

IME IN PRIIMEK: \_\_\_\_\_

VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT - PMA

VERJETNOST II

RAČUNSKI IZPIT

23. JANUAR 2026

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Za prostor z mero vzamemo interval  $S = (0, 1)$  z Borelovimi množicami in Lebesgueovo mero  $\lambda$ . Rečemo, da je množica  $A \subseteq (0, 1)$  regularna, če za vsak  $\epsilon > 0$  obstajata odprta množica  $U \subseteq (0, 1)$  in kompaktna množica  $K \subseteq (0, 1)$ , da velja  $K \subseteq A \subseteq U$  in  $\lambda(U \setminus K) < \epsilon$ .

a. (5) Utemeljite, da je družina  $\mathcal{P} = \{(a, b) \subseteq (0, 1) : a < b\} \cup \{\emptyset\}$   $\pi$ -sistem.

*Rešitev:* presek dveh odprtih intervalov je ali odprt interval ali prazna množica.

b. (15) Utemeljite, da je  $\mathcal{L} = \{A \subseteq (0, 1) : A \text{ je regularna}\}$   $\lambda$ -sistem.

*Namig:* pri tretji postavki v definiciji  $\lambda$ -sistema lahko za disjunktne  $A_1, A_2, \dots$  izberete odprte množice  $U_n$  in kompaktno množico  $K_n$  s  $K_n \subseteq A_n \subseteq U_n$ , da bo

$$\lambda(A_n \setminus K_n) < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}.$$

*Rešitev:* preverimo postavke v definiciji  $\lambda$ -sistema po vrsti:

(i) za  $A = (0, 1)$  lahko vzamemo  $U = (0, 1)$  in  $K = [\epsilon/2, 1 - \epsilon/2]$ .

(ii) Naj bosta  $A, B \in \mathcal{L}$  in  $B \subseteq A$ . Naj bo  $\epsilon > 0$ . Po predpostavki obstajata odprti množici  $U_i$  in kompaktni množici  $K_i$  za  $i = 1, 2$ , tako da velja

$$K_1 \subseteq A \subseteq U_1 \quad \text{in} \quad K_2 \subseteq B \subseteq U_2$$

ter

$$\lambda(U_1 \setminus K_1) < \epsilon/2 \quad \text{in} \quad \lambda(U_2 \setminus K_2) < \epsilon/2.$$

Pokazati moramo, da je  $A \setminus B \in \mathcal{L}$ . Vzemimo  $U = U_1 \setminus K_2 = U_1 \cap K_2^c$  in  $K = K_1 \setminus U_2 = K_1 \cap U_2^c$ . Množica  $U$  je presek dveh odprtih množic in zato odprta ter velja  $A \setminus B \subseteq U$ . Množica  $K$  je presek kompaktno in zaprte množice in zato kompaktna ter  $K \subseteq A \setminus B$ . Poleg tega velja

$$U \setminus K \subseteq (U_1 \setminus K_1) \cup (U_2 \setminus K_2)$$

in posledično

$$\lambda(U \setminus K) \leq \lambda(U_1 \setminus K_1) + \lambda(U_2 \setminus K_2) < \epsilon.$$

Sledi  $A \setminus B \in \mathcal{L}$ .

(iii) Naj bodo  $A_1, A_2, \dots$  disjunktne množice iz  $\mathcal{L}$ . Naj bo  $\epsilon > 0$ . Ker je  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq (0, 1)$ , velja da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$  konvergira. Obstaja torej  $N$ , da je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \epsilon/3.$$

Po predpostavki obstajajo odprte množice  $U_n$  in kompaktno množice  $K_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , da velja  $K_n \subseteq A_n \subseteq U_n$  in

$$\lambda(U_n \setminus K_n) < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}.$$

Vzemimo  $U = \cup_{n=1}^{\infty} U_n$  in  $K = \cup_{n=1}^N K_n$ . Množica  $U$  je odprta, ker je unija odprtih množic. Množica  $K$  je kompaktna, ker je končna unija kompaktnih množic. Poleg tega velja

$$U \setminus K \subseteq \cup_{n=1}^N (U_n \setminus K_n) \cup \cup_{n=N+1}^{\infty} U_n.$$

Ocenimo

$$\lambda(U \setminus K) \leq \sum_{n=1}^N \lambda(U_n \setminus K_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(U_n).$$

Za prvo vsoto po konstrukciji velja

$$\sum_{n=1}^N \lambda(U_n \setminus K_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n \setminus K_n) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Za drugo vsoto najprej opazimo, da iz  $U_n \setminus A_n \subseteq U_n \setminus K_n$  sledi, da je

$$\lambda(U_n) \leq \lambda(A_n) + \lambda(U_n \setminus K_n)$$

in posledično

$$\lambda(U_n) < \lambda(A_n) + \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}.$$

Sledi

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(A_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n},$$

torej

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(U_n) < \epsilon/3 + \epsilon/3.$$

Združimo in sledi

$$\lambda(U \setminus K) < \epsilon.$$

Družina  $\mathcal{L}$  je  $\lambda$ -sistem.

- c. (5) Utemeljite, da so vse Borelove množice  $A \subseteq (0, 1)$  regularne.

Rešitev: odprti intervali so očitno regularne množice, torej  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ . Družina  $\mathcal{L}$  vsebuje  $\pi$ -sistem  $\mathcal{P}$ , ki pa generira Borelovo  $\sigma$ -algebro. Sledi, da  $\mathcal{L}$  vsebuje vse Borelove množice, kar potrjuje trditev.

2. (25) Funkcija  $f(x)$  naj bo za  $x \geq 0$  dana z neskončno vrsto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 4n^2x)e^{-2n^2x}.$$

Izračunati želimo

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx$$

za  $\lambda > 0$ .

a. (10) Utemeljite, da je

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

*Namig: vedno je  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .*

*Rešitev: vrste z nenegativnimi členi po izreku o monotoni konvergenci lahko integriramo členoma. Uporabimo še trikotniško neenakost  $|1 - 4k^2x| \leq 1 + 4k^2x$ , ki velja za  $x \geq 0$ . Računamo*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(x)| dx &\leq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |1 - 4k^2x| e^{-2k^2x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |1 - 4k^2x| e^{-2k^2x} dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (1 + 4k^2x) e^{-2k^2x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k^2} \right) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

b. (15) Kot znano privzemite, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda - 2n^2}{(\lambda + 2n^2)^2} = \frac{1}{4\lambda} \left( \frac{\lambda\pi^2}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{2}}\right)} - 2 \right).$$

Izračunajte

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx$$

za  $\lambda > 0$ . Utemeljite korake.

*Rešitev: definiramo*

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |1 - 4k^2x| e^{-2k^2x}.$$

V prvem delu smo pokazali, da je  $h$  integrabilna. Ker  $h(x)$  dominira delne vsote vrste, uporabimo lahko izrek o dominirani konvergenci in zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja. Računamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 4n^2 x) e^{-2n^2 x} e^{-\lambda x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - 4n^2 x) e^{-(\lambda + 2n^2)x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda + 2n^2} - \frac{4n^2}{(\lambda + 2n^2)^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda - 2n^2}{(\lambda + 2n^2)^2}.\end{aligned}$$

3. (25) Dana naj bo funkcija

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{1-x^2} \left( \frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y} \right).$$

a. (10) Utemeljite, da integral

$$\int_{(0,\infty) \times (0,\infty)} f(x, y) dx dy$$

obstaja in je končen.

*Rešitev: dovolj je pokazati, da obstaja eden od dvakratnih integralov. Ker so vsi integrandi nenegativni, ni treba absolutnih vrednosti. Računamo*

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty) \times (0,\infty)} f(x, y) dx dy &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y} \left( \frac{\arctan x\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

b. (15) Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\log x dx}{x^2 - 1}.$$

Utemeljite korake.

*Rešitev: po Fubiniju lahko zamenjamo vrstni red integracije in dobimo*

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty) \times (0,\infty)} f(x, y) dx dy &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} (\log(1+y) - \log(1+x^2y)) \Big|_0^\infty \\ &= \int_0^\infty \frac{\log(1/x^2) dx}{1-x^2} \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1} dx. \end{aligned}$$

*Izenačimo z integralom iz prvega dela in sledi*

$$\int_0^\infty \frac{\log x dx}{x^2-1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

4. (25) V najpreprostejšem modelu razširjanja epidemij privzamemo, da imamo  $n$  posameznikov. Vsak od njih zboli z verjetnostjo  $p$ , neodvisno od ostalih. V drugem koraku vsak oboleli posameznik okuži zdravega posameznika z verjetnostjo  $q$ , neodvisno od ostalih posameznikov. Z  $N$  označimo slučajno število obolelih posameznikov na koncu.

V bolj matematičnem jeziku formuliramo problem na naslednji način: naj bodo  $I_k$  in  $I_{kl}$  za  $1 \leq k, l \leq n$  neodvisni indikatorji z  $I_k \sim \text{Bernoulli}(p)$  in  $I_{kl} \sim \text{Bernoulli}(q)$ . Indikator  $I_k$  interpretiramo kot indikator obolelosti v prvem koraku,  $I_{kl}$  pa kot indikator okužbe v drugem koraku. Zapišemo lahko

$$N = \sum_{k=1}^n \left( I_k + (1 - I_k) \left( 1 - \prod_{l \neq k} (1 - I_l I_{lk}) \right) \right).$$

a. (10) Izračunajte  $E(N|I_1, \dots, I_n)$ .

*Rešitev: najprej izračunajmo*

$$\begin{aligned} & E \left( (1 - I_k) \left( 1 - \prod_{l \neq k} (1 - I_l I_{lk}) \right) \middle| I_1, \dots, I_n \right) \\ &= (1 - I_k) E \left( 1 - \prod_{l \neq k} (1 - I_l I_{lk}) \middle| I_1, \dots, I_n \right) \\ &= (1 - I_k) \left( 1 - \prod_{l \neq k} (1 - q I_l) \right). \end{aligned}$$

*Uporabili smo pravilo, da lahko iz pogojnega matematičnega upanja izpostavimo merljivo spremenljivko in pravilo, da je za neodvisni slučajni spremenljivki  $X$  in  $Z$  (lahko tudi vektorja)  $E(f(X, Z)|Z) = \psi(Z)$ , kjer je  $\psi(z) = E(f(X, z))$ . Sledi*

$$E(N|I_1, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^n \left( I_k + (1 - I_k) \left( 1 - \prod_{l \neq k} (1 - q I_l) \right) \right).$$

b. (10) Izračunajte  $E(N)$ .

*Rešitev: vedno je  $E(N) = E(E(N|I_1, \dots, I_n))$ . Z uporabo linearnosti in neodvisnosti lahko računamo*

$$\begin{aligned} E(N) &= E(E(N|I_1, \dots, I_n)) \\ &= \sum_{k=1}^n E \left( I_k + (1 - I_k) \left( 1 - \prod_{l \neq k} (1 - q I_l) \right) \right) \\ &= np + n(1 - p)(1 - (1 - pq)^{n-1}). \end{aligned}$$

