Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT - MATEMATIČNE ZNANOSTI

Verjetnost z mero

Računski izpit

1. februar 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.					
2.					
3.				•	
4.			•	•	
Total					

1. (25) Družina podmožic $\mathcal{M}$ množice S je monoton razred, če velja:

(i) za vsako naraščajoče zaporedje množic $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ množic iz $\mathcal{M}$ velja $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$;

(ii) za vsako padajoče zaporedje množic $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ množic iz $\mathcal{M}$ velja $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$;

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra, torej družina podmnožic zaprta za komplementiranje in končne unije. Predpostavite, da velja $S \in \mathcal{A}$.

a. (5) Utemeljite, da je presek poljubne družine monotonih razredov monoton razred.

Rešitev: za trditev moramo samo preveriti definicije.

b. (5) Utemeljite, da obstaja najmanjši monoton razred $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, ki vsebuje $\mathcal{A}$.

Rešitev: družina vseh podmnožic S je monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Obstaja torej vsaj en monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Presek vseh takih je najmanjši monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$.

c. (5) Pokažite, da je družina množic $\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \colon B^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$.

Rešitev: družina $\mathcal{N}$ vsebuje $\mathcal{A}$. Če so $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ v $\mathcal{N}$, so $B_1^c \supseteq B_2^c \supseteq \cdots$ v $\mathcal{N}$ in posledično je presek $\cap_{k=1}^{\infty} B_k^c = (\cup_{k=1}^{n} B_k)^c$ v $\mathcal{N}$. Podobno so za $B_1 \supseteq B_2 \supseteq$ iz $\mathcal{N}$ komplementi $B_1^c \subseteq B_2^c \subseteq \cdots$, torej je $\cap_{k=1}^{\infty} B_k = (\cup_{k=1}^{\infty} B_k^c)^c$ v $\mathcal{N}$. Družina $\mathcal{N}$ je monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ najmanjši tak monoton razred, je vsebovan v $\mathcal{N}$.

d. (10) Za fiksen $A \in \mathcal{A}$ definirajte $\mathcal{K}^A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \colon A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Pokažite, da je $\mathcal{K}$ monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Sklepajte, da je $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ σ-algebra.

Rešitev: družina $\mathcal{K}^A$ po definiciji vsebuje unije naraščajočih in preseke pdajočih zaporedij množic. Ker je za $B \in \mathcal{A}$ po definiciji $A \cup B \in \mathcal{A}$, družina $\mathcal{K}^A$ vsebuje $\mathcal{A}$ in je $\mathcal{K}^A$ monoton razred, ki vsebuje $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Definirajmo za $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ družino $\mathcal{K}^B = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \colon A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Po prvem delu $\mathcal{K}^B$ vsebuje $\mathcal{A}$, poleg tega pa je po definiciji monoton razred in zato vsebuje $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Monotoni razred $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ je zaprt za končne unije in posledično tudi števne. S tem in s točko c. smo potrdili, da je $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ σ-algebra.

2. (20) Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija z $f \geq 0$ in $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$.

a. (5) Definirajte

$$g_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} f(x+k) \qquad \text{in} \qquad g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)\,.$$

Utemeljite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x)dx\,.$$

Rešitev: funkcije g_m so nenegativne in $g_n \uparrow g$. Trditev sledi iz izreka o monotoni konvergenci.

b. (5) Pokažite, da je

$$\int_{(0,1]} g_m(x)dx = \int_{-m}^{m+1} f(x)dx$$

in utemeljite, da je

$$\int_{(0,1]} g_m(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

za vse $m \geq 1$.

Rešitev: velja

$$\int_{(0,1]} f(x+k)dx = \int_{(k,k+1]} f(x)dx\,.$$

Zaradi linearnosti sledi

$$\int_{(0,1]} g_m(x)dx = \sum_{k=-m}^{m} \int_{(k,k+1]} f(x)dx = \int_{-m}^{m+1} f(x)dx\,.$$

Druga neenakost sledi iz monotonosti integrala, ker je $f \cdot \chi_{(-m,m+1]} \leq f$.

c. (5) Utemeljite, da za merljivo funkcijo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $h \geq 0$ iz $\int_{(0,1]} h(x)dx < \infty$ sledi $\lambda(\{x \in (0,1]\colon h(x) = \infty\}) = 0$. Pri tem je λ Lebesueova mera.

Rešitev: iz $\lambda(\{x\colon h(x) = \infty\}) > 0$ bi sledilo, da je

$$\int_{(0,1]} h(x)dx \geq \infty \cdot \lambda(\{x\colon h(x) = \infty\}) = \infty$$

v nasprotju s predpostavko.

d. (10) Dokažite da vrsta

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$$

za skoraj vse x konvergira proti končni limiti. Z drugimi besedami je $\lambda(\{x \in \mathbb{R}\colon g_m(x) \to \infty\}) = 0$.

Rešitev: funkcija g je periodična s periodo 1. Dovolj je pokazati, da je skoraj povsod končna na intervalu $(0,1]$. V prejšnjih točkah smo dognali, da je g integrabilna na $(0,1]$, ker pomeni, da je skoraj povsod končna. Trditev sledi.

3. (20) Naj bo $b > a > 0$ in $\gamma > 0$ in naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y) = \sin(xy)e^{-\gamma y}\,.$$

a. (10) Utemeljite, da obstaja integral

$$\int_{(a,b)\times(0,\infty)} |f(x,y)|dxdy\,.$$

Rešitev: ker je $|\sin(xy)| \leq 1$, *je*

$$\int_a^b dx \int_0^\infty |f(x,y)|dy \leq \int_a^b dx \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{b-a}{\gamma}\,.$$

Fubinijev izrek zato zagotavlja obstoj dvojnega integrala in enakost obeh

b. (10) Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ay) - \cos(by)}{y} e^{-\gamma y} dy\,.$$

Rešitev: po eni strani je

$$\int_{(a,b)\times(0,\infty)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_0^\infty \sin(xy)e^{-\gamma y}dy\,.$$

Notranji integral računamo per partes.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin(xy)e^{-\gamma y}dy &= -\frac{1}{\gamma}\sin(xy)e^{-\gamma y}|_0^\infty + \frac{x}{\gamma}\int_0^\infty \cos(xy)e^{-\gamma y}dy \\
&= -\frac{1}{\gamma^2}x\cos(xy)e^{-\gamma y}|_0^\infty + \frac{x^2}{\gamma^2}\int_0^\infty \sin(xy)e^{-\gamma y}dy \\
&= \frac{x}{\gamma^2} - \frac{x^2}{\gamma^2}\int_0^\infty \sin(xy)e^{-\gamma y}dy\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\int_0^\infty \sin(xy)e^{-\gamma y}dy = \frac{x}{x^2+\gamma^2}\,.$$

Sledi

$$\int_{(a,b)\times(0,\infty)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \frac{x}{x^2+\gamma^2}dx = \frac{1}{2}\left(\log(b^2+\gamma^2) - \log(a^2+\gamma^2)\right)\,.$$

V drugi smeri dobimo

$$\int_0^\infty e^{-\gamma y}dy \int_a^b \sin(xy)dx = \int_0^\infty \frac{\cos(ay)-\cos(by)}{y}e^{-\gamma y}dy\,.$$

Ta drugi integral je po Fubinijevem izreku enak prvemu.

4. (25) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo F. Označite $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a. (10) Naj bosta $x > 0$ in $y > 0$. Izrazite

$$P\left(S_n - x > y | S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\right)$$

s pomočjo funkcije F.

Rešitev: opazimo, da gre za pogojno matematično upanje tipa

$$E\left(f(X_n, S_{n-1}, \ldots, S_1) | S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\right) ,$$

kjer je

$$f(u, s_{n-1}, \ldots, s_1) = 1\left(u + s_{n-1} - x > y\right) .$$

Sledi, da je

$$E\left(f(X_n, S_{n-1}, \ldots, S_1) | S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\right) = \psi(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}) ,$$

kjer je

$$\psi(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) = E\left(1\left(X_n + s_{n-1} - x > y\right)\right) = 1 - F(x + y - s_{n-1}) .$$

Sledi

$$P\left(S_n - x > y | S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\right) = 1 - F(x + y - S_{n-1}) .$$

b. (10) Naj bosta $x > 0$ in $y > 0$. Dokažite, da je

$$\begin{aligned} & P(S_n - x > y, S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x) \\ \leq \quad & (1 - F(y)) P(S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x) . \end{aligned}$$

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned} & P(S_n - x > y, S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x) \\ = \quad & E\left[P\left(S_n - x > y | S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\right) \cdot 1(S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x)\right] \\ = \quad & E\left[(1 - F(x + y - S_{n-1})) 1(S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x)\right] \\ \leq \quad & E\left[(1 - F(y)) 1(S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x)\right] \\ = \quad & (1 - F(y)) \cdot P(S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x) . \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da na $\{S_{n-1} \leq x, S_{n-2} \leq x, \ldots, S_1 \leq x\}$ *velja* $x - S_{n-1} \geq 0$.