IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAMNIT - MATEMATIČNE ZNANOSTI

VERJETNOST Z MERO

RAČUNSKI IZPIT

19. JUNIJ 2023

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.				•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Naj bosta $\mathcal{P}$ in $\mathcal{Q}$ dva π-sistema na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kjer je P verjetnostna mera. Privzemite, da oba π-sistema vsebujeta Ω in $\emptyset$.

a. (5) Pokažite, da je družina množic

$$\mathcal{R} = \{A \cap B \colon A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}\}$$

π-sistem.

Rešitev: trditev sledi neposredno iz definicije.

b. (10) Utemeljite, da je najmanjša σ-algebra $\sigma(\mathcal{R})$, ki vsebuje π-sistem $\mathcal{R}$, tudi najmanjša σ-algebra, ki vsebuje tako $\mathcal{P}$ kot tudi $\mathcal{Q}$.

Rešitev: ker je $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ in $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$, σ-algebra $\sigma(\mathcal{R})$ vsebuje oba π-sistema in posledično tudi najmanjšo σ-algebro, ki jo generirata. Po drugi strani vsaka σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{P}$ in $\mathcal{Q}$, vsebuje tudi $\sigma(\mathcal{R})$. Sledi, da je $\sigma(\mathcal{R})$ res najmanjša σ-algebra, ki vsebuje oba π-sistema.

c. (10) Naj bo X integrabilna slučajna spremenljivka na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Naj za $\sigma(\mathcal{R})$ merljivo integrabilno slučajno spremenljivko Y velja, da za vsaka $A \in \mathcal{P}$ in $B \in \mathcal{Q}$ velja

$$E\left(X \cdot 1_{A \cap B}\right) = E\left(Y \cdot 1_{A \cap B}\right) .$$

Utemeljite, da je $Y = E\left(X \mid \sigma(\mathcal{R})\right)$.

Rešitev: naj bo $\mathcal{L}$ družina vseh množic C iz $\sigma(\mathcal{R})$, za katere je

$$E\left(X \cdot 1_C\right) = E\left(Y \cdot 1_C\right) .$$

Po definicijah je $\Omega \in \mathcal{L}$. Ker iz predpostavk sledi, da je $E(X) = E(Y)$, iz $E\left(X \cdot 1_C\right) = E\left(Y \cdot 1_C\right)$ sledi $E\left(X \cdot 1_{C^c}\right) = E\left(Y \cdot 1_{C^c}\right)$ zaradi linearnosti pričakovane vrednosti. Če so $C_1, C_2, \ldots$ disjunktne množice iz $\mathcal{L}$, je tudi $\cup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathcal{L}$ po izreku o monotoni konvergenci. Družina $\mathcal{L}$ je λ-sistem, zato vsebuje najmanjšo σ-algebro, ki jo generira $\mathcal{R}$. Trditev sledi iz definicije pogojne pričakovane vrednosti.

2. (25) Naj bo $f\colon S \to \mathbb{R}$ nenegativna in integrabilna na prostoru z mero $(S, \mathcal{S}, \mu)$, torej $\int_S f(x) d\mu(x) < \infty$.

a. (10) Definirajte

$$g_n(x) = \min\left(f(x), n\right)$$

za $n = 1, 2, \ldots$. Utemeljite, da za dan $\epsilon > 0$ obstaja tak N, da za $n \geq N$ velja

$$\int_S (f(x) - g_n(x)) d\mu(x) < \epsilon\,.$$

Rešitev: funkcije g_n so nenegativne in naraščajoče ter velja $g_n(x) \uparrow f(x)$. Zato po izreku o monotoni konvergenci velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_S g_n(x) d\mu(x) = \int_S f(x) d\mu(x)\,.$$

b. (15) Pokažite, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\mu(E) < \delta$ sledi

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_S f(x) \cdot \chi_E(x) d\mu(x) < \epsilon\,.$$

Rešitev: fiksirajmo $\epsilon > 0$. Po prvem delu obstaja tak N, da velja

$$\int_S (f(x) - g_N(x)) d\mu(x) < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Funkcija g_N je omejena z N, zato za vsako množico E velja

$$\int_E g_N(x) d\mu(x) \leq N \cdot \mu(E)\,.$$

Če izberemo $\delta < \frac{\epsilon}{2N}$, bo veljalo

$$\int_E f(x) d\mu(x) < \int_E g_N(x) d\mu(x) + \int_S (f(x) - g_N(x)) d\mu(x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

3. (25) Naj bo $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija z $\int_0^\infty |f(s)|ds < \infty$. Za $a > 0$ definirajte

$$f_a(s) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^s (s-u)^{a-1} f(u)du\,.$$

a. (10) Naj bo $\lambda > 0$. Pokažite, da velja

$$\int_0^\infty f_a(s)e^{-\lambda s}ds = \frac{1}{\lambda^a}\int_0^\infty e^{-\lambda u} f(u)du\,.$$

Utemeljite korake.

Rešitev: označimo $\Delta = \{(s,u)\colon 0 \le u \le s\}$ *in s* χ_Δ *indikator množice* Δ. *Računamo*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty f_a(s)e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\lambda s}ds \int_0^s (s-u)^{a-1}f(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-\lambda s}(s-u)^{a-1}f(u)\chi_\Delta(s,u)duds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty f(u)du \int_0^\infty e^{-\lambda s}(s-u)^{a-1}\chi_\Delta(s,u)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty f(u)du \int_u^\infty e^{-\lambda s}(s-u)^{a-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty f(u)du \int_0^\infty e^{-\lambda(u+t)}t^{a-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\lambda u}f(u)du \int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{a-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\lambda u}f(u)du \cdot \frac{\Gamma(a)}{\lambda^a} \\
&= \frac{1}{\lambda^a}\int_0^\infty e^{-\lambda u}f(u)du\,.
\end{aligned}$$

Utemeljiti moramo uporabo Fubinijevega izreka. Če v vseh izračunih nadomestimo f *z* $|f|$ *in v zadnji vrstici upoštevamo, da je* $|e^{-\lambda u}f(u)| \le |f(u)|$, *potem eden od dvakratnih integralov absolutne vrednosti funkcije konvergira. Posledično konvergira dvojni integral in lahko zamenjamo vrstni red integriranja.*

b (15) Naj bosta $a, b > 0$. Pokažite, da je

$$f_{a+b}(s) = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^s (s-u)^{b-1} f_a(u)du\,.$$

Utemeljite korake.

Namig: na pravem mestu uvedite novo spremenljivko v *s predpisom* $u - t = v(s-t)$. *Spomnite se, da je*

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

Rešitev: računamo za fiksen $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^s (s-u)^{b-1} f_a(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^s (s-u)^{b-1}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^u (u-t)^{a-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^s f(t)dt \cdot \int_t^s (s-u)^{b-1}(u-t)^{a-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^s f(t)dt \cdot (s-t)^{a+b-1}\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(a+b)}\int_0^s (s-t)^{a+b-1} f(t)dt \\
&= f_{a+b}(t)\,.
\end{aligned}$$

Zadnji integral konvergira, saj je na $[0,s]$ funkcija f zaradi zveznosti omejena, integral $\int_0^s (s-t)^{a+b-1}ds$ pa obstaja.

4. (25) Naj bodo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene pozitivne slučajne spremenljivke. Za $1 \leq i \leq n$ definirajte

$$V_i = \frac{\xi_i}{\sum_{j=1}^n \xi_j} .$$

a. (10) Za $1 \leq i \leq n$ izračunajte

$$E(V_i | V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}) .$$

Namig: seštejte po $k = i, i+1, \ldots, n$ in upoštevajte simetrijo.

Rešitev: zaradi simetrije za vse $k = i, i+1, \ldots, n$ velja

$$E(V_i | V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}) = E(V_k | V_1, V_2, \ldots, V_{i-1})$$

Seštejemo levo in desno stran po k od i do n in upoštevamo še, da je $\sum_{j=1}^n V_j = 1$. Sledi

$$\begin{aligned}
&(n-i+1)\, E(V_i | V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}) \\
&\quad = E\left(\sum_{k=i}^n V_k \,\middle|\, V_1, V_2, \ldots, V_{i-1} \right) \\
&\quad = E\big(1 - V_1 - \cdots - V_{i-1} | V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}\big) \\
&\quad = 1 - V_1 - \cdots - V_{i-1} .
\end{aligned}$$

Sledi

$$E(V_i | V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}) = \frac{1}{(n-i+1)} \, (1 - V_1 - \cdots - V_{i-1}) .$$

b. (15) Izračunajte

$$E\left(V_1 \cdot \frac{V_2}{1 - V_1} \cdot \frac{V_3}{1 - V_1 - V_2} \cdots \frac{V_{n-1}}{1 - V_1 - \cdots - V_{n-2}} \right) .$$

Rešitev: najprej opazimo, da je

$$\begin{aligned}
& E\left(V_1 \cdot \frac{V_2}{1 - V_1} \cdots \frac{V_{n-1}}{1 - V_1 - \cdots - V_{n-2}} \,\middle|\, V_1, V_2, \ldots, V_{n-2} \right) \\
&= V_1 \cdot \frac{V_2}{1 - V_1} \cdots \frac{V_{n-2}}{1 - V_1 - \cdots - V_{n-3}} \cdot \frac{1}{1 - V_1 - \cdots - V_{n-2}} E(V_{n-1} | V_1, V_2, \ldots, V_{n-2}) .
\end{aligned}$$

Iz prvega dela sledi

$$\begin{aligned}
& E\left(V_1 \cdot \frac{V_2}{1 - V_1} \cdot \frac{V_3}{1 - V_1 - V_2} \cdots \frac{V_{n-1}}{1 - V_1 - \cdots - V_{n-2}} \,\middle|\, V_1, V_2, \ldots, V_{n-2} \right) \\
&\qquad = \frac{1}{2} V_1 \cdot \frac{V_2}{1 - V_1} \cdot \frac{V_3}{1 - V_1 - V_2} \cdots \frac{V_{n-2}}{1 - V_1 - \cdots - V_{n-3}} .
\end{aligned}$$

Izračunamo matematično upanje leve in desne strani. Pridobimo faktor $1/2$*,* n *pa se zmanjša za* 1*. Podobno izračunamo*

$$
\begin{aligned}
&E\left(V_1\cdot\frac{V_2}{1-V_1}\cdot\frac{V_3}{1-V_1-V_2}\cdots\frac{V_i}{1-V_1-\cdots-V_{i-1}}\right)\\
&\qquad=\frac{1}{n-i+1}\,E\left(V_1\cdot\frac{V_2}{1-V_1}\cdot\frac{V_3}{1-V_1-V_2}\cdots\frac{V_{i-1}}{1-V_1-\cdots-V_{i-2}}\right).
\end{aligned}
$$

Z zaporedno uporabo teh zvez dobimo

$$
E\left(V_1\cdot\frac{V_2}{1-V_1}\cdot\frac{V_3}{1-V_1-V_2}\cdots\frac{V_{n-1}}{1-V_1-\cdots-V_{n-2}}\right)=\frac{1}{(n-1)!}\,E(V_1)\,.
$$

Zaradi simetrije je

$$
E(V_1)=\frac{1}{n}
$$

in sledi

$$
E\left(V_1\cdot\frac{V_2}{1-V_1}\cdot\frac{V_3}{1-V_1-V_2}\cdots\frac{V_{n-1}}{1-V_1-\cdots-V_{n-2}}\right)=\frac{1}{n!}\,.
$$