Vaje 5 - Rešitve

1. *(Izpit 29.1.2018)* Oseba stara x let želi kupiti mešano zavarovanje za dobo n let. Privzemite, da je obrestna mera enaka i. Če se smrt zgodi v letu k pred doživetjem, je izplačilo enako $C(1+j)^{k+1}$ na koncu leta, v katerem je nastopila smrt, kjer je $0 < j < i$. Ob doživetju je izplačilo enako $C(1+j)^n$. Premija se plačuje v enakih zneskih na začetku vsakega leta zavarovanja do vključno začetka zadnjega leta. Začetni stroški naj bodo α in delež $\bar{\beta}$ prve premije. Od druge plačane premije naprej, če do plačila pride, zavarovalnica obračunava delež β premije kot strošek procesiranja plačila premije. Drugih stroškov ni.

   a. (10) Izrazite premijo z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

   Rešitev: Označimo $\tilde{v} = (1+j)/(1+i)$ in označimo iskano premijo z Π. Po načelu ekvivalence mora veljati

$$\alpha + \bar{\beta}\Pi + \sum_{k=0}^{n-1} C\tilde{v}^{k+1} P(K_x = k) + \\ + C\tilde{v}^n P(K_x \geq n) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta v^k \Pi P(K_x \geq k) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \Pi v^k P(K_x \geq k)\,.$$

   V aktuarskih simbolih je

$$\alpha + \bar{\beta}\Pi + CA_{x:\,\overline{n}|} + \beta\Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta\Pi = \Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}\,.$$

   Simbol $A_{x:\,\overline{n}|}$ je izračunan z diskontnim faktorjem $\tilde{v}$, simbol $a_{x:\,\overline{n}|}$ pa z diskontnim faktorjem v. Iz enačb lahko izračunamo premijo Π.

   b. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ z aktuarskimi simboli. Pri vsakem simbolu navedite, s katerim diskontnim faktorjem je izračunan.

   Rešitev: Za $k < n-1$ je

$${}_kV = C(1+j)^k A_{x+k:\,\overline{n-k}|} + \beta\Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|} - \beta\Pi - \Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|}\,.$$

   Simbol $A_{x+k:\,\overline{n-k}|}$ je izračunan z diskontnim faktorjem $\tilde{v}$, simbol $a_{x+k:\,\overline{n-k}|}$ pa z diskontnim faktorjem v. Iz enačb lahko izračunamo premijo Π.

Za $k = m - 1$ je situacija različna v toliko, da ne bo nobene premije več in s tem tudi ne več deleža premije. Sledi

$$_{m-1}V = C(1+j)^n v\,.$$

2. *(Izpit 26.6.2019)* Oseba stara x let kupi zavarovanje za doživetje za dobo n let in zavarovalno vsoto 1. Posebnost pogodbe je, da v primeru smrti pred iztekom zavarovanja zavarovalnica na koncu leta smrti povrne delež α obrestovane vplačane premije, vendar le če se smrt zgodi pred iztekom m-tega leta zavarovanja z $m < n$. Premije se plačuje na začetku vsakega leta zavarovanja. Premija ostaja ves čas zavarovanja enaka, efektivna obrestna mera pa naj bo i.

   a. (10) Izpeljite formulo za neto rezervacijo $_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

   Rešitev: Najprej izračunamo premijo. Po principu ekvivalence mora veljati

$$CA_{x:\,\overline{n}|}^{\;\;1} + \sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1}{}_kp_x \cdot q_{x+k} \cdot \alpha(k+1)\Pi = \Pi\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}.$$

   Od tu lahko izrazimo premijo Π*. Potem pa računamo*

$$\begin{aligned} {}_kV &= \sum_{l=0}^{n-2-k} \alpha(k+1+l)\Pi(1+i)^{k+l+1}v^{l+1} \cdot {}_lp_{x+k} \cdot q_{x+k+l} \\ &\quad + C \cdot A_{x+k:\,\overline{n-k}|}^{\;\;1} - \Pi\ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k}|}. \end{aligned}$$

   V prvi vsoti $\alpha(k+1+l)\Pi$ predstavlja premije, ki so bile plačane do trenutka k, $(1+i)^{k+l+1}$ pa obrestovalni faktor.

   b. (10) Izračunajte $_3V$, če je efektivna obrestna mera 4%, $x = 30$, $n = 5$, $m = 3$ in $\alpha = 0,3$.

   Rešitev: Naslednji rezultati so z upoštevanjem tablic smrtnosti za moškega. Najprej izračunamo premijo $\Pi = 0,1896$ in nato še

$$_3V = 0,5290.$$

3. *(Izpit 4.7.2018)* Vrednost mešanega zavarovanja za osebo staro x let za obdobje n let z izplačilom 1 označimo z $A_{x:\,\overline{n}|}$. Obrestno mero označimo z i in diskontni faktor z $v = (1+i)^{-1}$.

   a. (5) Pokažite, da za $0 < m < n$ velja enačba

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + v^m{}_mp_x\, A_{x+m:\overline{n-m}|}\,,$$

kjer je $A^1_{x:\overline{m}|}$ vrednost zavarovanja z primer smrti osebe stare x let za obdobje m let. Pojasnite enakost z besedami.

Rešitev: Leva stran enakosti predstavlja mešano zavarovanje za obdobje n let. To pomeni, da v kolikor oseba umre pred n-tim letom zavarovanja, dobi izplačan znesek ob koncu leta, v katerem je umrla, ob doživetju pa dobi izplačilo po izteku n-tega leta zavarovanja.

Če obdobje razdelimo na obdobje do m-tega leta in potem od m-tega do n-tega leta, se po m letih lahko zgosi dvoje. Bodisi oseba umre in zavarovanje predstavlja zavarovanje za primer smrti, bodisi je oseba živa. V tem primeru lahko od m-tega leta naprej gledamo kot novo mešano zavarovanje, oseba je takrat stara $x+m$ let in obdobje zavarovanja bi trajalo $n-m$ let. Faktor v^m predstavlja diskontiranje, saj gledamo iz časa 0 do časa m in faktor ${}_mp_x$ verjetnost, da je oseba živa ob preteku prvih m let zavarovanja.

b. (10) Za $0 < m < n-1$ poiščite zvezo med ${}_mV_x$ in ${}_{m+1}V_x$.

Rešitev: Za mešano zavarovanje velja

$${}_mV_x = A_{x+m:\,\overline{n-m}|} - \Pi \ddot{a}_{x+m:\,\overline{n-m}|}$$

Uporabimo točko a. za $m = 1$

$$\begin{aligned}
{}_mV_x &= A^1_{x+m:\,\overline{1}|} + vp_{x+m}A_{x+m+1:\,\overline{n-m-1}|} - \Pi \ddot{a}_{x+m:\,\overline{n-m}|} \\
&= A^1_{x+m:\,\overline{1}|} + vp_{x+m}\left(A_{x+m+1:\,\overline{n-m-1}|} - \Pi \ddot{a}_{x+m+1:\,\overline{n-m-1}|}\right) \\
&\quad -1.
\end{aligned}$$

Zadnja enakost velja, ker

$$\ddot{a}_{x+m:\,\overline{n-m}|} = 1 + vp_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+m+1:\,\overline{n-m-1}|}.$$

Pokazali smo torej povezavo

$${}_mV_x = vq_{x+m} + vp_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x - 1.$$

c. (5) Pri katerem $0 < m < n-1$ bodo matematične rezervacije ${}_mV_x$ največje? Pojasnite z besedami zakaj.

Rešitev: Rezervacije bodo največje za $m = n-2$, saj se s starostjo osebe veča verjetnost za smrt in s tem tveganje za izplačilo zavarovanja v primeru smrti. Bližje kot smo izteku pogodbe, bližje je dan izplačila.
To lahko opazimo tudi iz formule iz b., saj je $vq_{x+m}-1$ negativno število blizu -1, vp_{x+m} pa pozitivno število <1.

4. *(Izpit 11.2.2016)* Oseba stara 30 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za obdobje 25 let. Zavarovalna vsota 50.000 EUR se izplača ob koncu leta, v katerem zavarovanec umre, oziroma ob doživetju. Premije se placujejo letno prenumerandno (na začetku leta), dokler zavarovanec živi, vendar največ 20 let. Sklenitveni stroški znašajo 1% zavarovalne vsote, inkaso stroški 2% bruto premije ter upravni stroški 0,5% zavarovalne vsote za vsako leto zavarovanja.

   a. (5) Zapišite enačbo za letno bruto premijo.

   Rešitev: Po principu ekvivalence mora veljati enakost med izplačili

$$C \cdot A^1_{x:\,\overline{n}|} + C \cdot A_{x:\,\overline{n}|}{}^1 + \alpha C + \beta \Pi \ddot{a}_{x:\,\overline{20}|} + \gamma C \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}$$

   za $C = 50.000$, $x = 30$, $n = 25$, $\alpha = 0,01, \beta = 0,02$ *in* $\gamma = 0,005$ *in vplačili*

$$\Pi \ddot{a}_{x:\,\overline{20}|}.$$

   Izrazimo premijo in dobimo

$$\Pi = \frac{50000 \cdot A_{30:\,\overline{25}|} + 0,01 \cdot 50000 + 0,005 \cdot 50000 \ddot{a}_{30:\,\overline{25}|}}{\ddot{a}_{30:\,\overline{20}|} - 0,02 \ddot{a}_{30:\,\overline{20}|}},$$

   kar lahko poenostavimo v

$$\Pi = \frac{50000 \cdot A_{30:\,\overline{25}|} + 500 + 250 \ddot{a}_{30:\,\overline{25}|}}{0,98 \ddot{a}_{30:\,\overline{20}|}}.$$

   b. (5) Zapišite fomulo za bruto matematično rezervo ob koncu 20. leta zavarovanja.

   Rešitev: Premije so ne ob koncu 20. leta že nehale plačevati, torej vplačil ni, kot tudi ne inkaso stroškov. Zato so zavarovalno tehnične rezervacije enake

$${}_{20}V = 50.000 \cdot A_{50:\,\overline{5}|} + 250 \ddot{a}_{50:\,\overline{5}|}.$$

   c. (10) Privzemite, da matematične rezerve obračunavate v zveznem času. Označite $x = 30$ in $T = 25$. Kaj bi morala biti limita

$$\lim_{t \to T} {}_tV_x\,?$$

   Rešitev: Ob času T *bomo morali izplačati zavarovalno vsoto* $C = 50.000$, *torej bi morala limita biti enaka* C.