Vaje 2 - Rešitve

1. *(Izpit 29.1.2018)* Oseba pri banki najame kredit v višini 100.000€ z letno obrestno mero $3,2\%$ za dobo 240 mesecev. Recimo, da oseba po 120 odplačanih obrokih ugotovi, da lahko najame nov kredit po obrestni meri $3,1\%$ in odplača preostalo glavnico prvega kredita, nato pa 120 mesecev odplačuje nov kredit. Pri tem stroški predčasnega odplačila prvega kredita in stroški sklenitve novega kredita znašajo ob sklenitvi novega kredita 250€. Privzemite, da se preskok z enega na drug kredit zgodi točno na koncu 120 meseca. Takemu preskoku rečemo "refinanciranje".

   a. (10) Bi osebi priporočali tak preskok? Utemeljite odgovor.

   Rešitev: Mesečni obrok kredita, ki ga pri obrestni meri $3,2\%$ *določi banka, je* $x = 562,32$ *euro. Po 120 mesecih je ostanek dolga enak* $57.810,20$€*. Če oseba najame nov kredit v tej višini pri obrestni meri* 3.1%*, bo obrok enak* $y = 559,74$€*. Sedanja vrednost razlik med obrokoma je* $268,72$€*, kar je več kot strošek. Sedanjo vrednost razlik računamo pri novi obrestni meri. Za preskok se odločimo.*

   b. (10) Privzemite, da bo oseba izvedla refinanciranje. Navedite po približno kolikšni efektivni obrestni meri se zadolži. Odgovor poiščite numerično, tako da najprej ugibajte in potem postopoma popravljate ugibanje. Navedite vaš razmislek.

   Rešitev: Efektivna obrestna mera je tista, pri kateri je sedanja vrednost vseh odplačil osebe, vključno s stroški, enaka višini kredita. Oseba bo plačala najprej 120 *obrokov v višini* x*, potem pa še* 120 *obrokov v višini* y *in strošek v višini* 250€*. Označimo iskani diskontni faktor z* w *in višino kredita s* C*. Veljati mora*

$$C = \sum_{k=1}^{120} x w^{k/12} + 250 \cdot w^{10} + \sum_{k=121}^{240} y w^{k/12}$$

   ali drugače

$$C = \frac{w^{1/12} x (1 - w^{10})}{1 - w^{1/12}} + 250 \cdot w^{10} + \frac{w^{121/12} y (1 - w^{10})}{1 - w^{1/12}} .$$

   Ugibamo, da bo efektivna obrestna mera med $3,2\%$ *in* $3,1\%$*, vendar zaradi stroška morda nekoliko bliže* $3,2\%$*. Numerično ugotovimo, da je efektivna obrestna mera* $3,198535\%$*.*

2. *(Izpit 8.9.2016)* Zavarovalnica bo zavarovani osebi ali njenim dedičem izplačevala mesečno rento v višini 1.000 EUR naslednjih 20 let.

   a. (5) Privzemite, da v namen izplačevanja rente zavarovalnica želi na banki deponirati vsoto x pri efektivni letni obrestni meri 4%. Kolikšen mora biti najmanj x, da bo zavarovalnica zmožna odplačati rento? Privzemite, da so vsi meseci enako dolgi.

   Rešitev: To je vprašanje izračuna sedanje vrednosti vseh rent. Označimo višino rente s $C = 1.000$. *Velja*

$$PV = \sum_{k=1}^{240} Cv^{\frac{k}{12}}.$$

   Poračunamo in dobimo

$$PV = Cv^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1 - v^{20}}{1 - v^{\frac{1}{12}}}.$$

   Vstavimo številke in dobimo približno $PV = 163.749,7$ €.

   b. (5) Privzemite, da banka ponuja efektivno letno obrestno mero 4% za prvih 10 let in efektivno obrestno mero 3,5% za drugih 10 let. Kolikšen začetni kapital je potreben, da bo banka zmožna izplačati rento?

   Rešitev: Označimo diskontni faktor za prvih deset let z $v_1 = 1/(1 + 0,04)$ *in diskontni faktor za drugih deset let z* $v_2 = 1/(1 + 0,035)$. *Potem velja*

$$PV = \sum_{k=1}^{120} Cv_1^{\frac{k}{12}} + v_1^{10} \sum_{k=1}^{120} Cv_2^{\frac{k}{12}}.$$

   Poenostavimo

$$PV = Cv_1^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1 - v_1^{10}}{1 - v_1^{\frac{1}{12}}} + v_1^{10} Cv_2^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1 - v_2^{10}}{1 - v_2^{\frac{1}{12}}}.$$

   Dobimo $PV = 165.764,5$ €.

   c. (10) Privzemite, da se bo po 10 letih zavarovalnici ponudila možnost, da kupi obveznico, ki izplačuje kupone po efektivni letni obrestni meri 4,5% na koncu vsakega meseca po 10 letu, na koncu obdobja pa povrne glavnico. Privzemamo, da bo bančna efektivna obrestna mera vse obdobje ostala 4%. Privzemite, da je obveznice možno kupiti v poljubnih količinah (tudi necelih). Kolikšen kapital potrebuje zavarovalnica na začetku, če bo po 10 letih "preskočila" na obveznice? Se jim to splača?

Rešitev: Brez cene obveznice na vprašanje ne moremo odgovoriti. Privzemimo, da obveznico kupujemo po ceni, ki je enaka glavnici G. Želeli bi, da je kupon enak znesku rente C, torej mora veljati

$$G \cdot 1,045^{\frac{1}{12}} - G = C,$$

torej

$$G = \frac{C}{1,045^{\frac{1}{12}} - 1},$$

kar je enako $G = 272.123$ €. Sedanjo vrednost gledamo iz trenutka $t = 0$, torej zavarovalnica na začetku potrebuje kapital v vrednosti

$$PV = \sum_{k=1}^{120} C v_1^{\frac{k}{12}} + G \cdot v_1^{10},$$

kar je enako $PV = 279274,3$ €. Zavarovalnici se nakup obveznice v primeru, ko ima na začetku dovolj kapitala, vsekakor izplača, saj bo po 20 letih dobila izplačilo glavnice.

3. *(Izpit 11.2.2016)* V spodnji tabeli je amortizacijski načrt za obveznico CITI75 izdajatelja CitiGroup. Če obveznico kupite danes, boste v prihodnosti dobivali plačila kuponov po navedenem amortizacijskem načrtu, na koncu pa boste dobili še glavnico. Obveznica je denominirana v EUR in se prodaja v apoenih po 1.000,00 EUR. Privzemite, da je leto dolgo 1 enoto, deleži leta pa se računajo s privzetkom, da ima leto 365 dni.

Datum	Št. kupona	Kupon	Izplač. glavnice	Preostala glavnica
02.08.2005	1	50	0	1000
02.08.2006	2	50	0	1000
02.08.2007	3	50	0	1000
02.08.2008	4	50	0	1000
02.08.2009	5	50	0	1000
02.08.2010	6	50	0	1000
02.08.2011	7	50	0	1000
02.08.2012	8	50	0	1000
02.08.2013	9	50	0	1000
02.08.2014	10	50	0	1000
02.08.2015	11	50	0	1000
02.08.2016	12	50	0	1000
02.08.2017	13	50	0	1000
02.08.2018	14	50	0	1000
02.08.2019	15	50	1000	0

a. (5) Cena apoena obveznice na dan 15. 9. 2004 je 985 EUR. Bi se odločili za nakup te obveznice, če predpostavite, da bo letna efektivna obrestna mera v obdobju konstantno enaka 4%.

Rešitev: V prihodnosti bomo dobili še 15 kuponov in glavnico. Do izplačila prvega kupona je 322 dni, kar v letih pomeni $t = 322/365$. *Označimo* $i = 0,04$ *in* $v = 1/(1+i)$. *Sedanja vrednost denarnega toka na dan 15.9.2004 je*

$$PV = 50 \cdot (v^t + v^{t+1} + \ldots + v^{t+14}) + 1000 \cdot v^{t+14},$$

kar poenostavimo v

$$PV = 50v^t \cdot \frac{1 - v^{15}}{1 - v} + 1000 \cdot v^{t+14}.$$

Vstavimo številke in dobimo

$$PV = 1.081,8.$$

Sedanjo vrednost denarnega toka 1.081,8 € primerjamo s ceno apoena in ugotovimo, da je nakup obveznice zelo ugoden.

b. (5) Bi kupili obveznico, če bi vsa izplačila kuponov reinvestirali ob 4% obrestni meri do dneva zapadlosti glavnice? Ali bi omenjene transakcije imele vpliv na sedanjo vrednost denarnega toka? Utemeljite vaš razmislek.

Rešitev: Transakcija nima vpliva na našo odločitev, niti na sedanjo vrednost denarnega toka. Sedanja vrednost investiranih kuponov je pri privzetkih iz besedila enaka.

c. (10) Privzemite spet, da boste vse kupone reinvestirali pri efektivni obrestni meri j. Kolikšen bi moral biti j, da bi bila sedanja vrednost prihodnjega denarnega toka točno enaka ceni obveznice na dan 15. 9. 2004? Zapišite samo enačbo, ni pa je potrebno rešiti. Odgovorite le na vprašanje, ali bi moral j biti večji ali manjši od obrestne mere 4%.

Rešitev: Enačbo iz primer a.

$$PV = 50 \cdot (v^t + v^{t+1} + \ldots + v^{t+14}) + 1000 \cdot v^{t+14},$$

kjer je $v = 1/(1+j)$, *izenačimo z ceno apoena, ki je enaka 985€. Neznanka je sedaj obrestna mera* j. *Glede na to, da je sedanja vrednost denarnih tokov iz primera a. večja od cene apoena, bi morala biti obrestna mera* j *manjša od 4%.*

4. *(Izpit 3.9.2019)* Pri nemški zakladni menici tipa B je obrestna mera v naslednjih sedmih letih variabilna in podana v spodnji tabeli.

Leto	i_k
1	0.0350
2	0.0400
3	0.0450
4	0.0475
5	0.0475
6	0.0500
7	0.0525

a. (10) S kolikšno efektivno obrestno mero bi dosegli enak donos v sedmih letih?

Rešitev: Označimo iskano obrestno mero z i. Veljati mora

$$\prod_{k=1}^{7}(1+i_k) = (1+i)^7.$$

Vstavimo številke in dobimo približno $i = 0.0453$.

b. (10) Bi se odločili za nakup zakladne menice, če vam banka ponuja za vezano vlogo efektivno obrestno mero $i = 0.0453$?

Rešitev: Donosnost zakladne menice in vezane vloge je enaka. Prednost zakladne menice je, da jo lahko kadarkoli unovčimo oziroma prodamo, medtem ko do vezane vloge do dogovorjenega termina nimamo dostopa.

5. *(Izpit 27.1.2016)* Obveznica z glavnico G ima naslednji amortizacijski načrt: vsako leto z začetkom po preteku prvega leta po nakupu dobimo kupon v višini K do zadnjega leta pred dospetjem. Ko obveznica dospe, nam izdajatelj obveznice izplača še glavnico G. Trajanje obveznice je n let. Efektivna obrestna mera naj bo i.

Privzemite, da lahko izdajatelj tudi neha izplačevati kupone v trenutku T ali izplača samo delež D glavnice. Možni deleži so $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$. Predpostavite, da v primeru, ko izdajatelj neha plačevati kupone v trenutku $T = k$, ne plača kuponov v trenutkih $k+1, \ldots, n-1$. Privzemite, da poznamo verjetnosti

$$P(T = k, D = d_l)$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in $l = 1, 2, \ldots, m$.

a. (10) Zapišite formulo za pričakovano sedanjo vrednost opisane obveznice v trenutku nakupa.

Rešitev: Pričakovana sedanja vrednost je sedanja vrednost pomnožena z verjetnostjo. V našem primeru imamo dve slučajni *spremenljivki, in sicer čas prenehanja izplačevanja kuponov T in višino izplačila deleža glavnice D. Torej lahko pričakovano sedanjo vrednost v trenutku $t = 0$ zapišemo kot*

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n-1} (K \sum_{j=1}^{k} v^j + d_l \cdot G \cdot v^{k+1}) P(T = k, D = d_l).$$

b. (10) Privzemite, da veste, da izdajatelj preneha s plačevanjem kuponov v trenutku k. Kolikšna je po vašem mnenju v trenutku k pričakovana sedanja vrednost preostalih izplačil?

Rešitev: Če so se v trenutku $T = k$ prenehali izplačevati kuponi, lahko v prihodnosti pričakujemo le še izplačilo glavnice, vendar ne vemo v kakšnem deležu bo izplačana. Glavnica oziroma njen delež se bo diskontiral še eno leto. Torej bo pričakovana sedanja vrednost preostalih izplačil enaka

$$\sum_{l=1}^{m} d_l \cdot G \cdot v \cdot P(D = d_l).$$