da ste x enot bogatejši. *Martingalska strategija* predpisuje, da začnemo igrati s stavo 1. Če zgubimo, v naslednji igri stavo podvojimo, torej stavimo 2 enoti. Če spet zgubimo, stavo spet podvojimo. S podvajanjem nadaljujemo, dokler se ne pojavi rdeče ali dokler nam ne zmanjka denarja za podvajanje. V vsaki "rundi" bodisi zaslužimo 1 enoto bodisi nam zmanjka denarja za podvajanje. Verjetnost, da se kroglica ustavi na rdečem je $p = 18/37$.

a. Recimo, da imate na začetku $2^{n+1} - 1$ enot denarja in runde ponavljate, dokler jih dobivate, kakor hitro pa rundo zgubite, odstopite. Kolikšna je verjetnost, da vam bo na ta način uspelo podvojiti vaš denar?

b. Recimo, da uporabljate martingalsko strategijo, ampak se kot strasten kockar ne morete ustaviti. Pokažite, da boste pri poljubni končni začetni vsoti z verjetnostjo 1 izgubili ves denar.

32. ● Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Naj bo $A \in \sigma(X_1, X_2, \ldots)$. V tem primeru lahko zapišemo

$$1_A = \Phi(X_1, X_2, \ldots)\,,$$

kjer je $\phi\colon \mathbb{R}^\infty \to [0,1]$ merljiva glede na ustrezno definirano σ-algebro na $\mathbb{R}^\infty$ (kakšno?). Dogodek A je simetričen, če za vsako permutacijo $\tau \in \mathbb{S}_n$ velja

$$1_A = \Phi(X_1, X_2, \ldots) = \Phi(X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(n)}, X_{n+1}, \ldots)\,.$$

a. Najdite dva primera simetričnih dogodkov, ki niso v "repni" σ-algebri zaporedja slučajnih spremenljivk.

b. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Hewitt-Savageov izrek pravi, da je v tem primeru ali $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$. Poskusite dokazati s pomočjo martingalov.

33. ● Naj bo (X_n) martingal z lastnostjo $\sup_n E|X_n| < \infty$. Dokažite, da obstajata pozitivna martingala (Y_n) in (Z_n), taka da je $\sup_n E|Y_n| < \infty$ in $\sup_n E|Z_n| < \infty$, ter $X_n = Y_n - Z_n$.

34. Naj bo M nenegativen martingal z $M_0 = 0$ in $E(X_n^2) < \infty$ za vse $n \geq 0$. Pokažite, da za $x \geq 0$ velja

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} M_k > x\right) \leq \frac{E(X_n^2)}{E(X_n^2) + x^2}\,.$$

35. Ta naloga je povzeta po članku S-Y. R. Li, A martingale approach to the study of occurence of sequence patterns in repeated experiments, *Annals of Probability*, (1980), str. 1171-1176 in po G. Blom, L. Holst, D. Sandell, *Problems and Snapshots from the World of Probability*, Springer Verlag, 1994, str. 207.

Opica tipka na pisalni stroj z m znaki. Matematično privzamemo, da so natipkane črke zaporedje med sabo neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ z vrednostmi v množici "črk"

$\{1,\ldots,m\}$ in dano skupno porazdelitvijo $P(X_1 = k) = p_k$ za $1 \leq k \leq m$. Dano je n različnih končnih nizov črk. Če bi šlo za resnični pisalni stroj, bi bila recimo dana niza "ABRAKADABRA", "TO BE, OR NOT TO BE" in morda še kaj. Opica bo prej ali slej napisala enega od danih n nizov. Vprašanje je, s kolikšno verjetnostjo bo kateri od danih nizov prišel v zaporedju $X_1, X_2, \ldots$ na vrsto prvi in kako dolgo bomo morali čakati v povprečju, da se bo pojavil eden od danih nizov.

Naj bodo dani nizi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ z dolžinami $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Najprej definiramo *prekrivanje* nizov S_i in S_j z

$$e(S_i, S_j) = \sum_{r=1}^{k} \frac{\epsilon_r(i,j)}{p_{c_1} \cdots p_{c_r}}\,,$$

kjer je $k = \min(k_i, k_j)$ in $\epsilon_r(i,j) = 1$, če se niz S_i konča z znaki $c_1 c_2 \ldots c_r$ in S_j začne s temi znaki, sicer je $\epsilon_r(i,j) = 0$.

a. Naj bo l dano nenegativno celo število. Za dana $1 \leq i, j \leq n$ naj bo S_i^l slučajni niz, ki ga dobimo tako, da niz S_i nadaljujemo z $X_1, X_2, \ldots, X_l$ ($S_i^0 = S_i$). Definirajmo slučajni spremenljivki

$$e(l) = e(S_i^l, S_j) \qquad \text{in} \qquad Y_l = e(l) - l\,.$$

Definirajmo še

$$\begin{aligned} N_j &= \inf\{n \geq 0\colon X_{n-k_j+1} X_{n-k_j+2} \ldots X_n = S_j\} \\ N_{ij} &= \inf\{r \geq 0\colon S_i X_1 X_2 \ldots X_r = S_j \text{ ali } X_{r-k_j+1} \ldots X_r = S_j\}\,. \end{aligned}$$

Dokažite, da je

$$M_l = Y_{l \wedge N_{ij}}$$

martingal glede na $\mathcal{F}_l = \sigma(X_1, \ldots, X_l)$.

b. Uporabite izrek o opcijskem ustavljanju za dokaz, da je

$$E(Y_{N_{ij}}) = E(Y_0)\,.$$

c. Dokažite, da je

$$\begin{aligned} E(Y_0) &= e(S_i, S_j) \\ E(Y_{N_{ij}}) &= e(S_j, S_j) - E(N_{ij}) \end{aligned}$$

d. Izpeljite, da je

$$\begin{aligned} E(N_j) &= e(S_j, S_j) \\ E(N_{ij}) &= e(S_j, S_j) - e(S_i, S_j)\,. \end{aligned}$$

e. Naj bo $N = \min(N_1, \ldots, N_n)$ in $\pi_j = P(N = N_j)$. Prepričajte se, da je

$$E(N_i - N | N = N_j) = e(S_i, S_i) - e(S_j, S_i)\,.$$

f. Dokažite, da velja

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} e(S_j, S_i)\pi_j &= E(N) \text{ in} \\ \sum_{j=1}^{n} \pi_j &= 1\,. \end{aligned}$$

g. Na običajnem pisalnem stroju je recimo 40 znakov vključno s presledki in vejicami. Predpostavite, da opica izbira tipke z enako verjetnostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo prej natipkala "ABRAKADABRA" kot "TO BE, OR NOT TO BE"?

36. Naj bo $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal na $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Spodnje trditve ali dokažite ali ovrzite s protiprimerom.

a. Če X_n konvergira s.g. proti neki slučajni spremenljivki X, je $\sup_n E(X_n^+) < \infty$.

b. Če je $X_0 = 1$ in je $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ martingal, je $X_n \geq 0$ s.g. za vsak $n \geq 0$.

c. Naj bo a_n zaporedje realnih števil. Obstaja martingal X, da je

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = a_n \text{ za } n \geq N(\omega)\}) = 1\,,$$

pri čemer je N s.g. končna slučajna spremenljivka.

d. Če je

$$P(X_n < 0 \text{ neskončno mnogokrat}) = 0\,,$$

potem X_n s.g. konvergira proti končni limiti.

37. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene. Naj bo $S_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$. Predpostavite, da za $t \in \mathbb{R}$ velja $\phi(t) = \log(M_{X_1}(t)) < \infty$.

   a. Prepričajte se, da je $M_n = \exp(tS_n - n\phi(t))$ martingal.
   b. Če je $t \geq 0$ in $\phi(t) \geq 0$, je za vsak opcijski čas
   $$P(S_T \geq x, T \leq n) \leq e^{-tx+\phi(t)n}\,.$$
   Dokažite.
   c. Predpostavite, da so X_k porazdeljene standardno normalno. Naj bo $x_n = \alpha f(\alpha^{n-1})$ za $\alpha > 1$, kjer je
   $$f(\alpha) = (2\alpha \log\log\alpha)^{1/2}\,.$$
   Dokažite, da je
   $$P(\sup_{k \leq \alpha^n} S_k \geq x_n) \leq ((n-1)\log\alpha)^{-\alpha}\;.$$
   d. Dokažite, da je
   $$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}} \leq 1 \qquad \text{s.g.}\,.$$

38. (Časovno nehomogeni procesi razvejanja) Kot pri časovno homogenem procesu razvejanja začnemo z enim posameznikom, torej $X_0 = 1$. Na koraku $n-1$ posameznik *umre* z verjetnostjo $1-p_n$ ali *se razdeli* v dva posameznika z verjetnostjo p_n. Z X_n označimo število pozameznikov v n-ti generaciji.

    Bolj formalno predpostavljamo, da imamo družino $(Y_{nk}\colon n \geq 1, k \geq 1)$ neodvisnih slučajnih spremenljivk, takih da je $P(Y_{nk} = 2) = p_n$ in $P(Y_{nk} = 0) = 1 - p_n$ za $k \geq 1$ in $n \geq 1$. Slučajne spremenljivke X_n definiramo rekurzivno z
    $$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Y_{n,k} \qquad \text{za } n \geq 1\,. \end{aligned}$$
    Če je $X_{n-1} = 0$ je seveda $X_n = 0$.

    Predpostavljajte $p_n \downarrow 1/2$.

a. Dokažite, da je

$$E(X_n) = \prod_{k=1}^{n} (2p_k)$$

in

$$E(X_n^2) = E(X_n)^2 \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{E(X_k)} (1 - p_k) \right]$$

za $n = 1, 2, \ldots$.

b. Prepričajte se, da je $M_n = X_n / E(X_n)$ martingal glede na filtracijo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Pokažite, da je ta martingal omejen v L^2, če in samo če je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{E(X_k)} < \infty \,.$$

c. Dokažite, da proces izumre z verjetnostjo 1, t.j. $X_n = 0$ slej ko prej v n s.g., če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2p_k - 1) < \infty$$

in preživi s pozitivno verjetnostjo, t.j. $X_n > 0$ za vse n s pozitivno verjetnostjo, če je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big(-\alpha \sum_{i=1}^{k} (2p_i - 1)\Big) < \infty$$

za nek $\alpha < 1$.

d. Naj bo $p_n = (1/2 + n^{-\gamma}) \wedge 1$. Za katere γ proces preživi s pozitivno verjetnostjo?