Vaje 1 - rešitve

1. Banka vam ponuja dve različni vezani vlogi. Prva ima fiksno obrestno mero 3% za vezavo v trajanju 10 let. Pri drugi začnemo z obrestno mero 2,5%, ki se potem vsako leto poveča za 0,1%. Druga vezana vloga traja 10 let, iz besedila pa izhaja, da je obrestna mera zadnje leto pred iztekom 3,4%.

   Katera vezana vloga je boljša?

   Rešitev: Naj bo znesek, ki ga bomo vezali, označen s C. Pri fiksni obrestni meri bomo imeli po 10 letih

   $$C \cdot 1,03^{10} = 1,3439 \cdot C.$$

   Pri naraščajoči obrestni meri pa bomo imeli

   $$C \cdot 1,025 \cdot 1,026 \cdots 1,034 = 1,3374 \cdot C.$$

   Nekoliko boljša je prva varianta.

2. *(Izpit 27.1.2016)* Oseba vzame stanovanjski kredit v višini 200.000 €. Po pogodbi na koncu vsakega leta zapade plačilo v fiksnem znesku 18.000 €, le zadnji obrok bo manjši. Efektivna obrestna mera naj bo 5%.

   a. (5) Koliko obrokov po 18.000 € bo oseba morala plačati?

   Rešitev: Označimo iskano število obrokov z n. Sedanja vrednost n obrokov mora biti manjša ali enaka višini kredita, sedanja vrednost $n+1$ obrokov pa večja. Naj bo v diskontni faktor, A obrok in C višina dolga. Veljati mora

   $$A(v + v^2 + \cdots + v^n) \leq C < A(v + v^2 + \cdots + v^n + v^{n+1})\,.$$

   Ugotovimo, da je 16 *obrokov v sedanji vrednosti* $195.079,8$ € *in* 17 *obrokov* $202.933,2$ €*. Oseba bo plačala* 16 *obrokov po* 18.000 €*.*

   b. (5) Kolikšen bo zadnji obrok?

   Rešitev: Sedanja vrednost zadnjega obroka je enaka $4.920,2$*. Obrok bo oseba plačala na koncu* 17*. leta. Dejanski obrok bo sedanja vrednost pomnožena z* $(1+i)^{17}$*, torej* $11,277,1$ €*.*

   c. (10) Kolikšen del zadnjega obroka bodo obresti in kolikšen del bo odplačilo glavnice?

   Rešitev: Sedanja vrednost preostale glavnice po plačilu 16*. obroka bo* $4.920,15$*. Dejanska preostala glavnica bo sedanja vrednost pomnožena z* $(1+i)^{16}$*, kar je* $10.740,07$ €*. To bo tudi glavnica, ki jo bomo izplačali z zadnjim obrokom. Del obresti v zadnjem obroku bo* $i \cdot 10.740,07 = 537,00$ €*.*

3. *(Izpit 11.2.2016)* Posameznik pri banki vzame kredit v višini $D =$ 100.000€. Kredit bo odplačal v enakih obrokih, plačljivih na koncu vsakega meseca v trajanju 25 let. Privzemite, da je efektivna obrestna mera $i = 5\%$. Za računanje privzemite, da so vsi meseci enako dolgi.

   a. (5) Izračunajte višino mesečnega obroka.

   Rešitev: Sedanja vrednost dolga je D. To enačimo s sedanjo vrednostjo vplačil.

$$\begin{aligned} D &= x(v^{\frac{1}{12}} + v^{\frac{2}{12}} + \ldots + v^{\frac{300}{12}}) \\ &= x\textstyle\sum_{k=1}^{300}(v^{\frac{1}{12}})^k \\ &= xv^{\frac{1}{12}}\textstyle\sum_{k=0}^{299}(v^{\frac{1}{12}})^k \\ &= xv^{\frac{1}{12}}\frac{1-v^{\frac{300}{12}}}{1-v^{\frac{1}{12}}} \end{aligned}$$

   Sledi

$$x = \frac{D\left(1 - v^{\frac{1}{12}}\right)}{v^{\frac{1}{12}}\left(1 - v^{25}\right)}$$

   b. (5) Kako velik bo dolg takoj po plačilu obroka na koncu 12. leta odplačevanja kredita?

   Rešitev: Z D_k označimo preostanek dolga po k-tem plačilu. Če z r_k označimo višino k-tega vplačila in z n število let odplačevanja in je odplačevanje letno, lahko na preostanek dolga pogledamo iz dveh perspektiv. Prva je **retrospektivna formula preostanka dolga***:*

$$D_k = (1+i)^k D - \sum_{h=1}^{k}(1+i)^{k-h} r_h,$$

   druga pa **prospektivna formula preostanka dolga***:*

$$D_k = vr_{k+1} + v^2 r_{k+2} + \ldots + v^{n-k} r_n.$$

   Uporabimo prospektivno formulo in upoštevajmo, da je $r_k = x$ za vse $k = 1, 2, \ldots, 300$ ter, da odplačujemo mesečne obroke. Sledi

$$D_{144} = x(v^{\frac{1}{12}} + v^{\frac{2}{12}} + \ldots + v^{\frac{300-144}{12}}).$$

   Poračunamo in dobimo

$$D_{144} = xv^{\frac{1}{12}}\frac{1 - v^{13}}{1 - v^{\frac{1}{12}}}.$$

   Vstavimo zgornji x in dobimo

$$D_{144} = D\frac{1 - v^{13}}{1 - v^{25}}.$$

c. (10) Kolikšen del 145. obroka so obresti?

Rešitev: Dolg po 144. plačanem obroku se do 145. obroka obrstuje kot $D_{144}(1+r)^{\frac{1}{12}}$*. Delež obresti lahko izrazimo kot*

$$\frac{D_{144}(1+r)^{\frac{1}{12}} - D_{144}}{x}.$$

4. *(Izpit 26.6.2019)* Oseba vzame kredit v višini 100.000 €. Dogovor z banko je tak, da bo odplačevanje trajalo 20 let s plačili na koncu vsakega meseca. Prvih 10 let bo oseba odplačevala le obresti, drugih deset let pa fiksni znesek x, tako da bo na koncu odplačala dolg. Efektivna obrestna mera je 4%.

a. (5) Izračunajte fiksni obrok x.

Rešitev: V trenutku $t = 0$ *je sedanja vrednost dolga enaka* $D =$ 100000 €*. Sedanja vrednost vplačil pa je enaka*

$$D \cdot \sum_{k=1}^{120} v^{\frac{k}{12}} + \sum_{k=1}^{120} x \cdot v^{10+\frac{k}{12}},$$

kjer prvi del predstavlja plačilo obresti prvih deset let odplačevanja in drugi del predstavlja odplačilo dolga v zadnjih desetih letih odplačevanja. Kakor običajno velja

$$v = \frac{1}{1+r},$$

kjer r *predstavlja višino obresti. Velja torej*

$$D = D \cdot \sum_{k=1}^{120} v^{\frac{k}{12}} + x \cdot v^{10} \sum_{k=1}^{120} 120 \cdot v^{\frac{k}{12}}.$$

Sledi

$$x = \frac{D(1 - v^{\frac{1}{12}})}{v^{10} v^{\frac{1}{12}} \left(1 - v^{\frac{120}{12}}\right)} - \frac{D}{v^{10}}.$$

b. (5) Kako velik bo dolg ob koncu 10. leta odplačevanja dolga?

Rešitev: Dolg je enak $D = 100000$ *€, saj se do konca 10. leta glavnica še ni začela odplačevati.*

c. (5) Kolikšen delež prvega obroka velikosti x lahko razumno pripišemo obrestim?

Rešitev: Dolg se od konca 10. leta do prvega obroka x *obrestuje* $D(1+r)^{\frac{1}{12}}$. *Delež obresti obroka* x *predstavlja*

$$\frac{D(1+r)^{\frac{1}{12}} - D}{x}.$$

d. (5) Kolikšen delež zadnjega obroka velikosti x lahko razumno pripišemo obrestim?

Rešitev: Tudi zadnji obrok je enak x. *Dolg ob plačanem predzadnjem obroku označimo z* G. *Ta dolg se od predzadnjega obroka do zadnjega obroka obrestuje kot* $G(1+r)^{\frac{1}{12}}$. *Delež obresti zadnjega obroka lahko izrazimo kot*

$$\frac{G(1+r)^{\frac{1}{12}} - G}{x}.$$

Če obrok x *izrazimo kot* $x = Gv^{\frac{1}{12}}$, *se delež obresti zadnjega obroka izrazi kot*

$$1 - v^{\frac{1}{12}} = 0,003.$$