Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT - PMA

Verjetnost II

Računski izpit

6. februar 2026

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.					
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Naj bo μ mera na Borelovih podmnožicah intervala $[0,1)$. Predpostavite, da velja $\mu([0,1)) = 1$. Predpostavite, da imajo za vsak $n \geq 1$ vsi intervali oblike

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$$

za $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ enako mero.

a. (5) Izračunajte mere intervalov oblike

$$J_{k,l,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right)$$

za $0 \leq k < l \leq 2^n$.

Rešitev: za fiksen n velja

$$[0,1) = \cup_{k=0}^{2^n-1} I_{k,n} \, .$$

Poleg tega so intervali v uniji disjunktni in imajo vsi enako mero. Sledi

$$1 = \mu([0,1)) = 2^n \mu(I_{1,n}) \, .$$

Sledi, da je $\mu(I_{1,n}) = 2^{-n}$. Velja tudi

$$J_{k,l,n} = \cup_{j=k}^{l-1} I_{j,n}$$

in zato

$$\mu(J_{k,l,n}) = (l-k)2^{-n} \, .$$

b. (10) Utemeljite, da je družina $\mathcal{P} = \{I_{k,n} \colon n \geq 1, 0 \leq k \leq 2^n - 1\} \cup \{\emptyset\}$ π-sistem. Utemeljite, da je $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}([0,1))$.

Rešitev: predpostavimo $m \leq n$. Za intervala $I_{k,m}$ in $I_{l,n}$ imamo dve možnosti.

- *Intervala sta si tuja in je presek enak $\emptyset$.*
- *Velja $I_{l,n} \subset I_{m,k}$ in je presek kar prvi interval.*

Naj bo $[a,b) \subset [0,1)$ za $a < b$. Obstajata zaporedji diadičnih ulomkov a_n in b_n, da velja $a_n \uparrow a$ in $b_n \uparrow b$. Obstajata tudi diadična ulomka a' in b' z $a < b' < a' < b$). Velja

$$[a,b) = \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, a') \cup \cup_{n=1}^{\infty} [b', b_n) \, .$$

Interval $[a,b)$ lahko dobimo s števnimi preseki in unijami, ti intervali pa generirajo Borelovo σ-algebro po definiciji.

c. (5) Naj bo $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}([0,1)) \colon \mu(A) = \lambda(A)\}$, kjer je λ Lebesgueova mera na $[0,1)$. Pokažite, da je $\mathcal{L}$ λ-sistem.

Rešitev: preverimo po vrsti:

- *Po predpostavki je $1 = \mu([0,1)) = \lambda([0,1))$.*

- *Če je $B \subset A$ in je $A, B \in \mathcal{L}$, je*

$$\mu(A\backslash B) = \mu(A) - \mu(B) = \lambda(A) - \lambda(B) = \lambda(A\backslash B)\,,$$

torej $A\backslash B \in \mathcal{L}$.

- *Če so $A_1, A_2 \ldots$ disjunktne iz $\mathcal{L}$, je*

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) = \lambda\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\,,$$

torej je $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$.

d. (5) Sklepajte, da je μ Lebesgueova mera.

Rešitev: λ-sistem $\mathcal{L}$ vsebuje π-sistem $\mathcal{P}$, Slednji generira Borelovo σ-algebro na $[0, 1)$. Torej $\mathcal{L}$ vsebuje vse Borelove množice. Trditev sledi.

2. (25) Izračunati želimo vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+r)}$$

za $a > 0$ in celo število $r \geq 1$. Upoštevajte, da je funkcija Γ za $a > 0$ dana z

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx\,.$$

Kot znano privzemite, da je

$$\Gamma(a+n+1) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)\Gamma(a)$$

a. (15) Naj bo za $a, b > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}$$

in

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-x}\,.$$

Izračunajte integral

$$\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f(x) g(y-x) \chi_\Delta(x,y) dx dy\,,$$

kjer je $\Delta = \{(x,y)\colon 0 < x < y\}$ na dva načina. Utemeljite korake. Sklepajte, da velja

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

Rešitev: funkcija dveh spremenljivk, ki jo integriramo, je nenegativna, zato lahko po Fubiniju zamenjamo vrstni red integralov. Računamo

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f(x) g(y-x) \chi_\Delta(x,y) dx dy \\
&= \int_0^\infty dy \int_0^y f(x) g(y-x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty dy \int_0^y x^{a-1}(y-x)^{b-1} e^{-y} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-y} dy \int_0^1 (yu) x^{a-1} (y-yu)^{b-1} y du \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} dy B(a,b) \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot B(a,b)\,.
\end{aligned}$$

Integriramo še v drugi smeri.

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f(x)g(y-x)\chi_\Delta(x,y)dxdy \\
&= \int_0^\infty f(x)dx \int_x^\infty g(y-x)dy \\
&= \int_0^\infty f(x)dx \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot B(a,b)=1\,,$$

torej iskana enakost.

b. (10) Preverite, da velja

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+r)} &= \frac{1}{\Gamma(r+1)}\cdot B(a+n,r+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)}\cdot\int_0^1 x^{a+n-1}(1-x)^r dx\,.
\end{aligned}$$

Uporabite enakost iz točke a., tudi če je niste izpeljali. Izračunajte

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+r)}\,.$$

Utemeljite zamenjavo seštevanja in integriranja.

Rešitev: z rezultatom iz prvega dela preverimo namig. Računamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+r)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{a+n-1}(1-x)^r dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{a+n-1}(1-x)^r dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^r \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{r-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \cdot B(a,r) \\
&= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(r)}{\Gamma(a+r)} \\
&= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{a(a+1)\cdots(a+r-1)}\,.
\end{aligned}
$$

Zamenjava seštevanja in integriranja v neskončni vrsti je utemeljena po izreku o monotoni konvergenci, ker so vsi členi vrste nenegativne funkcije.

3. (25) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Predpostavljajte, da sta X in Y neodvisni in ima X gostoto f_X, Y pa porazdelitev μ_Y. Porazdelitev para (X, Y) je zaradi neodvisnosti enaka $\mu_X \times \mu_Y$. Upoštevajte, da je za poljubno omejeno funkcijo g

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx\,.$$

Označite $Z = X + Y$.

a. (15) Pokažite, da je

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq z) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_\Delta(x,y) d(\mu_X \times \mu_Y)(x,y) \\ &= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y)\mu_Y(dy) \right) dx \end{aligned}$$

kjer je $\Delta = \{(x,y) \colon x + y \leq z\}$. Utemeljite korake.

Rešitev: vsi integrandi so nenegativni, zato lahko uporabimo Fubinijev izrek. Računamo

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq z) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_\Delta(x,y) d(\mu_X \times \mu_Y)(x,y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_Y(dy) \int_{-\infty}^{z-y} d\mu_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_Y(dy) \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_Y(dy) \int_{-\infty}^{z} f_X(x-y) dx \\ &= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y)\mu_Y(dy) \right) dx\,. \end{aligned}$$

b. (10) Utemeljite, da ima slučajna spremenljivka Z gostoto

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) d\mu_Y(y)\,.$$

Dovolj je pokazati, da je

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(u) du\,.$$

Rešitev: funkcija

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y)\mu_Y(dy)$$

je po Fubinijevem izreku merljiva, tako da trditev takoj sledi iz prvega dela naloge.

4. (25) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s $E(X^2) < \infty$ in $E(Y^2) < \infty$.

a. (15) Pokažite, da velja

$$\mathrm{cov}(X, E(Y|X)) = \mathrm{cov}(X, Y)\,.$$

Če velja še $E(Y|X) = aX + b$ za neki konstanti a in b, pokažite, da je

$$b = E(Y) - aE(X) \qquad \text{in} \qquad a = \mathrm{cov}(X, Y)/\mathrm{var}(X)\,.$$

Rešitev: upoštevati moramo, da za $\mathcal{F}$-merljivo slučajno spremenljivko U velja $E(UX|\mathcal{F}) = UE(X|\mathcal{F})$. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, Y) &= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \\
&= E\left[E\left[(X - E(X))(Y - E(Y)|X\right]\right] \\
&= E\left[(X - E(X))(E(Y|X) - E(Y))\right] \\
&= \mathrm{cov}(X, E(Y|X))\,.
\end{aligned}$$

Če velja še $E(Y|X) = aX + b$, dobimo iz prvega dela

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, Y) &= \mathrm{cov}(X, E(Y|X)) \\
&= \mathrm{cov}(X, aX + b) \\
&= a\mathrm{var}(X)\,.
\end{aligned}$$

Konstanto b dobimo iz enakosti $E(Y) = aE(X) + b$.

b. (10) Naj bo X eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka z $E(X) = 1$. Pogojna porazdelitev spremenljivke Y glede na X naj bo eksponentna s parametrom $1/(2X + 1)$. Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Rešitev: iz besedila sledi $E(Y|X) = 2X + 1$, torej

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(X, 2X + 1) = 2\,\mathrm{var}(X)\,.$$

Upoštevamo še, da je $\mathrm{var}(X) = 1$ *in dobimo želen rezultat.*