Vaje 3 - Rešitve

1. *(Izpit 4.7.2018)* S $_tp_x$ označimo verjetnost, da oseba stara x let preživi vsaj še t let.

   a. (5) Produkt
   $$p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$$
   zapišite z enim samim aktuarskim simbolom. Utemeljite vaš razmislek.

   Rešitev: Oznaka p_x označuje verjetnost, da oseba stara x let preživi vsaj še eno leto, oznaka p_{x+1} označuje verjetnost, da oseba stara $x+1$ leto preživi še vsaj eno leto itd. Torej bo produkt vseh faktorjev predstavljal verjetnost, da bo oseba stara x let preživela še vsaj n let, kar se z aktuarskim simbolom zapiše kot
   $$_np_x.$$
   Zgornje lahko tudi izpeljemo
   $$\begin{aligned} & p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1} = \\ = \; & \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu(u)du\right) \cdot \exp\left(-\int_{x+1}^{x+2} \mu(u)du\right) \cdots \exp\left(-\int_{x+n-1}^{x+n} \mu(u)du\right) \\ = \; & \exp\left(-\int_x^{x+s} \mu(u)du - \int_{x+s}^{x+s+t} \mu(u)du - \ldots - \int_{x+n-1}^{x+n} \mu(u)du\right) \\ = \; & \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu(u)du\right) \\ = \; & _np_x. \end{aligned}$$

   b. (5) Produkt
   $$_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}$$
   zapišite z enim samim aktuarskim simbolom. Utemeljite vaš razmislek.

   Rešitev: Oznaka $_sp_x$ označuje verjetnost, da bo oseba stara x let preživela še vsaj s let, oznaka $_tp_{x+s}$ pa označuje verjetnost, da bo oseba stara $x+s$ let preživela še vsaj t let. Torej s produktom obeh verjetnosti dobimo verjetnost, da bo oseba stara x let preživela še vsaj $s+t$ let, kar lahko z aktuarskim simbolom zapišemo kot
   $$_{s+t}p_x.$$

Zgornje lahko tudi izpeljemo

$$\begin{aligned}
{}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} &= \exp\left(-\int_x^{x+s} \mu(u)du\right) \cdot \exp\left(-\int_{x+s}^{x+s+t} \mu(u)du\right) \\
&= \exp\left(-\int_x^{x+s} \mu(u)du - \int_{x+s}^{x+s+t} \mu(u)du\right) \\
&= \exp\left(-\int_x^{x+s+t} \mu(u)du\right) \\
&= {}_{s+t}p_x.
\end{aligned}$$

c. (10) Vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$$

zapišite z enim samim aktuarskim simbolom. Utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Z uporabo točke a. lahko vsoto zapišemo kot

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_np_x.$$

Iz aktuarstva poznamo oznako K_x kot zaokroženo življenjsko dobo osebe stare x let. Velja

$$P(K_x \geq k) = {}_kp_x.$$

Torej lahko vsoto zapišemo kot

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_np_x = \sum_{n=1}^{\infty} P(K_x \geq n).$$

Iz verjetnosti vemo, da je desna stran enačaja za celoštevilske nenegativne slučajne spremenljivke (kar K_x je) enaka pričakovani vrednosti slučajne spremenljivke. Torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(K_x \geq n) = E(K_x).$$

To pričakovano vrednost pa z aktuarskim simbolom označimo z e_x.

2. *(Izpit 11.2.2016)* Po definiciji je

$$e_x = E(K_x)\,.$$

a. (10) Izrazite p_x z e_x in e_{x+1}.

Rešitev: Poskusimo e_x zapisati s pomočjo p_x. Uporabimo formulo za polno pričakovano vrednost:

$$e_x = E(K_x) = E(K_x|T_x \geq 1)P(T_x \geq 1) + E(K_x|T_x < 1)P(T_x < 1),$$

kar je enako

$$e_x = E(K_x) = p_x E(K_x|T_x \geq 1) + q_x E(K_x|T_x < 1).$$

Vrednost $E(K_x|T_x < 1)$ je enaka 0, saj je oseba stara x let umrla v naslednjem letu, torej ni dopolnila nobenega nadaljnega leta. Pogojna pričakovana vrednost $E(K_x|T_x \geq 1)$ pa je enaka $1 + e_{x+1}$, saj je oseba stara x let že doživela eno leto, od tam pa gledamo pričakovano zaokroženo življenjsko dobo osebe stare $x+1$ let. Velja torej

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1})$$

oziroma

$$p_x = \frac{e_x}{e_{x+1} + 1}.$$

b. (10) Izrazite ${}_tp_x$ z $e_x, e_{x+1}, \ldots, e_{x+t}$.

Rešitev: Velja

$${}_tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}.$$

Uporabimo rezultat iz točke a. in dobimo

$${}_tp_x = \frac{e_x}{e_{x+1} + 1} \cdot \frac{e_{x+1}}{e_{x+2} + 1} \cdots \frac{e_{x+t-1}}{e_{x+t} + 1}.$$

3. *(Izpit 27.1.2016)* Naj bo

$${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3 .$$

a. (5) Izračunajte μ_t za $t \geq 0$.

Rešitev: Velja

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_x).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= -\frac{d}{dt}\ln\left(\left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3\right) \\
&= -\left(\frac{(1+x+t)^3}{(1+x)^3}\cdot 3\frac{(1+x)^2}{(1+x+t)^2}\cdot\frac{0-(1+x)}{(1+x+t)^2}\right) \\
&= \frac{3}{1+x+t}.
\end{aligned}$$

Vstavimo $x = 0$ *in dobimo* $\mu_t = \frac{3}{1+t}$.

b. (5) Izračunajte $E(T_x)$.

Rešitev: Velja

$$E(T_x) = \int_0^\infty {}_tp_x \, dt.$$

Računamo z vpeljavo nove spremenljvike $u = 1 + x + t$*:*

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x = E(T_x) &= \int_0^\infty \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3 dt \\
&= (1+x)^3\int_{1+x}^\infty u^{-3}du \\
&= (1+x)^3\frac{1}{-2u^2}\Big|_{u=1+x}^{u=\infty} \\
&= 0+(1+x)^3\frac{1}{2(1+x)^2} \\
&= \frac{1+x}{2}.
\end{aligned}$$

c. (5) Izpeljite formulo za $E(K_x)$.

Rešitev: Izračunati želimo

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=1}^\infty kP(K_x = k).$$

Ker je K_x *celoštevilska nenegativna slučajna spremenljivka, lahko pričakovano vrednost izračunamo kot*

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=1}^\infty P(K_x \geq k).$$

Verjetnost $P(K_x \geq k)$ *predstavlja verjetnost, da oseba stara* x *let preživi še vsaj* k *let, kar z aktuarskim simbolom označimo s* ${}_kp_x$*. Torej*

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_x.$$

V našem primeru

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1+x+k} \right)^3 .$$

d. (5) Izračunajte $P(a \leq T_x \leq b)$.

Rešitev: Iskana verjetnost predstavlja verjetnost, da oseba stara x let preživi še a let, nato pa v nadaljnih b letih umre. To lahko zapišemo kot

$$P(a \leq T_x \leq b) = {}_ap_x \cdot {}_bq_{x+a}.$$

Velja

$${}_bq_{x+a} = 1 - {}_bp_{x+a},$$

torej lahko izračunamo

$$P(a \leq T_x \leq b) = \left(\frac{1+x}{1+x+a} \right)^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{1+x+a}{1+x+a+b} \right)^3 \right).$$

4. *(Izpit 26.6.2019)* Privzemite, da za življenjsko dobo velja Makehamov zakon z jakostjo smrtnosti

$$\mu_s = A + Bc^s$$

za $s \geq 0$. Privzemite, da so dane verjetnosti ${}_{10}p_{50}$, ${}_{10}p_{60}$ in ${}_{10}p_{70}$.

a. (10) Izračunajte

$$\left(\frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})} \right)^{1/10} .$$

Rešitev: Po definiciji je

$${}_tp_x = \exp\left(- \int_x^{x+t} \mu_s \, \mathrm{d}s \right) .$$

Sledi, da je

$$\log\left({}_tp_x\right) = -At - \frac{B(c^{x+t} - c^x)}{\log c} .,$$

Vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo

$$\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60}) = -\frac{Bc^{60}}{\log c}(c^{20} - 2c^{10} + 1) .$$

Podobno dobimo

$$\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50}) = -\frac{Bc^{50}}{\log c}(c^{20} - 2c^{10} + 1)\,.$$

Vstavimo v izraz in sledi

$$\left(\frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})}\right)^{1/10} = c\,.$$

b. (10) Izrazite A in B z danimi verjetnostmi.

Rešitev: Zapišemo recimo

$$\log({}_{10}p_{70}) = -10A - \frac{B}{\log c}(c^{80} - c^{70}) \quad in \quad \log({}_{10}p_{60}) = -10A - \frac{B}{\log c}(c^{70} - c^{60})\,.$$

To je sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Dobimo

$$\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60}) = \frac{Bc^{60}}{\log c}(-c^{20} + 2c^{10} - 1)\,.$$

Sledi

$$B = \frac{\log c}{c^{60}(-c^{20} + 2c^{10} - 1)} \cdot (\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60}))\,.$$

Iz tega izračunamo še A.