Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Univerza na Primorskem

FAMNIT - MATEMATIČNE ZNANOSTI

Verjetnost z mero

Računski izpit

1. februar 2023

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja.

Naloga	a.	b.	c.	d.	Skupaj
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor. Naj bosta $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{P}_2$ dva π-sistema in $\sigma(\mathcal{P}_1)$ in $\sigma(\mathcal{P}_2)$ najmanjši σ-algebri, ki vsebujeta posamezna π-sistema. Predpostavite, da za vsaka dogodka $A \in \mathcal{P}_1$ in $B \in \mathcal{P}_2$ velja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

a. (15) Naj bo $A \in \mathcal{P}_1$. Pokažite, da za vsak $D \in \sigma(\mathcal{P}_2)$ velja $P(A \cap D) = P(A)P(D)$.

Rešitev: definirajmo družino dogodkov $\mathcal{L}^A = \{D \in \mathcal{F} \colon P(A \cap D) = P(A)P(D)\}$. Po definiciji je $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{L}^A$. Pokažimo, da je $\mathcal{L}^A$ λ-sistem. Preverimo:

- *Očitno je $\Omega \in \mathcal{L}^A$.*
- *če sta $F, D \in \mathcal{L}^A$ in je $F \subset D$, računamo*

$$\begin{aligned} P(A \cap (D \backslash F)) &= P\left((A \cap D) \backslash (A \cap F)\right) \\ &= P(A \cap D) - P(A \cap F) \\ &= P(A)P(D) - P(A)P(F) \\ &= P(A)(P(D) - P(F)) \\ &= P(A)P(D \backslash F)\,. \end{aligned}$$

  Sledi, da je $D \backslash F \in \mathcal{L}^A$.
- *Če so $D_1, D_2, \ldots$ disjunktni dogodki in velja $D_k \in \mathcal{L}^A$ za $k = 1, 2, \ldots$, je*

$$\begin{aligned} P\left(A \cap \cup_{k=1}^{\infty} D_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A \cap D_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A)P(D_k) \\ &= P(A) \sum_{k=1}^{\infty} P(D_k) \\ &= P(A)P\left(\cup_{k=1}^{\infty} D_k\right)\,. \end{aligned}$$

  Sledi $\cup_{k=1}^{\infty} D_k) \in \mathcal{L}^A$.

Po Dynkinovi lemi λ-sistem $\mathcal{L}^A$ vsebuje $\sigma(\mathcal{P}_2)$.

b. (10) Naj bo $C \in \sigma(\mathcal{P}_1)$ in $D \in \sigma(\mathcal{P}_2)$. Pokažite, da je $P(C \cap D) = P(C)P(D)$.

Rešitev: razmislek je enak kot v prvi točki, le da namesto $\mathcal{P}_1$ vzamemo $\sigma(\mathcal{P}_2)$, ki je tudi π-sistem, namesto $\mathcal{P}_2$ pa $\mathcal{P}_1$.

2. (25) Za $t > 0$, $x, y > 0$ označite za $\nu > 0$

$$q_t^\nu(x,y) = \frac{1}{2t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp(\,-(x+y)/2t) I_\nu(\sqrt{xy}/t)\,,$$

kjer je

$$I_\nu(u) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\frac{u}{2})^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

modificirana Besslova funkcija z indeksom ν.

a. (15) Izračunajte

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} q_t(x,y)dy\,.$$

Utemeljite korake.

Rešitev: računamo z uporabo izreka o monotoni konvergenci.

$$\begin{aligned}
E(e^{-\lambda X}) &= \int_0^\infty e^{-\lambda y}\; q_t^\nu(x,y)\,dy \\
&= \frac{1}{2t}\int_0^\infty e^{-\lambda y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp(\,-(x+y)/2t) I_\nu(\sqrt{xy}/t)\,dy \\
&= \frac{1}{2t} x^{-\nu/2} e^{-x/2t} \int_0^\infty y^{\nu/2}\cdot e^{-(\lambda+1/2t)y} I_\nu(\sqrt{xy}/t)\,dy \\
&= \frac{1}{2t} x^{-\nu/2} e^{-x/2t} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{\nu/2+k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}t^{\nu+2k}} \int_0^\infty e^{-(\lambda+1/2t)y} y^{\nu+k}\,dy \\
&= \frac{1}{2t} e^{-x/2t} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k\Gamma(\nu+k+1)}{k!(\lambda+1/2t)^{\nu+k+1}\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}t^{\nu+2k}} \\
&= \frac{1}{2t} e^{-x/2t} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!(\lambda+1/2t)^{\nu+k+1}2^{\nu+2k}t^{\nu+2k}} \\
&= \frac{1}{(1+2t\lambda)^{\nu+1}}\cdot \exp\left(-\frac{x}{2t}+\frac{x}{(4t^2\lambda+2t)}\right) \\
&= \frac{1}{(1+2t\lambda)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{x\lambda}{2t\lambda+1}\right)
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte

$$\int_{(0,\infty)^2} e^{-\lambda v} q_t^\nu(x,u) q_s^\nu(u,v)dudv\,.$$

Utemeljite korake.

Rešitev: uporabimo Fubinijev izrek, kar lahko, ker so vse funkcije nenegativne.

Računamo

$$
\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)^2} e^{-\lambda v} q_t^\nu(x,u) q_s^\nu(u,v)\,du\,dv \\
&= \int_0^\infty q_t^\nu(x,u)du \int_0^\infty e^{-\lambda v}\, q_s^\nu(u,v)\,dv \quad \textit{Fubini} \\
&= \int_0^\infty q_t^\nu(x,u)\,du\, \frac{1}{(1+2s\lambda)^{\nu+1}} \exp(-\frac{u\lambda}{2s\lambda+1}) \\
&= \frac{1}{(1+2s\lambda)^{\nu+1}} \cdot \frac{1}{(1+2s\frac{2t\lambda}{1+2s\lambda})^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{x\frac{2s\lambda}{1+2t\lambda}}{1+2t\frac{2s\lambda}{1+2s\lambda}}\right) \\
&= \frac{1}{(1+2(t+s)\lambda)^{\nu+1}} \cdot \exp\left(-\frac{x\lambda}{2(s+t)\lambda+1}\right)
\end{aligned}
$$

3. (25) Izračunati želimo integral

$$I = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{e^{-x}}{x^{3/2}} dx$$

za $\lambda > 0$.

a. (15) Utemeljite, da integral

$$\int_{(0,\lambda)\times(0,\infty)} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{x}} dudx$$

obstaja in je končen.

Rešitev: integrand je nenegativen, zato po Fubiniju zadošča, da je integral končen v eni od dveh smeri. Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\lambda)\times(0,\infty)} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dudx &= \int_0^\lambda du \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^\lambda \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{u}} du \\
&= \sqrt{\pi}\left(2\sqrt{u}\right)\Big|_0^\lambda \\
&= 2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte I. Utemeljite korake.

Rešitev: po Fubiniju lahko integriramo najprej po x. Računamo

$$\begin{aligned}
I &= \int_{(0,\lambda)\times(0,\infty)} \frac{e^{-x(u+1)}}{\sqrt{x}} dudx \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \int_0^\lambda e^{-xu} du \\
&= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{e^{-x}}{x^{3/2}} dx \\
&= 2\sqrt{\pi}\cdot\left(\sqrt{\lambda+1} - 1\right).
\end{aligned}$$

Integral v prvi vrsti je končen, ker je dominiran z integralom iz prvega dela naloge.

4. (25) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $E(X_1) = 0$ in $E(X_1^2) = 1$.

a. (15) Za $n > m$ izračunajte

$$E\left[\sum_{1 \le i < j \le n} X_i X_j | X_1, \ldots, X_m\right].$$

Rešitev: uporabimo naslednja dejstva:

- *Če sta U in V neodvisni, je $E(U|V) = E(U)$.*
- *Če je U merljiva glede na $\mathcal{G}$, je $E(UV|\mathcal{G}) = UE(V|\mathcal{G})$.*
- *Pogojno matematično upanje je linearno.*

Označimo $\mathcal{G} = \sigma(X_1, \ldots, X_m)$. Računamo

- *Če je $i > m, j > m$, je $E(X_i X_j|\mathcal{G}) = E(X_i X_j) = 0$.*
- *Če je $i \le m$ in $j > m$, je*

$$E(X_i X_j|\mathcal{G}) = X_i E(X_j|\mathcal{G}) = 0\,.$$

- *Če je $i, j \le m$, je $E(X_i X_j|\mathcal{G}) = X_i X_j)$.*

Z uporabo linearnosti sledi

$$E\left[\sum_{1 \le i < j \le n} X_i X_j | X_1, \ldots, X_m\right] = \sum_{1 \le i < j \le m} X_i X_j\,.$$

b. (10) Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pokažite, da je

$$E(S_n^2 | X_1, X_2, \ldots, X_m) = (n - m) + S_m^2\,.$$

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned}
E(S_n^2|\mathcal{G}) &= E\left[\sum_{1 \le i,j \le n} X_i X_j|\mathcal{G}\right] \\
&= \sum_{1 \le i \le n} E(X_i^2|\mathcal{G}) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} E(X_i X_j|\mathcal{G}) \\
&= (n - m) + \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + 2 \sum_{1 \le i,j \le m} X_i X_j \\
&= (n - m) + S_m^2
\end{aligned}$$