Univerza na Primorskem

FAMNIT

Verjetnost

Pisni izpit

20. avgust 2018

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6, s 5 rešenimi nalogami pa desežete 100%. Če jih rešite več, imate presežne točke v dobrem. Na razpolago imate 120 minut, dovoljena sredstva pa so A4 format list s formulami in matematični priročnik.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Iz množice, ki ima N elementov, r-krat izberemo podmnožico velikosti n. Pri vsaki izbiri so vse možne podmnožice predpisane velikosti enako verjetne. Vse izbire podmnožic so med seboj neodvisne.

a. (5) Kolikšna je verjetnost, da je fiksnih k elementov dane množice v vseh izbranih podmnožicah?

b. (15) Kolikšna je verjetnost, da noben element ni v vseh izbranih podmnožicah? Dobljenega izraza vam ni treba poenostavljati.

Namig: definirajte dogodke

$$A_i = \{i\text{-}ti \textit{ element je v vseh izbranih podmnožicah}\}.$$

2. (20) Nebotičnik ima neskončno nadstropij, ki jih oštevilčimo s $k = 0, 1, \ldots$. V nadstropju 0 v dvigalo vstopi X_0 ljudi, kjer je $X_0 \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. V naslednjih nadstropjih se dvigalo vsakič ustavi in vsak posameznik, ki je še v dvigalu, izstopi z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, neodvisno od ostalih posameznikov in neodvisno od izstopov v prejšnjih nadstropjih in neodvisno od X_0. Naj bo X_k število posameznikov v dvigalu takoj po tem, ko dvigalo zapusti k-to nadstropje za $k = 0, 1, 2, \ldots$.

a. (10) Navedite porazdelitev X_1.

Namig: velja

$$\begin{aligned} & P(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) \\ = \quad & P(X_0 = k_0, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}) P(X_n = k_n | X_0 = k_0, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}) \,. \end{aligned}$$

b. (10) Naj bo M številka nadstropja, iz katerega bo prvič odpeljalo prazno dvigalo. Navedite porazdelitev M.

Namig: iz primera a. z indukcijo sklepajte kakšna je porazdelitev X_m.

3. (20) Slučajni spremenljivki U in V naj bosta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na $(0, 1)$.

a. (10) Izračunajte gostoto vektorja $(X, Y) = (U, V(1-U))$.

b. (10) Izračunajte gostoto slučajne spremenljivke $Z = U + V(1-U)$.

4. (20) Za okroglo mizo sedi $n \geq 3$ kockarjev. Vsak vrže svojo kocko; vse kocke so standardne (kar pomeni, da lahko pade od 1 do 6 pik), poštene (kar pomeni, da so vsa števila enako verjetna) in neodvisne. Označimo z W število parov sosednjih kockarjev, za katere velja, da oba vržeta sosednji števili pik. Števili iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sta sosednji, če se razlikujeta za 1 (3 in 4 sta torej sosednji, 6 in 1 pa ne, prav tako tudi ne 3 in 3).

a. (10) Izračunajte $E(W)$ in $\mathrm{var}(W)$.

   Namig: indikatorji.

b. (10) Naj bo S število kockarjev, ki vržejo šest pik. Izračunajte $\mathrm{cov}(W, S)$.

5. (20) Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{2, 3, \ldots\}$ in porazdelitvijo

$$P(X = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

za $p \in (0, 1)$. Kot znano privzemite, da je za $|x| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

a. (10) Pokažite, da je rodovna funkcija slučajne spremenljivke X enaka

$$G_X(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^2\,.$$

b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

6. (20) Naj bo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija in označite $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ in $v^2 = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ideja Monte-Carlo metode za računanje integralov je, da računalniško generiramo med sabo neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$, ki so enakomerno porazdeljene na $[0,1]$ in izračunamo

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k)\,.$$

a. (10) Naj bo $f(x) = x$. Izračunajte $E(A_n)$ in $\mathrm{var}(A_n)$.

b. (15) Naj bo $f(x) = x$. Označite $I = 1/2$. Kako velik n je treba izbrati, da bo $P(I - 0,01 \le A_n \le I + 0,01) \ge 0,99$?