VAJE 4 - REŠITVE

1. *(Izpit 29.1.2018)* Naj bo K_x preostala življenjska doba osebe stare x let. Slučajna spremenljivka K_x^* naj bo definirana kot

$$K_x^* = \begin{cases} K_x & \text{za } K_x \leq n, \\ n & \text{za } K_x > n. \end{cases}$$

Označite $e_{x:\,\overline{n}|} = E(K_x^*)$.

a. (5) Utemeljite, da velja

$$e_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x\,.$$

Rešitev:

b. (5) Naj bo $0 \leq x < y$. Pokažite, da velja

$$e_{x:\,\overline{y-x}|} = p_x + p_x\, e_{x+1:\,\overline{y-(x+1)}|}\,.$$

Rešitev: Začnemo z levo stranjo enačbe in jo preoblikujemo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{y-x} {}_kp_x &= p_x + \sum_{k=2}^{y-x} {}_kp_x \\ &= p_x + p_x \sum_{k=1}^{y-(x+1)} {}_kp_{x+1}. \end{aligned}$$

Uporabimo ustrezne aktuarske simbole in zgornja enačba sledi.

c. (10) Pokažite, da velja

$$e_{x:\,\overline{n}|} = p_x(1 - {}_np_{x+1}) + p_x e_{x+1:\,\overline{n}|}\,.$$

Rešitev: Začnemo z levo stranjo enačbe in jo preoblikujemo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x &= p_x + p_x \sum_{k=2}^{n} {}_kp_x \\ &= p_x + p_x \sum_{k=1}^{n} {}_kp_{x+1} - p_x \cdot {}_np_{x+1}. \end{aligned}$$

Uporabimo ustrezne aktuarske simbole in zgornja enačba sledi.

2. *(Izpit 4.7.2018)* Ženska stara x let kupi zavarovanje za doživetje za dobo n let in zavarovalno vsoto 1. Posebnost pogodbe je, da v primeru smrti pred iztekom zavarovanja zavarovalnica povrne delež α neobrestovane vplačane premije. Premije se plačuje na začetku vsakega leta zavarovanja. Premija ostaja ves čas zavarovanja enaka, obrestna mera pa naj bo i.

   a. (10) Izpeljite formulo za premijo za opisano zavarovanje in premijo zapišite z aktuarskimi simboli.

   Rešitev: Ali je tukaj mišljen delež α ene premije ali vseh vplačanih premij?
   Princip ekvivalence pravi, da izenačimo pričakovano sedanjo vrednost izplačil in pričakovano sedanjo vrednost vplačil. Izplačila so enaka (za naš primer velja $C = 1$):

$$C \cdot v^n \cdot {}_np_x + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(k+1)\Pi \cdot v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k},$$

   kjer prvi člen predstavlja del z izplačilom v primeru doživetja in drugi člen oziroma vsota predstavlja del za primer smrti. Zgornje lahko z poenostavimo v

$$v^n {}_np_x + \alpha\Pi \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot v^{k+1} {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

   oziroma

$$A_{x:\,\overline{n|}}{}^{1} + \alpha\Pi \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot v^{k+1} {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

   Vplačila pa so enaka

$$\Pi \cdot \ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}.$$

   Izenačimo izraza in dobimo premijo Π.

   b. (10) Izpeljite formulo za zavarovalno tehnične rezervacije na začetku k-tega leta zavarovanja in jo zapišite z aktuarskimi simboli.

   Rešitev: Ko računamo ${}_kV$, je oseba stara $x+k$ let, ostalo trajanje zavarovanja pa bo $n-k$. Zapišemo podobno kot zgoraj, kjer so zavarovalno tehične rezervacije enake razlike med pričakovano sedanjo vrednostjo obveznosti zavarovalnice in pričakovano sedanjo vrednostjo prihodnjih premij.

$${}_kV = v^{n-k} {}_{n-k}p_{x+k} + \alpha\Pi \sum_{l=0}^{n-k-1} (l+1) \cdot v^{l+1} {}_lp_{x+k} q_{x+k+l} - \Pi \cdot \ddot{a}_{x+k:\,\overline{n-k|}}.$$

3. *(Izpit 27.1.2016)* Oseba stara x let kupi zavarovanje za primer smrti za vse življenje. Zavarovana vsota je 10.000 EUR. Premije se plačuje na začetku leta za naslednjih 20 let po sklenitvi zavarovanja, če je oseba še živa. Zavarovano vsoto zavarovalnica izplača ob koncu leta smrti. Efektivna obrestna mera naj bo i. Posebnost pogodbe je, da v času plačevanja premij v primeru smrti zavarovalnica poleg zavarovane vsote izplača tudi neobrestovano polovico zadnje premije, vendar ne po preteku 20 let.

   a. (20) Naj bo $d = i/(1+i)$. Pokažite, da je premija enaka

$$\Pi = \frac{10.000A_x}{(1+d/2)\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - (1 - v^{20}{}_{20}p_x)/2}\,.$$

   Rešitev: Označimo zavarovano vsoto s C. Veljati mora

$$C\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} + \frac{\Pi}{2}\sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} = \Pi\sum_{k=0}^{19} v^k{}_kp_x\,.$$

   Velja $\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} = A_x$ *in* $\sum_{k=0}^{19} v^k{}_kp_x = \ddot{a}_{x:\,\overline{20|}}$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} &= \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_kp_x(1-p_{x+k}) \\
&= \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_kp_x - \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_kp_x p_{x+k} \\
&= v\sum_{k=0}^{19} v^k{}_kp_x - \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}{}_{k+1}p_x \\
&= v\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - \sum_{k=1}^{20} v^k{}_kp_x \\
&= v\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - \sum_{k=0}^{19} v^k{}_kp_x + {}_0p_x - v^{20}{}_{20}p_x \\
&= v\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} - \ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} + 1 - v^{20}{}_{20}p_x \\
&= (v-1)\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} + 1 - v^{20}{}_{20}p_x \\
&= -d\ddot{a}_{x:\,\overline{20|}} + 1 - v^{20}{}_{20}p_x\,.
\end{aligned}$$

   Formula sledi.

4. *(Izpit 8.9.2016)* Oseba stara 44 let sklene z zavarovalnico mešano zavarovanje za obdobje 16 let. Zavarovalna vsota 10.000 EURO se

izplača ob koncu meseca, v katerem oseba umre oziroma ob doživetju. Premije se plačujejo mesečno prenumerandno dokler zavarovanec živi, vendar največ 16 let. Začetni stroški znašajo 3,5% zavarovalne vsote, inkaso stroški 6% bruto premije ter upravni stroški 0,3% zavarovane vsote za vsako leto zavarovanja.

a. (10) Zapišite enačbo za mesečno bruto premijo in jo na kratko obrazložite.

Rešitev: Poglejmo najprej bolj enostaven primer, če bi bila vplačila premij letna. Potem bi bila pričakovana sedanja vrednost prihodnjih izplačil enaka

$$C\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} + Cv^n{}_np_x + C\alpha + \beta\Pi_a \sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_kp_x + \gamma C\sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_kp_x,$$

kjer Π_a *označuje stroškovno premijo in velja* $\alpha = 0,035$*,* $\beta = 0,065$*,* $\gamma = 0,003$ *in* $n = 16$*. Diskontni faktor je enak* $v = 1/(1+i)$ *za obrestno mero* i*. Z aktuarskimi simboli lahko zgornje zapišemo kot*

$$CA^1_{x:\,\overline{n}|} + CA_{x:\,\overline{n}|}{}^{1} + C\alpha + \beta\Pi_a\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + \gamma C\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}$$

oziroma

$$CA_{x:\,\overline{n}|} + C\alpha + \beta\Pi_a\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + \gamma C\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Pričakovana sedanja vrednost prihodnjih vplačil pa bi bila enaka

$$\Pi_a \sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_kp_x$$

oziroma

$$\Pi_a\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Uporabili bi princip ekvivalence in izrazili premijo kot

$$\Pi_a = \frac{C(\alpha + A_{x:\,\overline{n}|} + \gamma a_{x:\,\overline{n}|})}{a_{x:\,\overline{n}|}(1-\beta)}.$$

Ker so v našem primeru vplačila premij mesečna, se vsote spremenijo. Tako postanejo izplačila

$$C\sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k+1}{12}}{}_{\frac{k}{12}}p_x\,{}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{k}{12}} + Cv^n{}_np_x + C\alpha + \beta\Pi_a \sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k}{12}}{}_{\frac{k}{12}}p_x + \gamma C\sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k}{12}}{}_{\frac{k}{12}}p_x.$$

Označimo $\sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k}{12}}{}_{\frac{k}{12}}p_x = \ddot{a}^{(12)}_{x:\,\overline{n}|}$*. Torej dobimo*

$$C\sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k+1}{12}}{}_{\frac{k}{12}}p_x\,{}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{k}{12}} + CA_{x:\,\overline{n}|}{}^{1} + C\alpha + \beta\Pi_a\ddot{a}^{(12)}_{x:\,\overline{n}|} + \gamma C\ddot{a}^{(12)}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Vplačila pa bodo

$$\Pi_a \sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k}{12}}\,{}_{\frac{k}{12}}p_x$$

oziroma

$$\Pi_a \ddot{a}^{(12)}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Izenačimo po principu ekvivalence in dobimo

$$\Pi_a = \frac{C(\alpha + \sum_{k=0}^{n\cdot 12-1} v^{\frac{k+1}{12}}\,{}_{\frac{k}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{k}{12}} + A_{x:\,\overline{n}|}{}^{1} + \gamma \ddot{a}^{(12)}_{x:\,\overline{n}|})}{\ddot{a}^{(12)}_{x:\,\overline{n}|}(1-\beta)}.$$

b. (10) Zapišite neto premijsko rezervo ob koncu k-tega leta za zgornjo zavarovalno polico z aktuarskimi oznakami.

Rešitev:

$$\begin{aligned} {}_kV &= C \sum_{l=0}^{n\cdot 12-k-1} v^{k+\frac{l+1}{12}}\,{}_{\frac{l}{12}}p_{x+k} \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+k+\frac{l}{12}} + CA_{x+k:\,\overline{n-k}|}{}^{1} \\ &= +\beta\Pi_a \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\,\overline{n-k}|} + \gamma C \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\,\overline{n-k}|} - \Pi_a \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\,\overline{n-k}|}. \end{aligned}$$

5. *(Izpit 13.2.2018)* Oseba, stara 68 let, se bo upokojila. Privarčevala je 85.000 €. Zavarovalnica ponuja doživljenjske rente pri obrestni meri $i = 0.02$. Po njihovih izračunih je sedanja pričakovana vrednost doživljenjske rente, ki izplača vsoto 1 v trenutkih $k = 0, 1, \ldots$ dokler je oseba živa, enaka $\ddot{a}_{68} = 17,28$.

   a. (10) Oseba sklene, da bo nakup rente odložila za eno leto, nato pa takoj na začetku naslednjega leta, ko bo stara 69 let, kupila rento v višini 4.000 € letno, če bo še živa. Oseba ve, da je $q_{68} = 0,00913$. Kolikšna je sedanja vrednost denarja, ki ga oseba lahko potroši prvo leto, če želi biti gotova, da bo pri starosti 69 let lahko kupila želeno rento? Privzemite, da banka ponuja obrestno mero 1% na vezane vloge. Utemeljite vaš razmislek.

   Rešitev: Velja

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{68} &= v^0\,{}_0p_{68} + v^1\,{}_1p_{68} + v^2\,{}_2p_{68} + v^3\,{}_3p_{68} + \ldots \\ &= 1 + v^1 p_{68} \cdot {}_0p_{69} + v^2 p_{68} \cdot {}_1p_{69} + v^3 p_{68} \cdot {}_2p_{69} + \ldots \\ &= 1 + v \cdot p_{68} \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_{69} \\ &= 1 + p_{68} \cdot v \cdot \ddot{a}_{69}. \end{aligned}$$

Sledi

$$\ddot{a}_{69} = \frac{\ddot{a}_{68} - 1}{v \cdot p_{68}}.$$

Označimo znesek, ki ga oseba lahko zapravi v enem letu z A, privarčevan znesek s C in rento z R. Velja

$$(C - A) \cdot v_1 = v \cdot R \cdot \ddot{a}_{69},$$

kjer je v_1 diskontni faktor za obrestno mero za vezane vloge $i = 0,01$. Torej

$$C - A = \frac{v \cdot R \cdot \ddot{a}_{69}}{v_1}.$$

Vstavimo vrednosti in dobimo

$$A = 18.622,78.$$

b. (10) Privzemite, da zavarovalnica ponuja doživljenjsko rento, ki svojcem v primeru smrti prejemnika rente v prvih dveh letih zavarovanja izplača 90% sedanje vrednosti preostale rente na koncu leta smrti. Oseba ve, da je $q_{69} = 0,00979$. Kako velika je renta v tem primeru, če bo oseba porabila ves privarčevani denar za nakup rente? Privzemite, da je obrestna mera enaka 2%.

Rešitev: Pričakovana sedanja vrednost izplačil je

$$v \cdot 0,9 \cdot C \cdot q_{68} + v^2 \cdot 0,9 \cdot (C - R) \cdot p_{68} \cdot q_{69} + \sum_{k=0}^{\infty} R v^{k+1}{}_k p_x,$$

kjer prva dva člena predstavljata izplačilo v primeru smrti v prvih dveh letih. Vplačilo je enako C.

Po principu ekvivalence izenačimo in izrazimo rento R

$$R = \frac{C - 0,9Cv \cdot q_{68} - 0,9Cv^2 p_{68} \cdot q_{69}}{v\ddot{a}_{68} - v^2 0,9 \cdot p_{68} \cdot q_{69}}.$$

Dobimo

$$R = 4.939,31.$$