Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT - MATEMATIČNE ZNANOSTI

Verjetnost z mero

Računski izpit

15. februar 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami.

| Naloga | a. | b. | c. | d. | Skupaj |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | • | |
| 2. | | | • | • | |
| 3. | | | • | • | |
| 4. | | | • | • | |
| Skupaj | | | | | |

**1.** (25) Naj bo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija glede na Borelovi $\sigma$-algebri na $\mathbb{R}^2$ oziroma $\mathbb{R}$.

a. (5) Naj bo $g_n$ splošno nepadajoče zaporedje nenegativnih realnih merljivih funkcij. Pokažite, da je limita

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n \,.$$

merljiva.

*Rešitev: dovolj je pokazati, da je $\{x\colon f(x) > a\}$ merljiva množica. Velja*

$$\{x\colon f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) > a\}\,.$$

*Ker so vse množive v uniji merljive po predpostavki, je taka tudi $\{x\colon f(x) > a\}$.*

b. (10) Za fiksen $y \in \mathbb{R}$ in Borelovo množico $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definirajte funkcijo

$$x \overset{f_y^A}{\mapsto} \chi_A(x, y - x)\,,$$

kjer je $\chi_A$ indikator množice $A$. Pokažite, da družina množic

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R}^2\colon f_y^A \text{ je merljiva}\}$$

vsebuje vse Borelove množice $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

*Namig: začnite s $\pi$-sistemom vseh odprtih množic.*

*Rešitev: preslikava $x \overset{\Phi}{\mapsto} (x, y-x)$ je zvezna preslikava iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^2$, zato je za vsako odprto množico $A \subseteq \mathbb{R}^2$ praslika $\Phi^{-1}(A)$ odprta in posledično Borelova, tako kot tudi $\Phi^{-1}(A^c)$. Velja*

$$\left(f_y^A\right)^{-1}(\{1\}) = \Phi^{-1}(A) \quad \textit{in} \quad \left(f_y^A\right)^{-1}(\{0\}) = \Phi^{-1}(A^c)\,.$$

*Za Borelovo $B \subseteq \mathbb{R}$ je $\left(f_y^A\right)^{-1}(B)$ ali prazna množica ali $\mathbb{R}$ ali ena od zgornjih dveh merljivih praslik. Družina $\mathcal{L}$ vsebuje vse odprte množice. Preverjanje, da $\mathcal{L}$ zadošča definiciji $\lambda$-razreda je rutinsko, le za vsote indikatorjev disjunktnih $A_1, A_2, \ldots$ uporabimo točko a.*

c. (10) Naj bo $y \in \mathbb{R}$ fiksen. Utemeljite, da je funkcija

$$x \overset{\Phi_f}{\mapsto} f(x, y - x)$$

merljiva.

*Rešitev: iz druge točke sledi, da je funkcija $\Phi_f$ merljiva, če je $f$ stopničasta. Če privzamemo, da je $f \geq 0$, je $f$ limita naraščajočega zaporedja $f_n$ stopničastih funkcij. Kar velja*

$$f(x, y - x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x, y - x)\,,$$

*je $f(x, y-x)$ merljiva. Za splošne funkcije vzamemo $f = f^+ - f^-$.*

**2.** (25) Naj bo $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana zvezna funkcija. Predpostavite, da je $f$ v vsaki točki odvedljiva in je $f'$ merljiva funkcija.

a. (15) Predpostavite, da je za vsak končen interval $[a,b]$ odvod $f'$ omejen. Pokažite, da velja

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\,.$$

*Namig: definirajte*

$$g_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)\,.$$

*Rešitev: po predpostavki je na $[a,b+1]$ odvod $f'$ po absolutni vrednosti omejen, recimo s konstanto $c$. Po Lagrangovem izreku je*

$$n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f'(\eta)$$

*za neko točko $\eta\in(a,b+\frac{1}{n})$, zato so $g_n$ na $[a,b]$ omejene funkcije. Velja*

$$g_n(x)\to f'(x)\,,$$

*ko $n\to\infty$. Po izreku o dominirani konvergenci je*

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx\,.$$

*Po drugi strani je zaradi zveznosti $f$*

$$\int_a^b g_n(x)dx = n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right)\to f(b)-f(a)\,,$$

*ko $n\to\infty$.*

b. (10) Predpostavite, da je $f$ nepadajoča. Utemeljite, da je

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a)\,.$$

*Namig: Fatou.*

*Rešitev: kot v prvem delu definiramo funkcije $g_n$. Ker je $f$ napadajoča, so $g_n$ nenegativne funkcije in lahko uporabimo Fatoujevo lemo.*

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n(x)dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx\,.$$

*Zadnja limita je enaka $f(b)-f(a)$ in trditev sledi.*

**3.** (25) Kot znano upoštevajte

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}\,.$$

a. (10) Pokažite, da za $a > 0$ integral

$$\int_{(0,\infty)\times(0,a)} \frac{\cos(ux)}{1+x^2}dxdu$$

obstaja in je končen.

*Rešitev: kosinus je omejen, zato je dovolj pokazati obstoj integrala*

$$\int_{(0,\infty)\times(0,a)} \frac{1}{1+x^2}dxdu$$

*Če integriramo najprej po $x$, dobimo konstanto $\pi/2$, ki jo integriramo po končnem intervalu $(0,a)$. Integral zato obstaja.*

b. (15) Izračunajte za $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(1+x^2)}dx\,.$$

Utemeljite korake.

*Rešitev: upoštevamo, da je*

$$\frac{\sin(ax)}{x} = \int_0^a \cos(xu)du\,.$$

*Po Fubinuju računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(1+x^2)}dx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \int_0^a \cos(ux)du \\
&= \int_0^a du \int_0^\infty \frac{\cos(ux)}{1+x^2}dx \qquad \textit{Fubini} \\
&= \int_0^a \frac{\pi}{2}e^{-u}du \\
&= \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-a}\right)\,.
\end{aligned}$$

**4.** (25) Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ naj bodo neodvisne in enako porazdeljene. Naj bodo $Y_1, \ldots, Y_n$ slučajne spremenljivke, za katere velja

$$E\left[f(Y_1, \ldots, Y_n)\right] = E\left[h(X_n, S_n) f(X_1, \ldots, X_n)\right]$$

za vsako omejeno Borelovo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kjer je $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pozitivna Borelova funkcija in $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a. (15) Utemeljite, da je

$$E\left[h(X_n, S_n) | X_1, \ldots, X_{n-1}\right] = E\left[h(X_n, S_n) | S_{n-1}\right] ,$$

kjer je $S_{n-1} = X_1 + \cdots + X_{n-1}$.

*Rešitev: vemo, da v primeru, ko sta $X$ in vektor $Z$ nedvisna, velja*

$$E\left[f(X, Z) | Z\right] = \psi(Z) ,$$

*kjer je*

$$\psi(z) = E[f(X, z)] .$$

*V našem primeru je*

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = E\left[h(X_n, X_n + x_1 + \cdots + x_{n-1})\right] .$$

*Funkcija $\psi$ je odvisna le od vsote $x_1 + \cdots + x_{n-1}$, kar dokazuje trditev.*

b. (10) Naj bo $T_{n-1} = Y_1 + \cdots + Y_{n-1}$ in $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ omejena Borelova funkcija. Označite

$$E\left[g(X_1, \ldots, X_{n-1}) | S_{n-1}\right] = \psi(S_{n-1}) .$$

Pokažite, da je

$$E\left[g(Y_1, \ldots, Y_{n-1}) | T_{n-1}\right] = \psi(T_{n-1}) .$$

*Namig: Stolpi.*

*Rešitev: naj bo $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omejena Borelova funkcija. Računamo*

$$\begin{aligned}
&E\left[g(Y_1, \ldots, Y_{n-1}) k(T_{n-1})\right] \\
&\quad = E\left[h(X_n, S_n) g(X_1, \ldots, X_{n-1}) k(S_{n-1})\right] \\
&\quad = E\left[E\left[h(X_n, S_n) g(X_1, \ldots, X_{n-1}) k(S_{n-1}) | X_1, \ldots, X_{n-1}\right]\right] \\
&\quad = E\left[E\left[h(X_n, S_n) | X_1, \ldots, X_{n-1}\right] g(X_1, \ldots, X_{n-1}) k(S_{n-1})\right] \\
&\quad = E\left[E\left[h(X_n, S_n) | S_{n-1}\right] g(X_1, \ldots, X_{n-1}) k(S_{n-1})\right] \\
&\quad = E\left[E\left[k(S_{n-1}) h(X_n, S_n) | S_{n-1}\right] \psi(S_{n-1})\right] \\
&\quad = E\left[h(X_n, S_n) \psi(S_{n-1}) k(S_{n-1})\right] \\
&\quad = E\left[\psi(T_{n-1}) k(T_{n-1})\right] .
\end{aligned}$$

*Funkcija $\psi(T_{n-1})$ ustreza definiciji pogojnega matematičnega upanja.*