Fakulteta te matematichne uchenosti

Osnove zavarovanja

Ta napisana Koronska predavanja

Na svitlobo dal tiga lejta Gospudovega 2020,
v katherem smu pod veliko preishkushno bli
Michaelus Permanus

OSNOVE ZAVAROVANJA

1. Obrestne mere

Tipično v finančnem svetu posojilodajalec zaradi tveganja in dejstva, da bo posojeni denar dobil vrnjen z zamikom, zahteva „nagrado" v obliki obrestne mere. Višina obrestne mere je odvisna od tržnih razmer in od obnašanja centralnih bank.

Pri navedbi obrestne mere navedemo tudi časovno enoto, ki je najpogosteje leto. Če si za časovno obdobje izposodimo x enot denarja, moramo na koncu obdobja vrniti $(1+i)x$ denarja, kjer je praviloma $i \geq 0$. Količino i imenujemo obrestna mera.

Če po koncu časovnega obdobja denar dvignemo in takoj spet damo na račun, na katerem teče obrestna mera i, bomo po dveh letih imeli na računu $(1+i)^2 x$ denarja.

Primer: Recimo, da v trenutku $t=0$ investiramo F_0 enot denarja, ki se obrestuje s konstantno obrestno mero i. V trenutkih $t=1,2,\dots,n$ vplačamo dodatnih r_t enot. Naj bo F_t količina denarja na računu v trenutku t. Velja

$$F_t = (1+i)F_{t-1} + r_t$$

Prepišemo v

$$F_t - (1+i)F_{t-1} = r_t$$

Za $t = 1, 2, \ldots n$ to pomeni

$$F_1 - (1+i) F_0 = 0 \quad / \cdot (1+i)^{n-1}$$

$$F_2 - (1+i) F_1 = r_1 \quad / \cdot (1+i)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$F_n - (1+i) F_{n-1} = r_n \quad \cdot (1+i)^0$$

Pomnožimo enačbe, kot je nakazano in seštejmo. Dobimo

$$F_n - (1+i)^n F_0 = \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{n-t} \cdot r_t .$$

Kaj pa, če želimo investirati za krajše ali daljše obdobje kot ena časovna enota? Recimo, da je obrestna mera i. Kaj bi bilo pravo izplačilo po polovici obdobja?

Če bi, recimo, denar dvignili po pol leta in ga takoj spet investirali, kjer ta polovico obdobja velja obrestna mera i' in velja bi moralo

$$x(1+i')^2 = x(1+i) \quad \text{ali}$$

$$1+i' = (1+i)^{1/2}.$$

Če denar dvignemo vsakih $1/m$ enot časa in ga takoj spet investiramo, bi za obrestno mero i_m moralo veljati

$$(1+i_m)^m = 1+i \quad \text{ali}$$

$$1+i_m = (1+i)^{1/m}$$

Če čakamo k obdobij dolgih $1/m$ tako mora veljati

$$1 + i_{m,k} = (1+i)^{k/m}.$$ Za

ulomke $t = k/m$ mora torej veljati, da se količina denarja x po t časovnih enotah obrestuje na $x(1+i)^t$.

<u>Opomba</u>: Temu razmisleku se je nekoč reklo obrestno-obrestni račun, v matematiki pa se to sčasoma pretvori v eksponentno funkcijo.

<u>Sklep</u>: Če je obrestna mera konstantna in enaka i, se po t enotah časa količina denarja x obrestuje v

$$\boxed{x(1+i)^t}$$

Razmislek lahko tudi obrnemo. Recimo, da moramo nekomu vrniti x enot denarja v času t v prihodnosti. Obrestna mera je konstantna in enaka i. Koliko denarja moramo dati na stran? Če na bančni račun položimo y enot denarja, se bo ta obrestoval na

$$y(1+i)^t.$$

Če želimo, da bo to enako dolgu x mora biti

$$x = y(1+i)^t \quad \text{ali}$$

$$y = x(1+i)^{-t}.$$

V trenutku $t=0$ mora biti prejemniku dolg x v trenutku t v prihodnosti vreden $x(1+i)^{-t}$.

<u>Definicija</u>: količini $v = \frac{1}{1+i}$ rečemo diskontni faktor.

<u>Definicija</u>: količini $x(1+i)^{-t}$ rečemo <u>sedanja vrednost</u> denarnega toka x v trenutku t v prihodnosti.

Pojem sedanje vrednosti prihodnjega denarnega toka lahko posplošimo v različne smeri: Recimo, da bomo v prihodnosti v trenutkih $t_1, t_2, \ldots, t_n$

dobili plačila $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obrestna mera pa je konstantno i. Koliko so nam ta plačila vredna danes? Vsako plačilo prevedemo na njegovo sedanjo vrednost in sedanje vrednosti seštejemo. Dobimo

$$\boxed{PV = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-t_k} \cdot x_k}$$

Pojem sedanje vrednosti je pomemben v financah. Oglejmo si primer uporabe.

<u>Primer</u>: Predpostavimo, da je obrestna mera konstantno 2% letno, kar pomeni $i = 0.02$. Na banki si sposodimo $C = 100.000$ evrov, ki jih bomo

odplačevali mesečno naslednjih 10 let. Kako banka določi mesečni obrok? Postavi se na stališče, da je prihodnji denarni tok iz naslova obrokov v smislu sedanje vrednosti enak izhodiščni vrednosti kredita. Recimo, da je višina obroka x in zanemarimo to, da niso vsi meseci enako dolgi in so prestopna leta. Sedanja vrednost plačil je

$$PV = \sum_{k=1}^{120} x \cdot v^{k/12}$$

$$= x \cdot v^{1/12} \cdot \sum_{k=0}^{119} v^{k/12}$$

$$= x \cdot v^{1/12} \cdot \frac{1 - v^{10}}{1 - v^{1/12}}$$

Ta sedanja vrednost mora biti enaka višini kredita, torej

$$C = x \cdot v^{1/12} \cdot \frac{1 - v^{10}}{1 - v^{1/12}}.$$

Enačbo rešimo in sledi

$x = 919.32$.

Koliko nam bo ostalo dolga po petih letih odplačevanja?

Izračunajmo sedanjo vrednost obrokov, ki jih bomo plačali do vključno 60. meseca.

$$PV = x \cdot \sum_{k=1}^{60} v^{k/12} = x \cdot \frac{v^{1/12}(1 - v^5)}{1 - v^{1/12}}$$

Izračunamo

$$PV = 52.473,30$$

Toliko začetnega dolga smo odplačali v smislu začetne sedanje vrednosti, kaj pa bo na izpisku stanja kredita po 60 mesecih. Banka bo to pretvorila v dejansko vrednost.

Ostanek kredita je $C' = 47.526,70$.

Na koncu 60. meseca bo na izpisku

$$C' \cdot (1+i)^5 = 52.473,30$$

evvov. Seštevek vseh plačil do 60. meseca je 55.159,44.

To je učinek obrestne mere.

Tipičen dogovor med banko in posojilojemalcem je, da vsak mesec posojilojemalec plača obresti, ki so se nabrale na preostali dolg, ostanek obroka pa zmanjša glavnico kredita.

Kolik del 61. obroka kredita bo v resnici obresti?

Preostali dolg je C'. V enem mesecu se bo nabralo

$$C' \cdot (1+i)^{1/12} - C' = 86.66.$$

Banki torej plačamo 86.66 evrov obresti, ostanek obroka x pa zmanjša glavnico.

Obrestna mera se lahko s časom spreminja. Recimo, da je $0 < s < t$ in količina denarja x v času do s naraste na $x \cdot P(0,s)$, med časom s in t pa na $x P(0,s) \cdot P(s,t)$. Če denar „za trenutek“ dvignemo v času s in takoj spet položimo na račun, to ne bi smelo imeti nobenega učinka. Veljati bi torej moralo

$$P(0,s) P(s,t) = P(0,t).$$

Primer, ko to velja, je

$$P(s,t) = e^{\int_s^t \delta(u)\, du},$$

kjer je $\delta(u)$ (nenegativna) funkcija. Rečemo ji jakost obrestne mere. Če je jakost obrestne mere konstantna in enaka $\delta = \log(1+i)$ dobimo

$$P(0,t) = e^{\int_0^t \delta \, du}$$

$$= e^{\log(1+i) \cdot t}$$

$$= (1+i)^t.$$

V tem primeru dobimo običajno obrestovanje. V zavarovalništvu dopuščamo različne poteke obrestnih mer in jih običajno modeliramo z jakostjo obrestne mere. Po analogiji je potem pri privzeti obrestni meri v smislu jakosti sedanja vrednost enaka

$$\boxed{PV = \sum_{k=1}^{n} e^{-\int_0^{t_k} \delta(u) \, du} \cdot x_k}$$

Opomba: Zakaj rečemo jakost?

Na majhnem intervalu $[t, t+dt]$

je
$$P(t, t+dt) = e^{\int_t^{t+dt} \delta(u)\, du}$$
$$\approx e^{\delta(t) \cdot dt}$$
$$\approx 1 + \delta(t)\, dt$$

Na majhnem intervalu so natečene obresti sorazmerne dolžini intervala, koeficient pa je točno $\delta(t)$.

Dotaknimo se moramo še internega donosa. Recimo, da denarni tok $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v trenutkih $t_1, t_2, \ldots, t_n$ lahko kupimo po ceni C. Kakšno obrestno mero to implicira?

Ideja: Prava obrestna mera je tista, pri kateri je sedanja vrednost denarnega toka točno enaka ceni.

To pomeni, da je

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1}^{n} v^{t_k} \cdot x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} e^{-\delta \cdot t_k} \cdot x_k
\end{aligned}
$$

V normalnih razmerah je $C \le \sum_{k=1}^{n} x_k$ (logika?). Ko $\delta \to \infty$, desna stran $\to 0$ monotono padajoče. Obstaja torej ena sama rešitev $\delta_0 \geq 0$ zgornje enačbe, dokler je $C > 0$.

Definicija: Obrestni meri, ki jo določa enačba $\delta_0 = \log(1+i)$ rečemo interni donos denarnega toka.

Smisel te količine je, da nam dá možnost primerjave različnih denarnih tokov. Izberemo tistega, ki ima največji interni donos.

Potaknili se moramo še zveznih denarnih tokov. Recimo, da v intervalu $[t, t+dt]$ priteče $c(t) \cdot dt$ denarja, jakost obrestne mere pa je $\delta(t)$. Naj bo $F(t)$ vrednost računa v trenutku t. Veljalo bo

$$F(t+dt) = F(t) \cdot \delta(t)\, dt + c(t) \cdot dt + F(t)$$

Prenesemo $F(t)$ na levo in delimo z dt. Sledi

$$F'(t) = F(t) \cdot \delta(t) + c(t).$$

To je diferencialna enačba prvega reda. Opazimo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} F(t)\right)$$

$$= -e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} \cdot \delta(t) \cdot F(t) + e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} \cdot F'(t)$$

$$= e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} \left(-\cancel{\delta(t)} F(t) + \cancel{\delta(t)} F(t) + c(t)\right)$$

$$= e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} \cdot c(t)$$

Integriramo in sledi

$$e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} F(t) - F(0)$$

$$= \int_0^t e^{-\int_0^s \delta(u)\,du} \cdot c(s)\,ds.$$

Z drugimi besedami

$$F(t) = F(0) \cdot e^{\int_0^t \delta(s)\,ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \delta(u)\,du} \cdot c(s)\,ds$$

Interpretacija? končna vrednost računa ko obrestovano začetno stanje in obrestovani pritok denarja vmes.

1.3. Pričakovana sedanja vrednost

<u>Motivacija:</u> Recimo, da je obrestna mera (letna) enaka i. Nekdo nam ponudi, da nam izplača čez eno leto 1 €, vendar le, če bo met kovanca grb. Koliko nam je ta obljuba vredna v tem trenutku?

Sedanja vrednost izplačila 1 € je $(1+i)^{-1}$, vendar ga bomo dobili z verjetnostjo $1/2$. Dobili bomo slučajno spremenljivko, ki bo z verjetnostjo $1/2$ enaka $(1+i)^{-1}$, z verjetnostjo $1/2$ pa enaka 0. Vrednost slučajne spremenljivke „merimo" z njeno pričakovano vrednostjo. Torej nam je obljuba vredna $\frac{1}{2}(1+i)^{-1}$.

Tej količini rečemo pričakovana sedanja vrednost (angl. expected present value).

Bolj splošno lahko govorimo o denarnem toku $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v trenutkih $t_1, t_2, \ldots, t_n$, vendar se bodo izplačila zgodila z verjetnostjo p_i.

<u>Definicija</u>: Pričakovana sedanja vrednost denarnega toka je

$$\boxed{EPV = \sum_{k=1}^{n} v^{t_k} \cdot p_k \cdot x_k}$$

Pojem pričakovane sedanje vrednosti je temelj zavarovalništva. Kot primer navedimo

Direktiva 2009/138/EC, Solventnost 2, glavna direktiva za področje zavarovalništva v EU

Člen 77(2)

The best estimate shall correspond to the probability weighted average of future cash-flows, taking account of the time value of money (expected present value of future cash-flows), using the relevant risk-free interest rate term structure.

2. Modeli življenjske dobe

2.1. Porazdelitev preostale življenjske dobe

V zavarovalništvu se postavimo na stališče, da je preostala življenjska doba posameznika starega x slučajna spremenljivka T_x. Če je $x=0$, bomo rekli kar $T_0 = T$.

Za vrednotenje zavarovalnih produktov je bistveno vedeti porazdelitev te življenjske dobe.

Med porazdelitvijo T in T_x obstaja zveza. Veljalo bo

$$P(T_x \geq t) = P(T \geq x+t \mid T \geq x).$$

Razlaga: Desna stran je verjetnost, da bo nekdo, ki je dočivel x let, živel še t let (enota časa v zavarovalništvu je tipično eno leto).

Tipično bomo privzeli, da je T_x zvezna slučajna spremenljivka z gostoto $f_x(t)$, torej bo veljalo

$$P(T_x \leq t) = \int_0^t f_x(s)\,ds.$$

Aktuarji zaradi preprostosti za nekatere verjetnosti uporabljajo naslednje oznake:

$$\boxed{\begin{aligned} P(T_x \leq t) &= {}_tq_x \\ P(T_x > t) &= 1 - {}_tq_x = {}_tp_x \end{aligned}}$$

Če je $t = 1$, se levi t navadno izpusti.

$$\boxed{\begin{aligned} P(T_x \leq 1) &= q_x \\ P(T_x > 1) &= p_x \end{aligned}}$$

1 ? trditev

$$P(T_x \geq t) = P(T \geq x+t \mid T \geq x)$$

$$= \frac{P(T \geq x+t)}{P(T \geq x)}$$

dobimo naslednjo zvezo:

$$P(T_x \geq t+s)$$

$$= \frac{P(T \geq x+t+s)}{P(T \geq x)}$$

$$= \frac{P(T \geq x+t+s)}{P(T \geq x+t)} \cdot \frac{P(T \geq x+t)}{P(T \geq x)}$$

$$= {}_s p_{x+t} \cdot {}_t p_x$$

Na začetku je ${}_{t+s}p_x$, torej je

$$\boxed{{}_{t+s}p_x = {}_t p_x \cdot {}_s p_{x+t}}$$

Interpretacija!

2.2. Jakost smrtnosti

Privzemimo, da ima T gostoto $f_T(t)$. Naj bo F_T porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke T. Za tiste t, za katere je $F_T(t) < 1$ lahko zapišemo, da je

$$\int_0^t \frac{f_T(s)}{1 - F_T(s)}\, ds$$

$$= -\log(1 - F_T(s)) \Big|_0^t$$

$$= -\log(1 - F_T(s)),$$

ker je zaradi nenegativnosti T $F_T(0) = 0$. Tu smo upoštevali, da je $F_T'(t) = f_T(t)$, kot vemo iz verjetnosti.

Če označimo

$$\mu(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)},$$

sledi, da je

$$e^{-\int_0^t \mu(s)\,ds} = e^{+\log(1 - F_T(t))}$$

$$= 1 - F_T(t)$$

$$= P(T \geq t)$$

<u>Definicija</u>: Funkciji

$$\mu(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

rečemo jakost smrtnosti.

Aktuarska oznaka za jakost smrtnosti je μ_t. Za funkcijo $\mu(x+t)$ se uporablja oznaka μ_{x+t}.

Zakaj jakost smrtnosti? Ocenimo

$$\int_t^{t+dt} \mu(s)\, ds \approx \mu(t) \cdot dt .$$

To pomeni

$$
\begin{aligned}
P(t \le T \le t+dt) &= e^{-\int_0^t \mu(s)\,ds} - e^{-\int_0^{t+dt} \mu(s)\,ds} \\
&= e^{-\int_0^t \mu(s)\,ds} \cdot \left(1 - e^{-\int_t^{t+dt} \mu(s)\,ds}\right) \\
&\approx P(T \ge t) \cdot \mu(s)\, dt
\end{aligned}
$$

Uporabili smo $1 - e^{-x} \approx x$ za majhne x.

Interpretacija: od tistih, ki doživijo starost t, jih bo v naslednjem kratkem razdobju umrlo $\mu(t) \cdot dt$.

Zato rečemo tej količini jakost smrtnosti.

S to novo oznako lahko zapišemo

$$P(T_x \geq t) = \frac{P(T \geq t+x)}{P(T \geq x)}$$

$$= \frac{e^{-\int_0^{t+x} \mu(s)\,ds}}{e^{-\int_0^{t} \mu(s)\,ds}}$$

$$= e^{-\int_t^{t+x} \mu(s)\,ds}$$

$$= e^{-\int_0^{t} \mu_{x+s}\,ds}$$

Povzamemo

$$\boxed{{}_t p_x = e^{-\int_0^{t} \mu_{x+s}\,ds}}$$

Iz vseh izpeljav sledi še, da je

$$\mu_{x+t} = \frac{f_{T_x}(t)}{\underbrace{1 - F_{T_x}(t)}_{= {}_tp_x}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f_{T_x}(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}}$$

Jakost smrtnosti se uporablja v modeliranju v zavarovalništvu. Kot primer navedimo člen 137 iz Delegirane uredbe Evropske komisije.

Article 137

Mortality risk sub-module

1. The capital requirement for mortality risk referred to in Article 105(3)(a) of Directive 2009/138/EC shall be equal to the loss in basic own funds of insurance and reinsurance undertakings that would result from an instantaneous permanent increase of 15 % in the mortality rates used for the calculation of technical provisions.

2. The increase in mortality rates referred to in paragraph 1 shall only apply to those insurance policies for which an increase in mortality rates leads to an increase in technical provisions without the risk margin. The identification of insurance policies for which an increase in mortality rates leads to an increase in technical provisions without the risk margin may be based on the following assumptions:

(a) multiple insurance policies in respect of the same insured person may be treated as if they were one insurance policy;

(b) where the calculation of technical provisions is based on groups of policies as referred to in Article 35, the identification of the policies for which technical provisions increase under an increase of mortality rates may also be based on those groups of policies instead of single policies, provided that it yields a result which is not materially different.

3. With regard to reinsurance obligations, the identification of the policies for which technical provisions increase under an increase of mortality rates shall apply to the underlying insurance policies only and shall be carried out in accordance with paragraph 2.

Iz verjetnosti vemo še neki formul. Vemo, da je

$$E(T_x) = \int_0^\infty P(T_x \geq t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty {}_tp_x \, dt$$

Oznaka:

$$\boxed{\mathring{e}_x = E(T_x)}$$

V aktuarski praksi se računa s celoštevilskimi življenjskimi dobami. Definiramo

$$\boxed{K_x = \lfloor T_x \rfloor}$$

kot število dopolnjenih let osebe stare x let.

Velja

$$P(K_x = k) = P(k \le T_x < k+1)$$

$$= P(k \le T_x) - P(k+1 \le T_x)$$

$$= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$$

$$= {}_kp_x - {}_kp_x \cdot p_{x+k}$$

$$= {}_kp_x (1 - p_{x+k})$$

$$= {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

Aktuarji imajo tablice za te verjetnosti in zavarovalni produkti se vrednotijo na tej podlagi.

Ker za celoštevilsko slučajno spremenljivko $X \geq 0$ velja

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

dobimo

$$E(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$

Oznaka: $\boxed{e_x = E(K_x)}$

3.3. Analitični modeli za življenjsko dobo

Čeprav danes večinoma zavarovalnice uporabljajo računalniške programe in tablice smrtnosti, je zgodovinsko zanimivo pogledati, kaj so uporabljali v preteklosti.

Naštejmo nekaj tipičnih porazdelitev T in s tem T_x.

(i) De Moivre (1724)

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - t - x} \qquad 0 < t < \omega - x.$$

Tukaj je ω neka maksimalna življenjska doba. Če integriramo dobimo

$$\int_0^t \mu_{x+s}\, ds = \int_0^t \frac{1}{\omega - s - x}\, ds$$

$$= -\log(\omega - s - x)\Big|_0^t$$

$$= -\log(\omega - t - x) + \log(\omega - x)$$

Posledično je

$$P(T_x \geq t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds}$$

$$= \frac{\omega - x}{\omega - x - t}$$

(ii) Gompertz (1824)

$$\mu_{x+t} = B \cdot c^{x+t}$$

z integracijo dobimo

$$P(T_x \geq t) =$$

$$= e^{-\frac{B \cdot c^x}{\log c}(c^t - 1)}$$

(iii) Makeham (1860)

$$\mu_{x+t} = A + B \cdot c^{x+t}$$

z integracijo sledi, da je

$$P(T_x \geq t)$$

$$= e^{-At - \frac{B}{\log c}(c^t - 1)}.$$

(iv) Weibull (1939)

$$\mu_{x+t} = k\,(x+t)^n$$

za ustrezne konstante.

3. Življenjska zavarovanja

3.1. Zavarovanje za primer smrti, doživetja, mešano zavarovanje.

Kaj je zavarovalna pogodba? To je pogodba med zavarovancem in zavarovalnico. Pogodba natančno definira, v katerih primerih bo zavarovalnica zavarovancu ali drugim upravičencem izplačala zavarovalnino. Pri življenjskih zavarovanjih se izplačila spreminjajo v odvisnosti od življenjske dobe zavarovanca. Bistvene sestavine take pogodbe so določene z Obligacijskim zakonikom RS.

Primeri življenjskih zavarovanj

(i) Zavarovanje za smrt

Zavarovalnica in zavarovanec se dogovorita, da bo zavarovalnica v primeru smrti zavarovanca upravičencem izplačala vnaprej dogovorjeno vsoto C. V zameno bo zavarovanec plačeval premijo v enkratnem znesku ali postopoma. Bolj v navadi je postopno plačevanje premije na začetku vsakega leta zavarovanja. Kolikšna je vrednost take police? Kako zavarovalnica določi premijo? Zavarovalnica se postavi na stališče, da zavarovanec plača premijo na začetku, zavarovalnina C pa se izplača v trenutku $(k+1)$, če je trenutek smrti v intervalu $[k, k+1)$, torej $k \leq T_x < k+1$ ali $K_x = k$. Zavarovalnica ve, da se lahko zgodi, da bo morala izplačati C v trenutkih $k = 1, 2, \ldots, n$, če je u trajanje zavarovanja. Zavarovalnica tudi ve verjetnost, da bo morala v trenutku k izplačati C. Ta verjetnost je $P(K_x = k-1)$. Privzamemo si fiksno obrestno mero i in se spomnimo na $v = \frac{1}{1+i}$. Imamo torej situacijo, ko imamo denarne tokove v prihodnosti z določenimi verjetnostmi. Vrednost teh denarnih tokov izračunamo kot pričakovano sedanjo vrednost.

Izplačila v sedanji vrednosti so

$C \cdot v, \ C \cdot v^2, \ \ldots, \ C v^n,$

zgodijo pa se z verjetnostmi

$P(K_x=0)$, $P(K_x=1)$, ..., $P(K_x=n-1)$,

če je zavarovana oseba ob sklenitvi zavarovanja stara x let.

V zavarovalništvu za pričakovana sedanja vrednost dobi ime <u>neto enkratna premija</u> in v primeru $C=1$ tudi svoj simbol. Za zavarovanje za primer smrti je neto enkratna premija označena z $A^1_{x:\overline{n}|}$, veljalo pa bo

$$\boxed{A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot \underbrace{{}_kp_x \cdot q_{x+k}}_{P(K_x=k)}}$$

Opazimo še to, da je

$$E\left(v^{K_x+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot P(K_x = k),$$

tako da lahko zapišemo

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left(v^{K_x+1}\right).$$

Zavarovalnica se postavi na stališče, da zavarovancu „proda" slučajno spremenljivko, ta pa zanjo plača neto enkratno premijo. V zgornjem primeru je ta slučajna spremenljivka $Z = v^{K_x+1}$. Zakaj zavarovalništvo „deluje"? V veliki množici zavarovanj bo prišlo do izravnave tveganj in bo vsota neto enkratnih premij blizu obljenskim obveznostim zavarovalnice. Zavarovalnico bo zanimala tudi varianca Z.

Računamo

$$\mathrm{var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= E[v^{2(K_x+1)}] - (A^1_{x:\overline{n}|})^2$$

Za izplačilo C se $A^1_{x:n}$ pomnoži s C.

(ii) Življenjsko zavarovanje za doživetje.

To zavarovanje imetniku izplača vsoto C na koncu n-tega leta zavarovanja. Gre za varčevalni produkt. V smislu pričakovane sedanje vrednosti je vrednost take police enaka (za $C=1$)

$$v^n \cdot P(K_x \geq n).$$

V aktuarskih simbolih je to

$$\boxed{A^{\;1}_{x:\overline{n}|} = v^n \cdot {}_np_x}$$

Za izplačilo C namesto izplačila 1 je neto sedanja premija $C \cdot A^{\;1}_{x:\overline{n}|}$. Slučajna spremenljivka, ki jo gledamo tukaj, je

$$Z = v^n \cdot \underline{1}(T \geq n),$$ pri čemer je

$$\underline{1}(T \geq n) = \begin{cases} 1, & \text{če je } T \geq n. \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Velja

$$E(Z^2) = E\left[v^{2n} \cdot \underline{1}(T \geq n)\right]$$

$$= v^{2n} \cdot {}_np_x$$

in posledično

$$\mathrm{var}(Z) = v^{2n}\,{}_np_x - v^{2n} \cdot {}_np_x^2$$

$$= v^{2n} {}_xp_n (1 - {}_xp_n)$$

$$= v^{2n} \cdot {}_xp_n \cdot {}_xq_n$$

(iii) Mešano zavarovanje

Po tej pogodbi zavarovalnica izplača ali C na koncu leta smrti v obdobju do n let ali C ob doživetju. Velja

$$\boxed{A_{\overline{x:n}|} = A^{1}_{\overline{x:n}|} + A_{\overline{x:n}|}^{\ \ 1}}$$

V smislu slučajnih spremenljivk je

$$Z = v^{K_x+1} 1(K_x < n) + v^n 1(K_x \geq n)$$

$$= Z_1 + Z_2$$

Varianco izračunamo po običajni formuli

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2) + 2\,\mathrm{cov}(Z_1, Z_2)$$

Pri tem je

$$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2)$$

$$= \underbrace{E(Z_1 \cdot Z_2)}_{=0} - E(Z_1) \cdot E(Z_2)$$

$$= -A^1_{x:\overline{n}|} \cdot A^1_{x:\overline{n}|}$$

Za vsako C se pričakovana vrednost $A_{x:\overline{n}|}$ množi s C, varianca pa C^2.

<u>Dodatek</u>: Zavarovalnice sicer računajo s celoštevilskimi K_x, matematično pa lahko zapišemo formule tudi za primer, ko je življenjska doba zvezna slučajna spremenljivka T_x. Po analogiji je za zavarovanje za primer smrti za n let

$$Z = v^{T_x} \cdot 1(T_x \leq n).$$

Dobimo

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot f_{T_x}(t)\, dt.$$

Vzemimo $v = e^{-\delta t}$ + $\delta = \log(1+i)$

in zapišimo $f_{T_x}(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$

in dobimo

$$\boxed{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt}$$

Za teoretične namene bomo obravnavali tudi „abstraktne" zavarovalne police.

Zavarovalnica in zavarovanec skleneta pogodbo, po kateri zavarovalnica na koncu leta smrti zavarovanca izplača c_{k+1}, če je $K_x = k$.

V smislu slučajnih spremenljivk je to

$$Z = c_{K_x+1} \cdot v^{K_x+1}$$

in

$$\boxed{\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \cdot v^{k+1} P(K_x = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \cdot v^{k+1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \end{aligned}}$$

Za primer zavarovanja za primer smrti je $c_1 = c_2 = \quad = c_n = C$ in $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$. Za primer zavarovanja za doživetje je $c_1 = \quad = c_n = 0$ in $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ tam, da je

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_{k+1} \cdot v^{k+1} P(K_x = k) = v^n {}_n p_x$$

<u>Primeri</u>:

(i) Pogosto pri rentah lahko popravljamo za inflacijo.

V takih primerih je lahko

$$c_{k+1} = (1+j)^{k+1} \cdot C.$$

Pri tem je j privzeta stopnja inflacije.

(ii) Drugi primer so linearno naraščajoče rente, ko je $c_{k+1} = (k+1) \cdot C$. V tem primeru označimo

$$\boxed{(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot v^{k+1} {}_kp_x \cdot q_{x+k}}$$

<u>Dodatek</u>: če želimo zapisati še formule za zvezni čas, je izplačilo v trenutku t enako $c(t)$. Postavimo $v = e^{-\delta t}$ in dobimo po analogiji:

$$Z = c_{T_x} \cdot v^{T_x}$$

in

$$\boxed{\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^\infty c(t) \cdot v^t f_{T_x}(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty c(t) \cdot v^t {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}\, dt \end{aligned}}$$

3.2. Rente

Renta je pogodba, po kateri zavarovalnica zavarovancu izplačuje v trenutkih $k = 0, 1, \ldots$ vsote c ali dokler je zavarovanec živ ali omejeno število let n. V smislu slučajnih spremenljivk je

$$Z = (1 + v + \ldots + v^{K_x}) \cdot c$$

Či je $K_x = k$, je tovej sedanja vrednost izplačil po $C = 1$ enaka $1 + v + \dots + v^k$.

<u>Definicija</u>: Vsoto $1 + v + \dots + v^{n-1}$ označimo z

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots + v^{n-1}}$$

Z zgornjo oznako lahko zapišemo

$$Z = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$$

Posledično je

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot P(K_x = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Vrednost take rente označimo z

$$\ddot{a}_x .$$

Zapišimo še nekoliko drugače.

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot 1(K_x \geq k)$$

Uporabimo linearnost pričakovane vrednosti (kar lahko tudi za neskončne vsote) in dobimo

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P(K_x \geq k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x \end{aligned}}$$

Podobno računamo, če je renta časovno omejena na n let.
Razlika je samo v tem, da dobimo

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x}$$

4. Premije in premijske rezerve

4.1. Neto premije

Zavarovalne pogodbe začnejo veljati, ko zavarovanec plača premijo. Pri življenjskih zavarovanjih je to možno narediti v enkratnem znesku ali pa v večih obrokih, ki so enaki ali pa variirajo. Tipičen primer je ta, da zavarovanec v trajanju police (= zavarovalne pogodbe) letno plačuje premijo v enakih zneskih.

Kako pa zavarovalnice določijo premijo?

Najpomembnejša ideja je načelo ekvivalence.

NAČELO EKVIVALENCE: Pričakovana sedanja vrednost izplačil na osnovi zavarovalne police mora biti enaka pričakovani sedanji vrednosti premij, ki jih plača zavarovanec.

Zakaj moramo govoriti o pričakovani sedanji vrednosti premij? Če namreč zavarovanec umre, neha plačevati premije. Število premij bo odvisno od življenjske dobe zavarovanca, torej bo sedanja vrednost bodočih izplačil slučajna spremenljivka in sedanja vrednost bodočih vplačil slučajna spremenljivka.

<u>Definicija</u>: Celotna izguba L je razlika sedaje vrednosti premij in sedaje vrednosti izplačil.

Celotna izguba L je razlika dveh slučajnih spremenljivk in zato tudi sama slučajna spremenljivka. Načelo ekvivalence lahko zapišemo kot

$$\boxed{E(L) = 0.}$$

<u>Primer</u>: Vzemimo življenjsko zavarovanje za primer smrti v trajanju n let za osebo staro x let. Oseba bo v trenutkih $k = 0, 1, \ldots, n-1$ plačala fiksno premijo v višini Π. Kolikšna bi morala biti premija?

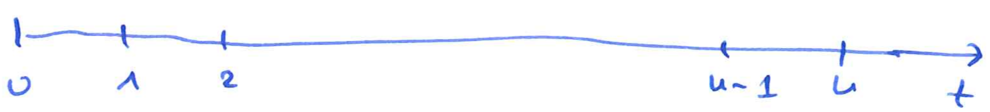
Sedanjo vrednost izplačil smo izračunali kot

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k}p_{x}\, q_{x+k}$$

$$= E\left[v^{K_x+1} \cdot 1(K_x < n)\right]$$

Oseba bo v trenutku k plačala premijo, če bo še živa.

<u>Slika</u>:



Denarni tokovi v višini Π v trenutku k bodo imeli sedanjo vrednost $v^k \cdot \Pi$, zgodili pa se bodo z verjetnostjo $P(K_x \geq k) = {}_kp_x$.

Sledi, da je sedanja vrednost premij enaka

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \Pi \cdot {}_kp_x$$

$$= \Pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x$$

$$= \Pi \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \Pi \cdot 1(K_x \geq k)\right]$$

Sledi, da je

$$L = v^{K_x+1} 1(K_x < n) - \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \Pi \cdot 1(K_x \geq k)$$

Načelo ekvivalence nam da

$$A^1_{\overline{x:n}|} = \Pi \cdot \ddot{a}_{\overline{x:n}|} ,$$

torej

$$\boxed{\Pi = \frac{A^1_{\overline{x:n}|}}{\ddot{a}_{\overline{x:n}|}}}$$

Če je zavarovalna vsota C, se premija proporcionalno množi z C.

<u>Primer</u>: Oglejmo si še mešano zavarovanje. Privzemimo, da je zavarovalna vsota enaka $C = 1$. Če ni, vse količine množimo z C. Pričakovano sedanjo vrednost denarnih tokov smo označili z $A_{\overline{x:n}|}$.

Oseba bo plačevala premijo na začetku vsakega leta zavarovanja, torej v trenutkih $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; sedanja vrednost vseh plačil premije v višini Π je $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

V tem primeru je po ekvivalenci

$$A_{x:\overline{n}|} = \Pi \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

torej

$$\Pi = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Zapišimo še slučajno spremenljivko L. Veljalo bo

$$L = c\,v^{K_x+1} \cdot 1(K_x < n) + c \cdot v^n \cdot 1(K_x \geq n) - \Pi \cdot \ddot{a}_{x:\overline{K_x+1}|}$$

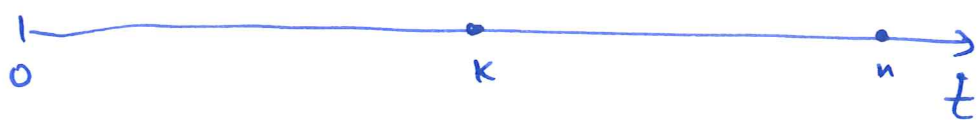
4.2. Neto premijske rezerve

Primer: Zavarovalnica in zavarovanec skleneta zavarovanje za primer smrti. Zavarovana vsota je C, premija (neto) pa je

$$\pi = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} .$$

Ko mine tekoči čas, princip ekvivalence ne bo več veljal. Če je zavarovanec še živ, bo imel motivacijo za plačevanje premij le, če bodo neto pričakovana izplačila večja od premije, ni jo bo še plačal (zakaj - ekonomski razlog).

Recimo, da se postavimo v leto k.



Recimo, da je v letu k zavarovanec živ. Star je $x+k$. Vrednost njegove police je $A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}$ in bo plačal si v smislu pričakovane sedanje vrednosti premije v višini $\Pi \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$. Razliki

$$\boxed{{}_kV_{x:n} = A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} - \Pi \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}$$

rečemo <u>neto premijska rezervacija</u> na začetku leta k.

<u>Opozorilo</u>: V izračunu neto premijskih rezervacij vključimo samo obveznosti, ki padejo striktno v čas $> k$, vračunamo pa premijo v trenutku k.

Kot rečeno, je neto premijska rezervacija načeloma pozitivna.

Od kod pa ima zavarovalnica

razliko med prihodnjimi pritoki in prihodnjimi odtoki? Zavarovanec je že plačeval premijo v preteklosti in zavarovalnica je del te premije prihranila.

<u>Definicija</u>: Neto premijska rezervacija v letu k, ki jo označimo z ${}_kV$ je razlika med pričakovano sedanjo vrednostjo obveznosti (v času $> k$) in pričakovano sedanjo vrednostjo premij, ki jih bo zavarovanec še plačal.

<u>Opombi</u>:

(i) Razliki v zavarovalništvu rečemo zavarovalno-tehnične rezervacije za pogodbo. Te morajo zavarovalnice poročati nadzoru.

(ii) Po načelu ekvivalence je ${}_0V = 0$.

Vzemimo splošno zavarovanje, ki na koncu leta smrti izplača c_{k+1}, če je $K_x = k$. Recimo tudi, da so premije v različnih letih enake Π_k. V splošnem bo

$$
{}_kV = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1} \cdot v^{j+1} \cdot {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j}
$$

$$
- \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j}\, v^j\, {}_jp_{x+k}
$$

Razlaga! Vsoti lahko nekoliko preuredimo. Levo vsoto predelamo:

$$
\sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1} \cdot v^{j+1}\, {}_jp_{x+k} \cdot q_{x+k+j}
$$

$$
= c_{k+1} \cdot v \cdot q_{x+k}
$$

$$
+ v \sum_{j=0}^{\infty} c_{(k+1)+j+1} \cdot v^{j+1} \times
$$

$$\times \; p_{x+k} \cdot {}_{j}p_{x+k+1} \cdot q_{x+(k+1)+j}$$

$$= c_{k+1} \cdot v \cdot q_{x+k}$$

$$+ \; v \cdot p_{x+k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_{(k+1)+j+1}$$

$$\times \; {}_{j}p_{x+k+1} \cdot q_{x+(k+1)+j}$$

Desno vsoto predelamo v

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j} \cdot v^{j} \cdot {}_{j}p_{x+k}$$

$$= \Pi_k + v \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{(k+1)+j}$$

$$\cdot \; v^{j}$$

$$\cdot \; p_{x+k}$$

$$\cdot \; {}_{j}p_{x+k+1}$$

Razlika postane

$$_{k}V = c_{k+1} \cdot v \cdot q_{x+k} - \Pi_k$$

$$+ \; v \cdot p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V$$

Prepišemo v

$$\boxed{{}_kV + \Pi_k = v\left[c_{k+1}\cdot q_{x+k} + {}_{k+1}V \; p_{x+k}\right]}$$

<u>Opomba</u>: Uporabili smo

$$_{t+s}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}.$$

Ali lahko zgornjo formulo interpretiramo na kakšen smiseln način? Zavarovalnica razmišlja na naslednji način: vsi zavarovanci, ki so še živi v trenutku k, bodo takrat plačali premijo Π_k. Delež q_{x+k} jih bo v naslednjem letu umrl in jim moramo izplačati c_{k+1}, kar je v sedanji vrednosti $c_{k+1}\cdot v$.

V trenutku $k+1$ bomo morali iz ${}_kV + \Pi_k$ „pokriti" umrle v tem letu in ${}_{k+1}V$ za prihodnost za tiste, ki so še živi.

Ali lahko premijo Π_k razdelimo na varčevalni in tvegani del.

Načeloma bi, če varčevalni del označimo z Π_k^s, moralo veljati:

$$
{}_kV = \sum_{j=0}^{k-1} (1+i)^{k-j} \cdot \Pi_j^s
$$

Zakaj? Velja tudi

$$
{}_{k+1}V = \sum_{j=0}^{k} (1+i)^{(k+1)-j} \cdot \Pi_j^s
$$

Če izračunamo

$v \cdot {}_{k+1}V - V_k$ dobimo točno Π_k^s

Definicija: Deležu premije

$$\boxed{\Pi_k^s = v \cdot {}_{k+1}V - {}_kV}$$ rečemo

varčevalni del. To je del premije za pokrivanje prihodnjih rezervacij.

Preostalemu deležu

$$\Pi_k^r = \Pi_k - \Pi_k^s$$

rečemo delež premije za tveganje.

Iz rekurzivne formule sledi, da mora veljati:

$$\boxed{\Pi_k^r = v(c_{k+1} - {}_{k+1}V) \cdot q_{x+k}}$$

Interpretacija? Π_k^r je točno premija za enoletno zavarovanje za primer smrti z izplačilom $c_{k+1} - {}_{k+1}V$. To je točno razlika med tem, kar bomo imeli in kar bomo morali izplačati!

Primer: Vzemimo vseživljenjsko zavarovanje za primer smrti, ki izplača vsoto 1 na koncu leta smrti. Velja

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot P(K_x = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Za nenegativno celoštevilsko slučajno spremenljivko X bo veljalo

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1).$$

Zapišimo to v zgornji formuli.

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left(P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \right)$$

$$= v \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P(X \geq k)$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(X \geq k+1)$$

$$= v \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x - \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x$$

$$= v \cdot \ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$= 1 - \ddot{a}_x (-v + 1)$$

$$= 1 - \ddot{a}_x \left(-\frac{1}{1+i} + 1\right)$$

$$= 1 - \ddot{a}_x \cdot \frac{i}{1+i}$$

Vemo tudi, da je premija enaka $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$. Če je oseba po k letih še živa, računamo

$$_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$$

Uporabimo zgornjo zvezo in sledi

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= 1 - \ddot{a}_{x+k} \cancel{\cdot \frac{i}{1+i}} \\
&\quad - \frac{\left(1 - \ddot{a}_x \cancel{\cdot \frac{i}{1+i}}\right)}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}
\end{aligned}
$$

4.3. Rekurzivne formule in Hattendorffov izrek

Kako bi smiselno pripisali izgubo posameznim letom? Vemo, da bo izguba v letu k odvisna od življenjske dobe zavarovanca in zato slučajna.

Označimo izgubo v letu k z Λ_k. Želimo veči

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \Lambda_k$$

Kaj bi bilo smiselno?

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{če je } K_x \leq k-1; \\ c_{k+1} \cdot v - ({}_kV + \Pi_k), & \text{če je } K_x = k \\ {}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \Pi_k), & \text{če je } K_x \geq k+1 \end{cases}$$

Diskusija? V primeru $K_x \leq k-1$ se v letu k ne bo zgodilo 0. Če bo zavarovanec v letu k umrl bomo izplačali na koncu c_{k+1}, v rokah pa imamo ${}_kV$ in Π_k.

Če zavarovanec preživi leto k, moramo pokriti razliko med ${}_{k+1}V$ in $({}_kV + \Pi_k)$.

Z otuačcami iz prejšnjega razdelka je lahko trditi

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{če je } K_x \le k-1; \\ -\Pi_k^k + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)v, & \text{če je } K_x = k \\ -\Pi_k^r, & \text{če je } K_x \ge k+1; \end{cases}$$

Najprej izračunajmo $E(\Lambda_k)$. Gre za izračun $E[f(K_x)]$. Dobimo

$$E(\Lambda_k) = [c_{k+1} \cdot v - ({}_kV + \Pi_k)] \times P(K_x = k)$$

$$+ [{}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \Pi_k)] \cdot P(K_x \ge k+1)$$

Prevedimo v

$$E[\Lambda_k]$$

$$= [c_{k+1} \cdot v - ({}_kV + \Pi_k)] \; {}_kp_x \, q_{x+k}$$

$$+ [{}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \Pi_k)] \; {}_{k+1}p_x$$

$$= [c_{k+1} \cdot v - ({}_kV + \Pi_k)]\, {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

$$+ [{}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \Pi_k)]\, {}_kp_x \cdot p_{x+k}$$

$$= [v(c_{k+1} \cdot q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k})$$

$$- ({}_kV + \Pi_k)]\, {}_kp_x$$

Po rekurzivni formuli iz prejšnega razdelka je to 0!

<u>Izrek 1</u> (Hattendorff). Za $k \neq \ell$ je $\mathrm{cov}(\Lambda_k, \Lambda_\ell) = 0$.

<u>Dokaz</u>: Po definiciji je

$$\mathrm{cov}(\Lambda_k, \Lambda_\ell) = E(\Lambda_k \cdot \Lambda_\ell)$$

$$- E(\Lambda_k)\, E(\Lambda_\ell)$$

Dokazati torej moramo, da je

$$E(\Lambda_k \cdot \Lambda_l) = 0.$$

Iz verjetnosti poznamo formulo

$$E(X \mid B) = \frac{E(X \cdot 1_B)}{P(B)}.$$

Račun na začetku razdelka pravi, da je

$$E(\Lambda_k \cdot 1(K_x \geq k)) = 0$$

in zato

$$E(\Lambda_k \mid K_x \geq k) = 0.$$

Recimo, da je $l > k$. Računamo

$$E(\Lambda_k \cdot \Lambda_l) = E[\Lambda_k \cdot \Lambda_l \cdot 1(K_x \geq l)]$$

$$= \cdot({}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \Pi_k))$$

$$\cdot E[\Lambda_l \cdot 1(K_x \geq l)]$$

$$= 0.$$

4.4. Premije in premijske rezerve z upoštevanjem stroškov

Zavarovalnice so podjetja, zato morajo pokrivati stroške obratovanja (plače zaposlenih, pisarniški material, stavbe, IT, zastopniki, ...). Edina vira dohodka sta dohodek iz premij in donos naložb. Zato zavarovalnice ne zaračunavajo neto premije, ampak tudi nekaj dodatka v obliki stroškov. Pri življenjskih zavarovanjih so stroški razdeljeni (tipično) v tri skupine.

(i) <u>Stroški pridobivanja</u> (provizija zastopnikov, administrativni stroški sklepanja zavarovanj, stroški medicinskih pregledov, ...)
Ti stroški so sorazmerni zavarovani vsoti s faktorjem α.

(ii) Inkaso stroški so stroški kot del premije. Obračunavajo se na začetku vsakega leta zavarovanja in so sorazmerni premiji. Premijo razumemo kot premijo z upoštevanjem stroškov. Sorazmernostni faktor je β.

(iii) Administrativni stroški vključujejo IT, najemnine, plače zavarovalnih zaposlenih, ...
Obračunavajo se na začetku vsakega leta zavarovanja kot del zavarovane vsote, če je zavarovanec še živ.
Sorazmernostni faktor označimo z γ.

Stroški spremenijo način izračunavanja premij in zavarovalno tehničnih rezervacij. Oglejmo si primer.

$$+ \quad \gamma \cdot C \ \ddot{a}_{\overline{x:n}|}$$

To je linearna enačba za premijo.

Dobimo

$$P^{a}_{\overline{x:n}|} = \frac{\alpha \cdot C + A_{\overline{x:n}|} + \gamma \cdot C \ \ddot{a}_{\overline{x:n}|}}{(1-\beta) \ \ddot{a}_{\overline{x:n}|}}$$

Opomba: Kdo določa višino stroškov? Načeloma zakonodaja tega ne ureja, razen v primeru rent iz naslova dodatnega pokojninskega zavarovanja in samega varčevalnega dela tel zavarovanj. Zavarovalnice morajo razmišljati o stroških zaradi konkurenčnosti.

Kako pa upoštevanje stroškov spremeni razmišljanje o rezervacijah?

Ideja je še vedno, da izračunamo razliko med obveznostmi strogo v prihodnosti in premijami, ki jih bo zavarovanec še plačal, v smislu pričakovane sedanje vrednosti.

__Primer__: Vzemimo spet mešano zavarovanje kot v prejšnjem primeru. Na začetku premijo določimo tako, da so rezervacije enake 0. V trenutku k pa označimo rezervacije z ${}_kV^a_{\overline{x:n}|}$. Veljati mora:

__Noter__:
$$P^a_{\overline{x:n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+k:n-k}|}$$

__Ven__:
$$\beta \cdot P^a_{\overline{x:n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+k:n-k}|}$$
$$+ \gamma \cdot C\, \ddot{a}_{x+k:n-k}$$
$$+ A_{\overline{x+k:n-k}|}$$

Velja torej

$$
{}_kV^a_{\overline{x:n}|} = A_{\overline{x+k:n-k}|} + \beta P^a_{\overline{x:n}|} \ddot{a}_{\overline{x+k:n-k}|} + \gamma \cdot C \ddot{a}_{\overline{x+k:n-k}|} - P^a_{\overline{x:n}|} \ddot{a}_{\overline{x+k:n-k}|}
$$

<u>Opomba</u>: Variacij na temo stroškov je ogromno. Pomembno je, da znamo ugotoviti v smislu pričakovane sedanje vrednosti, kaj je „noter" in kaj „ven".?

5. Premoženjska zavarovanja

5.1. Opis premoženjskih zavarovanj

Premoženjska zavarovanja ščitijo, kot ime samo pove, premoženje. Med premoženjska zavarovanja zaradi svoje narave spadajo tudi zdravstvena zavarovanja. Glavne razlike med življenjskimi in premoženjskimi zavarovanji so naslednje:

(i) tipično so kratkoročna, največkrat enoletna.

(ii) višina škod ni znana vnaprej

(iii) trenutek škode ni znan vnaprej

(iv) celotno število škod ni znano vnaprej.

Kako zavarovalnice upravljajo s škodami in tveganji.

Tveganja pri premoženjskih zavarovanjih so naslednja:

(i) napačno določanje cen - premij lahko vodi do nezmožnosti izplačila škod. Temu tveganju se reče premijsko tveganje.

(ii) nenavadno visoke škode lahko povzročijo izgube ali nezmožnost poplačila. Zavarovalnice se proti tej vrsti tveganja zavarujejo s pozavarovanjem.

(iii) neustrezno rezerviranje lahko povzroči nezmožnost poplačila.

Kako deluje rezerviranje pri premoženjskih zavarovanjih?
Tipično se premija plača ob sklenitvi zavarovanja in tveganja

neplačila ni. Ko zavarovalnica dobi sporočilo, da se je zgodila škoda - recimo avtomobilsko nesrečo - mora v svojih knjigah takoj določiti neko rezervacijo, tudi če še nima točnih podatkov o velikosti škode. Škode se potem „rešujejo", kar pomeni, da cenilci ocenijo velikost škode, včasih pa pride celo do sodnih postopkov in dolgotrajnega reševanja škod. Zato se nekatere škode lahko vlečejo več let, posebej v nekaterih zavarovalnih vrstah - recimo pri zavarovanju odgovornosti.

1.2.2. Pojmi v zvezi z zavarovalnimi in pozavarovalnimi posli

7. člen
(zavarovalni posli)

(1) Zavarovalni posli so sklepanje in izvrševanje pogodb o premoženjskem in življenjskem zavarovanju ali pozavarovanju, razen obveznih socialnih zavarovanj.

(2) Zavarovanja se glede na glavne nevarnosti, ki jih krijejo, razvrščajo v naslednje zavarovalne vrste:

1. nezgodno zavarovanje (vključno z zavarovanjem nesreč pri delu in poklicnih obolenj) je zavarovanje, ki v primeru smrti ali izgube zdravja zaradi nezgode krije:
   - izplačilo dogovorjenih denarnih nadomestil, odškodnin oziroma povračil stroškov,
   - izplačila zaradi poškodbe, okvare zdravja ali smrti potnikov;
2. zdravstveno zavarovanje je zavarovanje, ki v primeru bolezni, poškodbe ali posebnega zdravstvenega stanja krije:
   - stroške zdravstvenih ter z njimi povezanih storitev, stroške oskrbe z zdravili in medicinsko-tehničnimi pripomočki,
   - izplačila dogovorjenih denarnih nadomestil,
   - kombinacijo izplačil po prejšnjih alinejah;
3. zavarovanje kopenskih vozil (razen tirnih vozil) je zavarovanje, ki krije vse škode na oziroma izgubo:
   - kopenskih vozil na lasten pogon,
   - kopenskih vozil brez lastnega pogona;
4. zavarovanje tirnih vozil je zavarovanje, ki krije vse škode na tirnih vozilih oziroma izgubo tirnih vozil;
5. letalsko zavarovanje je zavarovanje, ki krije vse škode na zrakoplovih ali drugih letalnih napravah ter izgubo zrakoplovov oziroma drugih letalnih naprav;
6. zavarovanje plovil je zavarovanje, ki krije vse škode na morskih, rečnih in jezerskih plovilih oziroma njihovo izgubo;
7. zavarovanje prevoza blaga je zavarovanje, ki krije vse škode na blagu oziroma izgubo blaga, vključno s prtljago, ne glede na vrsto prevoza;
8. zavarovanje požara in elementarnih nesreč je zavarovanje, ki krije vse škode na premoženju (razen škod na premoženju, ki jih krijejo zavarovanja iz 3. do 7. točke tega odstavka), ki nastane zaradi:
   - požara,
   - eksplozije,
   - nevihte,
   - drugih naravnih dogodkov razen neviht,
   - jedrske energije,
   - pogrezanja in drsenja tal;
9. drugo škodno zavarovanje je zavarovanje, ki krije vse škode na premoženju (razen škod na premoženju, ki jih krijejo zavarovanja iz 3. do 7. točke tega odstavka), ki nastane zaradi toče, pozebe ali zaradi drugih vzrokov (npr. tatvine), razen vzrokov iz 8. točke tega odstavka;
10. zavarovanje odgovornosti pri uporabi vozil je zavarovanje, ki krije vse vrste odgovornosti, ki izhajajo iz uporabe kopenskih vozil z lastnim pogonom (vključno s prevozniško odgovornostjo);
11. zavarovanje odgovornosti pri uporabi zrakoplovov oziroma drugih letalnih naprav je zavarovanje, ki krije vse vrste odgovornosti, ki izhajajo iz uporabe zrakoplovov oziroma drugih letalnih naprav (vključno s prevozniško odgovornostjo);

12. zavarovanje odgovornosti pri uporabi plovil je zavarovanje, ki krije vse vrste odgovornosti, ki izhajajo iz uporabe morskih, rečnih in jezerskih plovil (vključno s prevozniško odgovornostjo);
13. splošno zavarovanje odgovornosti je zavarovanje, ki krije druge vrste odgovornosti, razen odgovornosti iz 10. do 12. točke tega odstavka;
14. kreditno zavarovanje je zavarovanje, ki krije:
    - nevarnost neplačila (oziroma zamude plačila) zaradi nesolventnosti ali drugih dogodkov (ravnanj ali dejstev),
    - izvozne kredite in druge nevarnosti, povezane z izvozom, trgovino in vlaganji na tujih in domačih trgih,
    - kredite z obročnim odplačevanjem,
    - hipotekarne in lombardne kredite,
    - kmetijske kredite,
    - druge kredite in posojila;
15. kavcijsko zavarovanje je zavarovanje, ki krije in neposredno ali posredno jamči za izpolnitev obveznosti dolžnikov;
16. zavarovanje različnih finančnih izgub je zavarovanje, ki krije finančne izgube zaradi:
    - poklicnih nevarnosti,
    - nezadostnih prihodkov (na splošno),
    - slabega vremena,
    - izgubljenega dobička,
    - nepredvidenih splošnih stroškov,
    - nepredvidenih poslovnih stroškov,
    - izgube tržne vrednosti,
    - izpada najemnine oziroma izgube prihodka,
    - posrednih poslovnih izgub, razen izgub iz prejšnjih alinej,
    - drugih neposlovnih izgub,
    - drugih finančnih izgub;
17. zavarovanje stroškov postopka je zavarovanje, ki krije stroške odvetnikov in druge stroške postopka;
18. zavarovanje pomoči je zavarovanje, ki krije pomoč osebam, ki zaidejo v težave na potovanju oziroma v drugih primerih odsotnosti od njihovega doma oziroma stalnega prebivališča;
19. življenjsko zavarovanje (razen zavarovanj iz 20. do 24. točke tega odstavka) je zavarovanje, ki obsega zlasti zavarovanje za primer doživetja, zavarovanje za primer smrti, mešano življenjsko zavarovanje, rentno zavarovanje in življenjsko zavarovanje z vračilom premij, in dodatno zavarovanje, ki obsega predvsem zavarovanje invalidnosti zaradi nezgode ali bolezni, zavarovanje smrti zaradi nezgode ter zavarovanje za primer poškodbe, vključno z zavarovanjem nesposobnosti opravljanja poklica zaradi poškodbe, kadar je dodatno zavarovanje sklenjeno k življenjskemu zavarovanju iz zavarovalne skupine življenjskih zavarovanj iz 2. točke četrtega odstavka tega člena;
20. zavarovanje za primer poroke oziroma rojstva;
21. življenjsko zavarovanje z naložbenim tveganjem je zavarovanje, pri katerem zavarovalec prevzema naložbeno tveganje, povezano s spremembo vrednosti enot kolektivnih naložbenih podjemov za vlaganja v prenosljive vrednostne papirje (v nadaljnjem besedilu: KNPVP sklad), kot jih določa zakon, ki ureja investicijske sklade in družbe za upravljanje oziroma vrednosti sredstev, vsebovanih v notranjem skladu zavarovalnice, oziroma vrednosti indeksa vrednostnih papirjev oziroma druge referenčne vrednosti;
22. tontine je zavarovanje, pri katerem se skupina zavarovalcev dogovori, da bo skupno kapitalizirala svoje prispevke in razdelila tako kapitalizirano premoženje med tiste zavarovance, ki doživijo določeno starost oziroma med dediče umrlih zavarovancev oziroma med upravičence, ki so jih določili umrli zavarovanci;
23. zavarovanje s kapitalizacijo izplačil je zavarovanje, ki temelji na zavarovalno-tehničnih izračunih in pri katerem prejme zavarovalec, zavarovanec ali drug upravičenec v zameno za enkratno oziroma obročno vplačevanje premij izplačila v določenem obdobju in višini;

24. zavarovanje izpada dohodkov zaradi nezgode ali bolezni, ki ga zavarovalnica ne more odpovedati.

(3) Zavarovanja, ki združujejo zavarovanja iz več zavarovalnih vrst, se razvrščajo v naslednje zavarovalne podskupine:

1. nezgodna in zdravstvena zavarovanja so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 1. in 2. točke prejšnjega odstavka,
2. zavarovanja vozil so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz druge alineje 1. točke ter 3., 7. in 10. točke prejšnjega odstavka,
3. pomorska in transportna zavarovanja so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz druge alineje 1. točke ter 4., 6., 7. in 12. točke prejšnjega odstavka,
4. zavarovanja zrakoplovov ali drugih letalnih naprav so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz druge alineje 1. točke ter 5., 7. in 11. točke prejšnjega odstavka,
5. požarna in druga škodna zavarovanja so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 8. in 9. točke prejšnjega odstavka,
6. zavarovanja odgovornosti so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 10. do 13. točke prejšnjega odstavka,
7. kreditna in kavcijska zavarovanja so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 14. in 15. točke prejšnjega odstavka,
8. škodna in nezgodna zavarovanja so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 1. ter 3. do 13. in 16. točke prejšnjega odstavka.

(4) Zavarovanja, ki združujejo zavarovanja iz več zavarovalnih vrst, se združujejo v naslednje zavarovalne skupine:

1. premoženjska zavarovanja po tem zakonu so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 1. do 18. točke drugega odstavka tega člena,
2. življenjska zavarovanja po tem zakonu so zavarovanja iz zavarovalnih vrst iz 19. do 24. točke drugega odstavka tega člena.

(5) Pozavarovanje je dejavnost sprejemanja tveganj, ki jih odstopi zavarovalnica, zavarovalnica države članice ali zavarovalnica tretje države oziroma pozavarovalnica, pozavarovalnica države članice ali pozavarovalnica tretje države.

(6) Obvezna zavarovanja v prometu so zavarovanja, ki jih ureja zakon, ki ureja obvezna zavarovanja v prometu.

(7) Dopolnilno zdravstveno zavarovanje je prostovoljno zdravstveno zavarovanje, ki predstavlja javni interes Republike Slovenije in se izvaja po načelih medgeneracijske vzajemnosti in vzajemnosti med spoloma med vsemi zavarovanci dopolnilnega zdravstvenega zavarovanja. Vse zavarovalnice, ki izvajajo dopolnilno zdravstveno zavarovanje, so obvezno vključene v izravnalne sheme za izravnavo razlik v stroških zdravstvenih storitev med zavarovalnicami, ki izhajajo iz razlik v starostni strukturi in strukturi po spolu portfelja posameznih zavarovalnic v skladu z zakonom, ki ureja zdravstveno varstvo in zdravstveno zavarovanje. Podrobnejšo ureditev določajo predpisi o zdravstvenem varstvu in zdravstvenem zavarovanju.

7.5.2 Življenjska in pokojninska zavarovanja

V Skupini Triglav smo obračunali za 237,9 milijona evrov nekonsolidirane kosmate zavarovalne premije **življenjskih in pokojninskih zavarovanj**, kar je približno enako kot preteklo leto (indeks 100). V skupni obračunani kosmati zavarovalni premiji imajo življenjska in pokojninska zavarovanja 20,3-odstotni delež, ki je za 0,8 odstotne točke nižji kot leto prej.

Življenjska zavarovanja (klasična življenjska, rentna, pokojninska rentna in prostovoljna pokojninska zavarovanja) so bila višja za 3 odstotke. Njihov delež v vrednosti 106,8 milijona evrov predstavlja 44,9-odstotni delež v premiji skupine življenjskih in pokojninskih zavarovanj. Visoko premijsko rast so dosegle zavarovalnice Triglav Osiguranje, Sarajevo, (uspešna prodaja po bančni in agencijski prodajni poti), Triglav Osiguranje, Beograd, (uspešna prodaja po bančni prodajni poti), Lovćen životna osiguranja (uspešna prodaja kolektivnih kreditnih zavarovanj za primer smrti po bančni prodajni poti) in Triglav Osiguruvanje Život, Skopje, (uspešna prodaja po notranji prodajni poti). Premija Zavarovalnice Triglav je bila 3 odstotke nižja kot leto prej.

Premija naložbenih življenjskih zavarovanj (življenjsko zavarovanje, vezano na enote investicijskih skladov) je znašala 112,2 milijona evrov in je bila 3 odstotke nižja kot predhodno leto. Ta zavarovanja predstavljajo 47,2 odstotka obračunane zavarovalne premije skupine življenjskih in pokojninskih zavarovanj. Triglav Osiguranje, Zagreb, je beležila 9-odstotno rast zaradi povečane prodaje prek ene od bank. Premija Zavarovalnice Triglav se je znižala za 5 odstotkov predvsem zaradi manjše uspešnosti pri zadržanju sredstev iz doživetih polic. Znižal se je tudi obseg premij Triglav, pokojninske družbe, in sicer za 1 odstotek, kar je posledica manjših vplačil nekaterih delodajalcev zaradi povečanih negotovosti pri poslovanju ob pandemiji.

Pri zavarovanjih s kapitalizacijo izplačil smo obračunali 7 odstotkov več premije kot leto prej, skupaj 18,9 milijona evrov (7,9-odstotni delež v skupini življenjskih in pokojninskih zavarovanj). Rast je posledica prenosov sredstev od drugih zavarovalnic in večjih vplačil redne premije v matični družbi.

Nekonsolidirana obračunana kosmata zavarovalna, sozavarovalna in pozavarovalna premija zavarovalnic Skupine Triglav (brez Pozavarovalnice Triglav Re) po zavarovalnih skupinah

	Obračunana kosmata zavarovalna premija			Indeks		Delež
Zavarovalna skupina	2020	2019	2018	2020/2019	2019/2018	2020
Nezgodno zavarovanje	38.181.300	40.143.471	39.686.378	95	101	3,3 %
Zdravstveno zavarovanje	204.060.344	184.488.230	149.749.316	111	123	17,4 %
Zavarovanje avtomobilskega kaska	153.459.390	150.648.365	141.013.328	102	107	13,1 %
Ožja premoženjska zavarovanja	237.408.204	213.086.928	196.458.671	111	108	20,2 %
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	175.732.026	174.254.220	163.017.829	101	107	15,0 %
Splošno zavarovanje odgovornosti	48.408.488	48.981.728	45.614.375	99	107	4,1 %
Kreditno zavarovanje	25.453.099	29.437.207	26.807.158	86	110	2,2 %
Ostala premoženjska zavarovanja	52.465.305	49.014.062	39.442.439	107	124	4,5 %
Premoženjska zavarovanja	**935.168.156**	**890.054.211**	**801.789.494**	**105**	**111**	**79,7 %**
Življenjska zavarovanja	106.799.922	103.963.662	98.726.660	103	105	9,1 %
Življenjsko zav., vezano na enote inv. skladov*	112.206.228	116.014.370	111.706.354	97	104	9,6 %
Zavarovanje s kapitalizacijo izplačil	18.880.523	17.655.904	16.748.583	107	105	1,6 %
Življenjska in pokojninska zavarovanja	**237.886.673**	**237.633.936**	**227.181.597**	**100**	**105**	**20,3 %**
Skupaj	**1.173.054.829**	**1.127.688.147**	**1.028.971.091**	**104**	**110**	**100,0 %**

* Premija Triglav, pokojninske družbe, se po opredelitvi AZN upošteva v zavarovalni skupini življenjsko zavarovanje, vezano na enote investicijskih skladov.

Obračunana kosmata zavarovalna, sozavarovalna in pozavarovalna premija Zavarovalnice Triglav po zavarovalnih skupinah

	Obračunana kosmata zavarovalna premija			Indeks		Delež
Zavarovalna skupina	2020	2019	2018	2020/2019	2019/2018	2020
Nezgodno zavarovanje	25.696.568	26.948.216	26.173.583	95	103	3,6 %
Zdravstveno zavarovanje	926.557	728.634	692.746	127	105	0,1 %
Zavarovanje avtomobilskega kaska	127.536.357	124.555.111	118.662.442	102	105	17,7 %
Ožja premoženjska zavarovanja	188.545.816	171.195.183	157.967.652	110	108	26,2 %
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	106.754.958	102.352.357	92.416.996	104	111	14,8 %
Splošno zavarovanje odgovornosti	38.619.888	39.134.048	37.671.614	99	104	5,4 %
Kreditno zavarovanje	19.137.654	22.962.440	25.456.965	83	90	2,7 %
Ostala premoženjska zavarovanja	37.569.379	34.351.972	27.054.464	109	127	5,2 %
Premoženjska zavarovanja	**544.787.177**	**522.227.961**	**486.096.462**	**104**	**107**	**75,7 %**
Življenjska zavarovanja	79.466.230	82.300.599	81.164.340	97	101	11,0 %
Življenjsko zav., vezano na enote inv. skladov	76.121.938	79.947.507	76.201.048	95	105	10,6 %
Zavarovanje s kapitalizacijo izplačil	18.880.523	17.655.904	16.748.583	107	105	2,6 %
Življenjska in pokojninska zavarovanja	**174.468.691**	**179.904.010**	**174.113.971**	**97**	**103**	**24,3 %**
Skupaj	**719.255.868**	**702.131.971**	**660.210.433**	**102**	**106**	**100,0 %**

5.2. Metode rezerviranja pri premoženjskih zavarovanjih

Zavarovalnice morajo predvideti, koliko bodo morale izplačati v naslednjih letih. V ta namen zavarovalne pogodbe razvrstijo v segmente, ujemaj po zavarovalnih vrstah. Za pretekla leta imajo podatke o dinamiki izplačil in velikosti izplačil. Podatke razvrstijo v tabelo, ki ji rečemo razvojni trikotnik

Primer:

Leto nastanka / Leto razvoja k

	2000	2001	2002	2003	2004	2005
2000	1001	854	568	565	347	148
2001		1113	990	671	648	422
2002			1265	1168	800	744
2003				1490	1383	1007
2004					1725	1536
2005						1884

števil v 1000 EUR

Tipično se leta pretvorijo v relativna leta, leta razvoja pa v relativna leta razvoja.

Tabela se na tak način pretvori v

Leto nastanka i	Leto razvoja k 0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Tak razvojni trikotnik je tipični podatek, ki ga imajo na razpolago zavarovalnice. Manjkajoči podatki pod diagonalo so neznani zneski, ki jih bo zavarovalnica morala iz plačati v prihodnosti in za katere mora najti ustrezne ocene. Privzetek je, da bodo vzorci „razvoja" v prihodnosti „podobni" vzorcem razvoja v preteklosti. Za to nimamo jamstva, vendar tudi nimamo nobene druge možnosti. Kot matematiki, se bomo prej ali slej postavili na stališče, da so števila v razvojnem trikotniku nastala kot slučajne spremenljivke, vendar zaenkrat zaradi preprostosti tega ne bomo navedli. Pogosto bodo razvojni trikotniki podani v obliki kumulativnih škod

Leto nastanka i	Leto razvoja k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3808			
4	1725	3261				
5	1889					

Za matematično obravnavo potrebujemo ustrezne oznake. Za zneske bomo uporabili znak $Z_{i,k}$.

Tabela, torej škodni trikotnik, bo v splošnem zgledal kot

Leto nastanka i	Leto razvoja k: 0	1	....	k	....	$n-1$	n
0	$z_{0,0}$	$z_{0,1}$		$z_{0,k}$		$z_{0,n-1}$	$z_{0,n}$
1	$z_{1,0}$	$z_{1,1}$				$z_{1,n-1}$	
⋮							
i	$z_{i,0}$	$z_{i,1}$		$z_{i,k}$			
⋮							
n	$z_{n,0}$						

Podobno zgleda tabela za kumulativne škode, le da nadomestimo z s S. in pišemo $S_{i,k}$ namesto $z_{i,k}$.

Prva ideja, kako oceniti zneske pod diagonalo in s tem napovedati škode v prihodnjih letih, je ta, da so kvocienti med prvodami za vsa leta enaki.

Po definicijah bo veljalo

$$\boxed{S_{i,k} = \begin{cases} z_{i,0}, & \text{za } k = 0 \\ S_{i,k} - S_{i,k-1}, & \text{za } k \geq 1 \end{cases}}$$

in

$$\boxed{S_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} z_{i,j}.}$$

Metoda verižnja

Pri metodi verižnja definiramo razvojne faktorje kot

$$\boxed{F_{i,k} = \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$;

Na podlagi podatkov, ki jih imamo, lahko razvojne faktorje izračunamo, če je $i + k \leq n$, ker imamo podatke samo v levem zgornjem trikotniku tabele.

S tem bo veljalo

$$\boxed{S_{i,k} = S_{i,n-i} \cdot \prod_{j=n-i+1}^{k} F_{i,j}}$$

Če hočemo torej napovedati neznane $S_{i,k}$, moramo na nek način oceniti razvojne faktorje.

Privzamemo, da so razvojni faktorji podobni za vsa leta nastanka in definiramo

$$\boxed{\hat{\varphi}_k^{CL} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{k=0}^{n-k} S_{j,k-1}}}$$

Opomba: strešica nakazuje, kot je navada v statistiki, da je količina φ_k^{CL} ocenjena na podlagi podatkov. Postavimo se na stališče, da je

$$\hat{F}_{i,k} = \hat{\varphi}_k^{CL}$$

in s tem

$$\boxed{\hat{S}_{i,k}^{CL} = \underbrace{S_{i,n-i}}_{\text{znana količina}} \cdot \underbrace{\prod_{j=n-i+1}^{k} \hat{\varphi}_j^{CL}}_{\text{predvideni faktor}}}$$

Opomba: oznaka CL pomeni „chain ladder", kar v angleščini pomeni metoda veriženja.

Oglejmo si postopek na primeru.

Leto nastanka i	Leto razvoja k: 0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	4015
2	1265	2433	3233	3977	4454	4652
3	1490	2873	3880	4781	5354	5592
4	1725	3261	4333	5339	5980	6245
5	1889	3588	4768	5875	6579	6871

Primer:

$$\hat{f}_2^{CL} = \frac{2423 + 2774 + 3233 + 3880}{1855 + 2103 + 2433 + 2873}$$

$$= \frac{12.310}{9.264} \doteq 1{,}329$$

Podobno lahko izračunamo ocene za vse razvojne faktorje in dobimo

$$\hat{\varphi}_1^{CL} = 1,899$$

$$\hat{\varphi}_2^{CL} = 1,329$$

$$\hat{\varphi}_3^{CL} = 1,232$$

$$\hat{\varphi}_4^{CL} = 1,120$$

$$\hat{\varphi}_5^{CL} = 1,044$$

Po formuli za ocene $\hat{S}_{i,k}^{CL}$ lahko razvojni trikotnik dopolnimo v razvojno matriko.

<u>Primer</u>:

$$\hat{S}_{4,2}^{CL} = S_{4,1} \times \hat{\varphi}_2^{CL} = 4333$$

Kako nam to pomaga oceniti dobičkonosnost zavarovalnice v prihodnosti? Iz dopolnjenih števil lahko preberemo, koliko ocenjujemo, da bo morala zavarovalnica izplačati škod v prihodnosti. Ta ocena je v resnici rezervacija, ki jo mora narediti zavarovalnica.

Velja formula

$$\boxed{\hat{R}_i^{CL} = \hat{S}_{i,n}^{CL} - S_{i,n-i}}$$

Po definiciji je $\hat{R}_0^{CL} = 0$, ker privzamemo, da so po n letih izplačane vse škode.

V tabeli, ki jo imamo, dobimo

$$\hat{R}_0^{CL} = 0$$

$$\hat{R}_1^{CL} = 171$$

$$\hat{R}_2^{CL} = 675$$

$$\hat{R}_3^{CL} = 1712$$

$$\hat{R}_4^{CL} = 2984$$

$$\hat{R}_5^{CL} = 4982$$

Celotna rezervacija je

$$\hat{R}^{CL} = \sum_{i=0}^{n} \hat{R}_i^{CL}$$

V zgornjem primeru je

$$\hat{R}_{CL} = 10.524$$ ali

10.524.000 €.

To je torej ocena zavarovalnice, koliko škod bo morala izplačati na podlagi škod, ki so že nastale, niso pa še rešene. Izraz v angleščini je

RBNS = „reported but not settled"

Predelajmo še nekoliko formulo za razvojne faktorje $\hat{\varphi}_k^{CL}$.

$$\hat{\varphi}_k^{CL} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

$$= (*)$$

$$(*) = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} \cdot \frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} \cdot F_{j,k}$$

Označimo $w_j = \dfrac{S_{j,k-1}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$.

Velja, da je $\sum_{j=0}^{n-k} w_j = 1$

in

$$\boxed{\hat{\varphi}_k^{cl} = \sum_{j=0}^{n-k} w_j \cdot F_{j,k}}$$

Razvojni faktor je uteženo povprečje faktorjev $F_{j,k}$.

<u>Opomba</u>: Uteži mi lahko načeloma izberemo tudi drugače, le seštети se morajo v 1.

Razmišljanje o razvojnih trikotnikih bomo nekoliko posplošili.

Postavimo se na stališče, da števila v tabeli nastanejo kot slučajne spremenljivke $Z_{i,k}$ $1 \le i,k \le n$.

Multiplikativni model

Predpostavili bomo, da obstajata nabora parametrov

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$
$$\vartheta_0, \vartheta_1, \quad, \vartheta_n \quad,$$

da velja

$$\boxed{E(Z_{i,k}) = \alpha_i \cdot \vartheta_k .}$$

Pri tem je $\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$. Iz definicije sledi, da je

$$E(S_{i,n}) = E\left(\sum_{k=0}^{n} Z_{i,k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E(Z_{i,k})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_i \cdot \vartheta_k$$

$$= \alpha_i .$$

Parameter α_i lahko torej interpretiramo kot pričakovano vrednost končne škode za leto nastanka škode i.

S predpostavko, da velja

$$E(Z_{i,k}) = \alpha_i \cdot \vartheta_k$$

definiramo <u>multiplikativni model</u>. V praktičnih uporabah moramo parametre α_i in ϑ_k oceniti. Večina metod se razlikuje samo po tem, kako te parametre ocenimo. Cenilke parametrov $\hat{\alpha}_i$ in $\hat{\vartheta}_k$ v multiplikativnem modelu morajo zadoščati pogojem

$$\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\vartheta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}$$

Poleg tega mora veljati

$$\sum_{k=0}^{n} \hat{\vartheta}_k = 1 .$$

Cenilkam, ki tem pogojem ustrezajo, rečemo <u>robne cenilke</u>.

<u>Komentar</u>: Multiplikativni model je formalizacija ideje, da se škode po letih porazdelijo na enak način, torej pričakovani deleži so vedno enaki.

Če privzamemo multiplikativni model, se lahko vprašamo, kakšne so lahko cenilke $\hat{\alpha}_i$ in $\hat{\vartheta}_k$ na podlagi podatkov.

Izrek 5.1: Za vse $i = 0, 1, 2, \dots, n$ velja

$$\sum_{j=0}^{i} \hat{S}_{j,n}^{CL} = \left(\sum_{j=0}^{i} S_{j,n-i} \right) \cdot \prod_{l=n-i+1}^{n} \hat{\varphi}_l^{CL}$$

Opomba: Prazen produkt vedno interpretiramo kot 1.

Dokaz: Za $i = 1$ se trditev spremeni v $\hat{S}_{0,n}^{CL} = S_{0,n}$, kar velja po definiciji. Naprej postopamo po indukciji. Recimo, da formula velja za $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Računamo

$$\sum_{j=0}^{i+1} \hat{S}_{j,n}^{CL} = \sum_{j=0}^{i} \hat{S}_{j,n}^{CL} + \hat{S}_{i+1,n}^{CL}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{i} S_{j,n-i} \right) \cdot \prod_{l=n-i+1}^{n} \varphi_l^{CL}$$

$$+ S_{i+1,n-i+1} \cdot \prod_{n-i}^{n} \varphi_l^{CL}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{i} S_{j,n-i-1}\right)\hat{\varphi}_{n-i}^{CL}}_{\substack{\text{po definiciji} \\ \hat{\varphi}_{n-1}^{CL}}} \cdot \prod_{l=n-i+1}^{n} \hat{\varphi}_{l}^{CL}$$

$$+ \; S_{i+1,n-i+1} \cdot \prod_{l=n-i}^{n} \hat{\varphi}_{l}^{CL}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{i+1} S_{j,n-i-1}\right) \cdot \prod_{l=n-i}^{n} \hat{\varphi}_{l}^{CL}$$

S tem je indukcijski korak zaključen. Trditev velja za vse i.

<u>Izrek 5.2</u>: Predpostavimo multiplikativni model za slučajne spremenljivke $Z_{i,k}$, $1 \leq i,k \leq n$. Naj bosta $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\vartheta}_k$ družini robnih cenilk. Potem velja

$$\hat{\alpha}_i = \hat{S}_{i,n}^{CL}$$

in

$$\hat{\vartheta}_k = \begin{cases} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\varphi_l^{CL}} & \text{za } k = 0 \\ \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\varphi_l^{CL}} - \prod_{l=k}^{n} \frac{1}{\varphi_l^{CL}} & \text{sicer.} \end{cases}$$

<u>Komentar</u>: Izrek nam pove, da predpostavke multiplikativnega modela nujno vodijo do metode veriženja.

<u>Dokaz</u>: Najprej opazimo, da je

$$\hat{\alpha}_0 = \sum_{k=0}^{n} Z_{0,k} = S_{0,n} = \hat{S}_{0,n}^{CL}$$

po definiciji. Po definiciji je tudi

$$Z_{0,n} = \hat{\alpha}_0 \cdot \hat{\vartheta}_n \,, \text{ torej}$$

$$\hat{\vartheta}_n = \frac{Z_{0,n}}{\hat{\alpha}_0}$$

$$= (*)$$

$$(*) = \frac{Z_{0,n}}{\hat{S}^{CL}_{0,n}}$$

$$= \frac{S_{0,n} - S_{0,n-1}}{\hat{S}^{CL}_{0,n}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\hat{\varphi}^{CL}_n}$$

Formula torej velja za par $(\hat{\alpha}_0, \hat{\vartheta}_n)$. Naprej bomo šli z indukcijo iz desnega zgornjega kota matrike $(\hat{\alpha}_i, \hat{\vartheta}_j)$.

Privzemimo, da formule veljajo za pare $(\hat{\alpha}_u, \hat{\vartheta}_v)$ za $1 \leq u \leq i-1$ in $n-i+1 \leq v \leq n$.

Privzetek pomeni, da je

$$\hat{\alpha}_j = \hat{S}^{CL}_{j,n}$$

in

$$\hat{\vartheta}_{n-j} = \prod_{l=n-j+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}} - \prod_{l=n-j}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}$$

za $0 \le j \le i-1$. Velja

$$1 - \sum_{k=n-i+1}^{n} \hat{\vartheta}_k = \prod_{l=n-i+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}$$

Razlaga: to sledi iz indukcijske predpostavke in preprostega dejstva, da je

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_0) + a_0$$

Po definiciji je

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}}{\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\vartheta}_k}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}}{1 - \sum_{k=n-i+1}^{n} \hat{\vartheta}_k}$$

$$= S_{i,n-i} \cdot \prod_{l=n-i+1}^{n} \hat{\varphi}_l^{CL}$$

$$\overset{(\text{def.})}{=} \hat{S}_{i,n}^{CL}$$

Trditev izreka torej drži za $\hat{\alpha}_i$.

$$\hat{\vartheta}_{n-i} \overset{(\text{def})}{=} \frac{\sum_{j=0}^{i} Z_{j,n-i}}{\sum_{j=0}^{i} \hat{\alpha}_j}$$

$$\overset{(\text{ind})}{=} \frac{\sum_{j=0}^{i} Z_{j,n-i}}{\sum_{j=0}^{i} \hat{S}_{j,n}^{CL}}$$

$$= (*)$$

$$(*) = \frac{\sum_{j=0}^{i} S_{j,n-i} - \sum_{j=0}^{i} S_{j,n-i-1}}{\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{i} S_{j,n-i}\right) \cdot \prod_{l=n-i+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}}_{\text{Izrek 5.1}}}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\hat{\varphi}_{n-i}^{CL}}\right)}_{\text{definicija}} \cdot \prod_{l=n-i+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}$$

$$= \prod_{l=n-i+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}} - \prod_{l=n-i}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}$$

Po definiciji je

$$\hat{\vartheta}_0 = \frac{\sum_{j=0}^{n} Z_{j,0}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\alpha}_j} \overset{(ind)}{=} \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,0}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{S}_{j,n}^{CL}}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,0}}{\left(\sum_{j=0}^{n} S_{j,0}\right) \prod_{e=1}^{n} \hat{\varphi}_e^{CL}}$$

$$= \prod_{e=1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_e^{CL}}.$$

S tem so indukcijski koraki končani.

<u>Sklep</u>: Če postavimo razumno zahtevo v kakršnemkoli modelu, da je $E(Z_{i,j}) = \alpha_i \cdot \vartheta_k$, potem so robne cenilke vedno enake, ne glede na predpostavke o porazdelitvah $Z_{i,j}$.

Opomba: Izrek 5.2 velja tudi v obratni smeri. Najboljše cenilke so robne cenilke.

Primer: Predpostavimo recimo lahko, da so $Z_{i,k}$ med sabo neodvisne in Poissonovo porazdeljene z $Z_{i,k} \sim Po(\alpha_i \cdot \vartheta_k)$. Vemo, da je v tem primeru

$E(Z_{i,k}) = \alpha_i \cdot \vartheta_k$, torej imamo

pred sabo multiplikativni model. Kakšne možnosti imamo, da ocenimo parametre. Eno možnost poznamo iz statistike – metodo največjega verjetja. Opazovane vrednosti, torej podatki ki jih vidimo, so

$z_{i,k}$ za $i+k \leq n$. Kako bi ocenili parametre α_i in ϑ_k?

Statistika nam nudi več možnosti. Ena od boljših možnosti za ocenjevanje parametrov je metoda največjega verjetja.

<u>Izrek 5.3</u>: V Poissonovem modelu so cenilke po metodi največjega verjetja robne cenilke.

<u>Dokaz</u>: Najprej moramo zapisati funkcijo verjetja. Velja

$$L(\underline{\alpha}, \underline{\vartheta} \mid \underline{z})$$

$$= P(Z_{i,k} = z_{i,k},\ 1 \leq i,k \leq n,\ i+k \leq n)$$

(neodvisnost)

$$= \prod_{\substack{1 \leq i,k \leq n \\ i+k \leq n}} P(Z_{i,k} = z_{i,k})$$

$$= \prod_{\substack{1 \le i,k \le n \\ i+k \le n}} \frac{e^{-\alpha_i \vartheta_k} (\alpha_i \vartheta_k)^{z_{i,k}}}{z_{i,k}!}$$

Logaritmiramo in dobimo

$$\ell(\underline{\alpha}, \underline{\vartheta} \mid \underline{z})$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i,k \le n \\ i+k \le n}} \Big(-\alpha_i \vartheta_k + z_{i,k} (\log \alpha_i + \log \vartheta_k) - \log (z_{i,k}!) \Big)$$

Funkcijo verjetja moramo maksimizirati pri pogoju $\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$.

Uporabimo Lagrangeovo metodo. Sestavimo funkcijo

$$F(\underline{\alpha}, \underline{\vartheta}) = \ell(\underline{\alpha}, \underline{\vartheta} \mid \underline{z}) - \lambda \left(\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k - 1 \right)$$

Izračunamo vse parcialne odvode.

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \sum_{k=0}^{n-i} \left(-\vartheta_k + z_{i,k} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_k} = \sum_{i=0}^{n-k} \left(-\alpha_i + z_{i,k} \cdot \frac{1}{\vartheta_k} \right) - \lambda = 0$$

Iz prve enačbe sledi po množenju z α_i, da je

$$\sum_{k=0}^{n-i} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}$$

Iz druge enačbe sledi po množenju z ϑ_k

$$\sum_{i=0}^{n-i} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{i=0}^{n-k} z_{i,k} - \lambda \vartheta_k$$

Seštejmo enačbe po vseh k in zamenjajmo vrstni red seštevanja. Dobimo

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-i} \alpha_i \vartheta_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} z_{i,k} - \lambda \,,$$

torej

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k} - \lambda \,.$$

Zaradi prvega nabora enačb sta dvojni vsoti enaki, zato je $\lambda = 0$. Trditev izreka sledi.

<u>Opomba</u>: Ker je model multiplikativen in so ocenilke po metodi največjega verjetja robne, so take iz izreka 5.2.

Oglejmo si še multinomski model.

Za slučajne spremenljivke $Z_{i,k}$ predpostavljamo, da so nenegativne celoštevilske.

Predpostavljamo, da so vrstice med sabo neodvisne in velja

$$Z_{i,0}, Z_{i,1}, \ldots Z_{i,n} + S_{i,n} = s$$

$$\text{Multinom}(s, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$$

za vse $i = 0, 1, \ldots, n$, kjer je $\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$. Iz Verjetnosti vemo, da je za

$$(X_1, \ldots, X_r) \sim \text{Multinom}(s, p_1, \ldots, p_r)$$

$$E(X_k) = s \cdot p_k.$$

Prepričajmo se, da je multinomski model tudi multiplikativen.

Označimo $\alpha_i = E(S_{i,n})$.

Iz formule za popolno pričakovano vrednost sledi

$$E(Z_{i,k}) = \sum_{s=0}^{\infty} E(Z_{i,k} \mid S_{i,k} = s) \cdot P(S_{i,k} = s)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} s \cdot \vartheta_k \, P(S_{i,k} = s)$$

$$= \alpha_i \cdot \vartheta_k .$$

<u>Zgled 5.4</u>: Privzemimo, da velja $S_{i,n} \sim \text{NegBin}(\beta_i, \eta_i)$. V tem primeru so MLE cenilke $\hat{\alpha}_i$ in $\hat{\vartheta}_k$ robne cenilke.

Opomba: Tukaj je omišljena nekoliko drugačna negativna binomska porazdelitev kot pri verjetnosti. Za $\beta > 0$ in $\eta \in (0,1)$ je

$$P(X=k) = \binom{\beta+k-1}{k}(1-\eta)^{\beta}\cdot \eta^{k}$$

za $k = 0, 1, \ldots\ldots$

Dokaz: Potrebujemo dejstvo iz verjetnosti. Če je

$$(X_1, X_2, \ldots, X_r) \sim \mathrm{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_r),$$

je za $k_1, k_2, \ldots, k_s \geq 0$, $k_1 + \ldots + k_s \leq n$ za $s < r$, je

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_s = k_s)$$

$$= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_s! \, (n-k_1- \ldots -k_s)!} \times$$

$$\times \; p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} (1 - p_1 - \ldots - p_s)^{n - k_1 - \ldots - k_s}$$

Izračunati moramo

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n-i} \{ Z_{i,k} = z_{i,k} \} \right)$$

$$= \sum_{\substack{s \\ s = \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}}}^{\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n-i} \{ Z_{i,k} = z_{i,k} \} \,\middle|\, S_{i,n} = s \right) \times P(S_{i,n} = s)$$

$$= \sum_{s = \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}}^{\infty} \frac{s!}{z_{i,0}! \cdots z_{i,n-i}! \, (s - z_{i,0} - \ldots - z_{i,n-i})!} \, \vartheta_0^{z_{i,0}} \cdots \vartheta_{n-i}^{z_{i,n-i}} (1 - \vartheta_0 - \ldots - \vartheta_{n-i})^{s - z_{i,0} - \ldots - z_{i,n-i}} \cdot P(S_{i,n} = s)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-i} \frac{1}{z_{i,k}!} \vartheta_0^{z_{i,0}} \cdots \vartheta_{n-i}^{z_{i,n-i}} \times$$

$$\times \sum_{s=\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}} \frac{\cancel{s}!}{(s - z_{i,0} - - z_{i,n-i})!} \times$$

$$\times \left(1 - \vartheta_0 - - \vartheta_{n-i}\right)^{s - z_{i,0} - - z_{i,n-i}}$$

$$\times \frac{\Gamma(\beta + s)}{\Gamma(\beta) \cdot \cancel{s!}}$$

$$\times (1-\eta_i)^{\beta_i} \eta^{s}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-i} \frac{1}{z_{i,k}!} \vartheta_0^{z_{i,0}} \cdots \vartheta_{n-i}^{z_{i,n-i}} (1-\eta_i)^{\beta_i}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(1 - \vartheta_0 - - \vartheta_{n-i}\right)^{l}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k} + l\right)}{\Gamma(\beta_i)}$$

$$\times \eta_i^{\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,n-i} + l}$$

$$= (*)$$

Izračunati moramo

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \Gamma(b+l)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \int_0^{\infty} u^{b+l-1} e^{-u} du$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l \cdot u^{b+l-1}}{l!} e^{-u} du$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u^{b-1} \cdot e^{xu} \cdot e^{-u} du$$

$$= \int_0^{\infty} u^{b-1} \cdot e^{-u(1-x)} du$$

Nova spv: $u(1-x) = v$

$du = \frac{dv}{1-x}$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{1-x}\right)^{b-1} e^{-v} \cdot \frac{dv}{1-x}$$

$$= (1-x)^{-b} \Gamma(b)$$

$$(*) = \prod_{k=0}^{n-i} \frac{1}{z_{i,k}!} \vartheta_0^{z_{i,0}} \cdots \vartheta_{n-i}^{z_{i,n-i}}$$

$$(1-\eta_i)^{\beta_i} \times \eta_i^{\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}}$$

$$\times \left(1 - \eta_i (1 - \vartheta_0 - \cdots - \vartheta_{n-i})\right)^{-\beta_i - \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}}$$

$$\frac{\Gamma\left(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}\right)}{\Gamma(\beta_i)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}\right)}{\Gamma(\beta_i) \prod_{k=0}^{n-i} z_{i,k}!} \times$$

$$\times \left(\frac{1-\eta_i}{1 - \eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{\beta_i}$$

$$\times \prod_{k=0}^{n-i} \left(\frac{\eta_i \cdot \vartheta_k}{1 - \eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \cdot \vartheta_l} \right)^{z_{i,k}}$$

$$= l_i$$

Potrebujemo še $E(S_{i,n})$. 17

Analize 1 vemo, da za $|x| < 1$ velja

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$$

z $$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

Sledi

$$(1-x)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-k+1)}{k!} (-x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} x^k$$

Odvajamo in sledi

$$a(1-x)^{-a-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{a+k-1}{k} x^k$$

Računamo

$$E(S_{i,n}) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{\beta_i + k - 1}{k} (1-\eta_i)^{\beta_i} \eta_i^{k}$$

$$= \eta_i \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{\beta_i + k - 1}{k} (1-\eta_i)^{\beta} \eta_i^{k-1}$$

$$= \eta_i (1-\eta_i)^{\beta} \cdot \beta_i \cdot (1-\eta_i)^{-\beta_i - 1}$$

$$= \frac{\beta_i \eta_i}{1-\eta_i}$$

$$= \alpha_i$$

Logaritamska funkcija vjerojatnosti je

$$l(\underline{\beta}, \underline{\eta}, \underline{\omega} \mid \underline{z})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} l_i(\beta_i, \eta_i, \underline{\omega} \mid \underline{z})$$

Logaritmiramo in dobimo

$$\sum_{i=0}^{n} \log\Gamma\left(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}\right) - \sum_{i=0}^{n} \log\Gamma(\beta_i) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i} \log(z_{i,k}!)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \beta_i \log(1-\eta_i)$$

$$- \sum_{i=0}^{n} \beta_i \log\left(1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l\right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}\left[\left(\log \eta_i + \log \vartheta_k\right) - \log\left(1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l\right)\right]$$

To funkcijo moramo maksimizirati po β, η in $\underline{\vartheta}$ pri stranskem pogoju $\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$. Uporabimo Lagrangeovo metodo. Najprej odvajamo po η_i.

Odvajamo po η_i in dobimo

$$-\frac{\beta_i}{1-\eta_i} - \frac{\beta_i\left(-1+\sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l\right)}{1-\eta_i+\sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}\left(\frac{1}{\eta_i} - \frac{-1+\sum_{l=0}^{n-i}\vartheta_l}{1-\eta_i+\sum_{l=0}^{n-i}\eta_i\vartheta_l}\right)$$

$$= 0$$

Izraz v drugem oklepaju se poenostavi v $\frac{1}{\eta_i\left(1-\eta_i+\sum_{l=0}^{n-i}\eta_i\vartheta_l\right)}$

Množimo levo in desno izraz enačbe z imenovalcem in dobimo

$$-\frac{\beta_i \cdot \eta_i\left(1-\eta_i+\sum_{l=0}^{n-i}\eta_i\vartheta_l\right)}{1-\eta_i}$$

$$+\beta_i\eta_i\left(-1+\sum_{l=0}^{n-i}\vartheta_l\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k} = 0$$

Upoštevamo, da je $\alpha_i = \dfrac{\beta_i \cdot \eta_i}{1-\eta_i}$.

Sledi

$$-\alpha_i \left(1-\eta_i+\sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_k\right)$$

$$-(1-\eta_i)\alpha_i \left(-1+\sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k} = 0$$

Prepišemo v

$$\alpha_i \Big[1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_k$$

$$+ (1-\eta_i)\left(-1+\sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l\right)\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k}$$

Izraz v oglatem oklepaju se poenostavi v

$$\alpha_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l = \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k} \quad \checkmark$$

Drugi nabor robnih enačb je nekoliko težje izpeljati. Morda bo to seminarska naloga.

Mackove predpostavke in cenilke

Ko računamo rezervacije v razvojnih trikotnikih, se vprašamo tudi o natančnost ocen rezervacij. V statistiki je tipična količina standardni odklon. Zaželeno je tudi, da so predpostavke o porazdelitvah čim preprostejše.

Postavimo se na stališče, da so $Z_{i,j}$ in $S_{i,j}$ slučajne spremenljivke. Mack je postavil naslednje preproste pogoje:

(i) $E[S_{i,k+1} \mid S_{i,1}, \ldots S_{i,k}] = S_{i,k} \cdot f_k$

za faktorje $f_1, f_2, \ldots, f_{I-1}$.

<u>Opomba</u>: Pri Macku bomo predložili na število let od $i=1$ do $i=I$.

(ii) Za $i \neq j$ so vektorji

$\{S_{i,1}, \dots, S_{i,I}\}$ in

$\{S_{j,1}, \dots, S_{j,I}\}$ neodvisni.

(iii) velja

$$\text{var}(S_{i,k+1} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,k}) = S_{i,k} \cdot \sigma_k^2$$

za konstante $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{I-1}^2$.

<u>komentar</u>: predpostavka (i) je vsekakor smiselna. Neodvisnost je tudi smiselna predpostavka, če se ne spreminjajo pogoji poslovanja. Tudi predpostavka (iii) je smiselna, saj negotovost naslednje napovedi ne narašča, ~~ko se približujemo~~ proporcionalno z $S_{i,k}$.

Predpostavimo, da bomo faktorje $f_0, f_1, \dots, f_{I-1}$ ocenili kot pri metodi veriženja, torej

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}}.$$

Zaradi preglednosti, bomo krajše pisali pogojne pričakovane vrednosti $E(\cdot \mid S_{i,j},\ i+j \leq I+1)$ kot $E(\cdot \mid \mathcal{D})$.

__Izrek 5.5__: Predpostavimo, da so izpolnjene predpostavke (i), (ii) in (iii). Velja

$$E(S_{iI} \mid \mathcal{D}) = S_{i,I-i+1} \cdot f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}$$

__Komentar__: Rezultat je smiseln in v bistvu pove, da nas Mackove predpostavke pripeljejo do metode veriženja.

Dokaz: Uporabimo naslednje dejstvo iz Stohastičnih procesov 1: če je Y neodvisna od (X, Z), je

$$E[Z \mid X, Y] = E(Z \mid X).$$

Enako velja, če je $\underline{Y}$ slučajni vektor.

Iz zgornjega sledi, da je

$$E(C_{i,I} \mid D)$$

(lastnost pog. pričak. vr. zgoraj)

$$= E[C_{i,I} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,I+1-i}]$$

$$= E\Big[E[C_{i,I} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,I-1}] \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,I+1-i}\Big]$$

(stolpična lastnost)

$$= E[f_{I-1} C_{i,I-1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,I+1-i}]$$

$$= f_{I-1} E[C_{i,I-1} \mid C_{i,1}, \dots C_{i,I+1-i}]$$

- Razmislek lahko iteriramo in „pridelamo" produkt v izreku.

Mackove predpostavke vodijo še do ene nenavadne posledice.

<u>Izrek 5.6</u>: Naj bodo

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}}$$

cenilke razvojnih faktorjev po metodi veriženja. Cenilke $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_{I-1}$ so nepristranske in nekorelirane.

<u>Dokaz</u>: Označimo pogojne pričakovane vrednosti

$$E[\,\cdot \mid S_{i,j},\ j \leq k,\ i+j \leq I+1]$$

z $E[\,\cdot \mid B_k]$. Zaradi predpostavke o neodvisnosti je

$$E[\hat{f}_k \mid B_k] = \frac{\sum_{j=1}^{I-k} E[S_{j,k+1} \mid B_k]}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}}$$

Uporabili smo eno od lastnosti pogojnih pričakovanih vrednosti.

Po drugi strani zaradi neodvisnosti v predpostavki (ii) dobimo

$$E[S_{j,k+1} \mid B_k]$$

$$= E[S_{j,k+1} \mid S_{j,1}, \ldots, S_{j,k}]$$

$$= f_k \cdot S_{j,k}$$

Sledi $E[\hat{f}_k \mid B_k] = f_k$, kar posledično pomeni $E[\hat{f}_k] = f_k$.

Za nekoreliranost privzemimo $j < k$.

Računamo

$$E[\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k] = E[\,E[\hat{f}_j \hat{f}_k \mid B_k]\,]$$

$$= E[\hat{f}_j \, E[\hat{f}_k \mid B_k]]$$

$$= E[\hat{f}_j \cdot f_k]$$

$$= E[\hat{f}_j] \cdot f_k$$

$$= f_j \cdot f_k$$

Opomba: Z iteracijo zgornjega razmisleka dobimo še, da je

$$E[\hat{f}_{I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+2-i} \cdots \hat{f}_{I-1}]$$

$$= f_{I+i-1} \cdot \cdots f_{I-1}.$$

V okviru Mackovih predpostavk to pomeni, da je

$$\hat{S}_{i,I} = S_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}$$

nepristranska cenilka $S_{i,I}$ in posledično $\hat{R}_i = \hat{S}_{i,I} - S_{i,I+1-i}$ nepristranska cenilka rezervacij.

Ostane še to, da najdemo cenilke za σ_k^2 in poskusimo najti formule za standardne napake $\hat{R}_i$ in $\hat{R} = \hat{R}_1 + \quad + \hat{R}_I$.

Izrek 5.7 : Za $1 \leq k \leq I-2$ je

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} S_{ik} \left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2$$

nepristranska cenilka $\hat{\sigma}_k^2$.

Komentar : Zgornje je analogija iz statistike. Če so $X_1, X_2, \ldots X_n$ opazovane vrednosti, je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2$$

nepristranska cenilka $\sigma^2 = \operatorname{var}(X_1)$.

Dokaz : Izračunajmo

$$E\left[\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \mid B_k \right]$$

$$= E\left[\frac{S_{i,k+1}^2}{S_{i,k}^2} \mid B_k \right]$$

$$- 2E\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} \cdot \hat{f}_k \mid B_k \right)$$

$$+ E\left[\hat{f}_k^2 \mid B_k \right]$$

(nadaljuje)

Dokaz: Izračunati moramo

$$E\left[S_{ik} \left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \right]$$

Pot bo šla čez

$$E\left[\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \Big| \mathcal{B}_k \right]$$

Dejstva iz stohastičnih procesov:

(i) $\operatorname{var}(X \mid \underline{Y}) = E(X^2 \mid \underline{Y}) - E(X \mid \underline{Y})^2$

Če je $E(X \mid \underline{Y}) = 0$, je

$$\operatorname{var}(X \mid \underline{Y}) = E(X^2 \mid \underline{Y})$$

(ii) $\operatorname{var}(X_1 + X_2 \mid \underline{Y}) =$

$$\operatorname{var}(X_1 \mid \underline{Y}) + \operatorname{var}(X_2 \mid \underline{Y}) + 2 \operatorname{cov}(X_1, X_2 \mid \underline{Y})$$

(iii) če sta $(Y_1, \underline{X}_1)$ in $(Y_2, \underline{X}_2)$ neodvisna, je

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2 \mid \underline{X}_1, \underline{X}_2) = 0$$

(iv) če so $(Y_1, \underline{x}_1)$, $(Y_2, \underline{x}_2)$ in $\underline{z}$ neodvisni, je

$$E(Y_1 Y_2 \mid \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{z})$$

$$= E(Y_1 \mid \underline{x}_1) \cdot E(Y_2 \mid \underline{x}_2)$$

Opazimo, da je

$$E\left[\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \mid B_k\right]$$

$$= f_k - E[\hat{f}_k \mid B_k]$$

$$= f_k - f_k$$

$$= 0$$

Sledi, da je

$$E\left[\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k\right)^2 \mid B_k\right]$$

$$= \operatorname{var}\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \mid B_k\right)$$

$$= \operatorname{var}\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} \,\Big|\, B_k\right)$$

$$+ \operatorname{var}\left(\hat{f}_k \mid B_k\right)$$

$$- 2 \operatorname{cov}\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}}, \hat{f}_k \,\Big|\, B_k\right)$$

Računamo po vrst.:

$$\operatorname{var}\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} \,\Big|\, B_k\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k}^2} \operatorname{var}\left(S_{i,k+1} \mid B_k\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k}^2} \operatorname{var}\left(S_{i,k+1} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,k}\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k}^2} \sigma_k^2 \cdot S_{i,k}$$

$$= \sigma_k^2 / S_{i,k}$$

$var(\hat{f}_k \mid B_k)$

$$= var\left(\frac{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}} \mid B_k \right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}\right)^2} var\left(\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k+1} \mid B_k\right)$$

Opertimo

$$cov(S_{j',k+1}, S_{j,k+1} \mid B_k) = 0$$

$$E[S_{j',k+1} S_{j,k+1} \mid B_k]$$

$$= E(S_{j',k+1} \mid S_{j',1}, \ldots, S_{j',k})$$

$$\cdot E(S_{j,k+1} \mid S_{j,1} \ldots S_{j,k})$$

$$= f_{j'} \cdot f_j \cdot S_{j',k} \cdot S_{j,k}$$

(last west (iv))

Nadalje imamo

$$\mathrm{var}(\hat{f}_k \mid B_k)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}\right)^2} \sum_{j=1}^{I-k} \sigma_k^2 \cdot S_{j,k}$$

$$= \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}}$$

Računamo

$$\mathrm{cov}\left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}}, \hat{f}_k \mid B_k\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k}} \mathrm{cov}\left(S_{i,k+1}, \hat{f}_k \mid B_k\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k}} \mathrm{cov}\left(S_{i,k+1}, \frac{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}} \mid B_k\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k} \cdot \sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}}$$

$$\mathrm{cov}\left(S_{i,k+1}, S_{i,k+1} \mid B_k\right)$$

$$= \frac{1}{S_{i,k} \cdot \sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}} \cdot \mathrm{var}\left(S_{i,k+1} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,k}\right)$$

$$= \frac{\sigma_k^2 \cdot S_{i,k}}{S_{i,k} \sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}}$$

$$= \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}}$$

končno je

$$E\left[S_{i,k} \left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \right]$$

$$= E\left[E\left[S_{i,k} \left(\frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \mid \mathcal{B}_k \right]\right]$$

$$= E\left[S_{i,k} \cdot \left(\frac{\sigma_k^2}{S_{i,k}} + \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}} - 2 \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}} \right) \right]$$

$$= E\left[\sigma_k^2 + \frac{\sigma_k^2 \cdot S_{i,k}}{\sum_{j=1}^{I-k} S_{j,k}} \right]$$

Seštejemo od $i = 1$ do $I - k$ in sledi

$$E[\hat{\sigma}_k^2] = (I-k)\sigma_k^2 - \sigma_k^2$$

$$= (I-k-1)\sigma_k^2$$

Za oceno σ^2_{I-1} upoštevamo, da v praksi tipično $\sigma^2_1, \dots, \sigma^2_{I-1}$ eksponentno padajo. Zahtevamo lahko

$$\frac{\hat\sigma_{I-3}}{\hat\sigma_{I-2}} = \frac{\hat\sigma_{I-2}}{\hat\sigma_{I-1}}.$$

Če je $\hat f_{I-1} = 1$, je $\sigma^2_{I-1} = 0$, kar smo „zanemarili". Če je $\hat\sigma^2_{I-3} > \hat\sigma^2_{I-2}$ je zgornje smiselno. Če ne, pa vzamemo manjšega od $\hat\sigma_{I-3}$ in $\hat\sigma_{I-2}$. Na koncu je

$$\hat\sigma^2_{I-1} = \min\left(\frac{\sigma^4_{I-2}}{\sigma^2_{I-3}}, \min(\sigma^2_{I-3}, \sigma^2_{I-2})\right).$$

<u>Opomba</u>: Ta ocena ni več nujno nepristranska.

Na koncu nas zanima ocena

$$\operatorname{var}(\hat{R}_i - R_i \mid D) \quad \text{in}$$

$$\operatorname{var}(\hat{R}_1 + \cdots + \hat{R}_I \mid D)$$

Ti dve količini povesta napako.

<u>Izrek 5.8</u>: Ocena variance $\operatorname{var}(\hat{R}_i - R_i \mid D)$ je

$$\widehat{\operatorname{var}}(\hat{R}_i - R_i \mid D) = \hat{C}_{i,I}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \right),$$

kjer je $\hat{C}_{i,I}$ cenilka po metodi veriženja in $\hat{C}_{i,I+i-1} = C_{i,I+i-1}$.

Lösung 5.4 : Poggio-variance

$\widehat{\mathrm{var}}(\hat{R} \mid D)$ berechnen:

$$\widehat{\mathrm{var}}(\hat{R} \mid D) = \sum_{i=2}^{I} \Big\{ \widehat{\mathrm{var}}(\hat{R}_i \mid D) + \hat{S}_{iI} \Big(\sum_{j=i+1}^{I} \hat{S}_{jI} \Big) \times \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} S_{n,k}} \Big\}$$

DISTRIBUTION-FREE CALCULATION OF THE STANDARD ERROR OF CHAIN LADDER RESERVE ESTIMATES

BY THOMAS MACK

Munich Re, Munich

ABSTRACT

A distribution-free formula for the standard error of chain ladder reserve estimates is derived and compared to the results of some parametric methods using a numerical example.

KEYWORDS

Claims reserving; chain ladder; standard error.

1. INTRODUCTION

The chain ladder method is probably the most popular method for estimating IBNR claims reserves. The main reason for this is its simplicity and the fact that it is distribution-free, i.e. that it seems to work with almost no assumptions. On the other hand, it is well-known that chain ladder reserve estimates for the most recent accident years are very sensitive to variations in the data observed. Moreover, in recent years many other claims reserving procedures have been proposed and the results of all these procedures vary widely and also differ more or less from the chain ladder result. Therefore it would be very helpful to know the standard error of the chain ladder reserve estimates as a measure of the uncertainty contained in the data and in order to see whether the difference between the results of the chain ladder method and any other method is significant or not.

Up to now only a few papers on claims reserving have been published which also consider the calculation of the standard error of the reserve estimate: In the papers by TAYLOR/ASHE 1983, ZEHNWIRTH 1985, RENSHAW 1989, CHRISTOFIDES 1990, VERRALL 1990, VERRALL 1991 essentially the same method for the calculation of the standard error is used, namely a least squares regression approach which (with the exception of Taylor/Ashe) is applied to the logarithms of the incremental claims amounts (i.e. assuming a lognormal distribution). Slightly different approaches have been proposed by WRIGHT (1990, via a generalized linear model and the method of scoring) and MACK (1991, using a gamma distribution and maximum likelihood estimation). All methods cited require a rather high amount of programming in order to calculate the many covariances between the parameter estimators.

In the present paper, a very simple formula for the standard error of chain ladder reserve estimates is developed. The decisive step towards this formula was made by SCHNIEPER (1991). In order to calculate the rate for a casualty excess of loss cover he used a mixture of the Bornhuetter-Ferguson technique and the chain ladder method. Within this model he developed an approximation to the standard error of the estimated premium rate using a Taylor series approximation.

The present paper adapts Schnieper's idea to the claims reserving situation and contains the following additional points:

1. The model is specialized for the pure chain ladder case. This makes things easier and also makes it possible to replace the Taylor series approximation with a more exact procedure.
2. An estimate of the process variance is additionally included in the standard error of the reserve estimate. This is necessary here because the claims reserve is a random variable and not a parameter like the net premium (= expected value).
3. Schnieper intuitively claimed that the chain ladder development factors were "not strongly correlated". We prove that they are in fact uncorrelated and that therefore the reserve estimate is unbiased.
4. Besides the standard error for each accident year, a formula for the standard error of the overall reserve estimator is given, too, which takes the correlations between the estimates for the individual accident years into account.

Finally, two numerical examples are given and the results are compared to the results obtained by the aforementioned methods of Taylor/Ashe, Zehnwirth, Renshaw/Christofides, Verrall and Mack.

2. NOTATIONS AND BASIC RESULTS

Let C_{ik} denote the accumulated total claims amount of accident year i, $1 \le i \le I$, either paid or incurred up to development year k, $1 \le k \le I$. We consider C_{ik} a random variable of which we have an observation if $i+k \le I+1$ (run-off triangle). The aim is to estimate the ultimate claims amount C_{iI} and the outstanding claims reserve

$$R_i = C_{iI} - C_{i,\,I+1-i}$$

for accident year $i = 2, \ldots, I$.

The basic chain ladder assumption is that there are development factors $f_1, \ldots, f_{I-1} > 0$ with

$$E(C_{i,\,k+1} | C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik} f_k, \quad 1 \le i \le I, \; 1 \le k \le I-1. \tag{1}$$

The chain ladder method consists of estimating the f_k by

$$\hat{f}_k = \sum_{j=1}^{I-k} C_{j,\,k+1} \Big/ \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}, \qquad 1 \le k \le I-1,$$

and the ultimate claims amount C_{iI} by

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,\,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1},$$

or equivalently the reserve R_i by

$$\hat{R}_i = C_{i,\,I+1-i}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1).$$

Because the chain ladder algorithm does not take into account any dependencies between accident years, we can additionally assume that the variables C_{ik} of different accident years, i.e.

(2) $\{C_{i1}, \ldots, C_{iI}\}, \{C_{j1}, \ldots, C_{jI}\}, \ i \neq j$, are independent.

This must be regarded as a further implicit assumption of the chain ladder method. In practise, the independence of the accident years can be distorted by certain calendar year effects like major changes in claims handling or in case reserving.

The following theorem makes it clear that (1) and (2) are indeed the implicit assumptions of the chain ladder method.

Theorem 1: Let $D = \{C_{ik} | i + k \leq I + 1\}$ be the set of all data observed so far. Under the assumptions (1) and (2) we have

$$E(C_{iI}|D) = C_{i,\,I+1-i} f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}.$$

Proof: We use the abbreviation

$$E_i(X) = E(X|C_{i1}, \ldots, C_{i,\,I+1-i}).$$

Then (2) and repeated application of (1) yield

$$\begin{aligned} E(C_{iI}|D) &= E_i(C_{iI}) \\ &= E_i(E(C_{iI}|C_{i1}, \ldots, C_{i,\,I-1})) \\ &= E_i(C_{i,\,I-1} f_{I-1}) \\ &= E_i(C_{i,\,I-1}) f_{I-1} \\ &= \text{etc.} \\ &= E_i(C_{i,\,I+1-i}) f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} \\ &= C_{i,\,I+1-i} f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}. \end{aligned}$$

□

This theorem shows that the estimator $\hat{C}_{iI}$ has the same form as $E(C_{iI}|D)$ which is the best forecast of C_{iI} based on the observations D. The next theorem shows that estimating $f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}$ by $\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}$ is indeed a reasonable procedure.

Theorem 2: Under the assumptions (1) and (2) the estimators $\hat{f}_k$, $1 \leq k \leq I-1$, are unbiased and uncorrelated.

Proof: Let

$$B_k = \{C_{ij} | j \le k,\ i+j \le I+1\},\ 1 \le k \le I.$$

Then (2) and (1) yield

$$E(C_{i,k+1}|B_k) = E(C_{i,k+1}|C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik}f_k.$$

We therefore have

$$E(\hat{f}_k|B_k) = \sum_{j=1}^{I-k} E(C_{j,k+1}|B_k) \Big/ \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} = f_k,$$

which immediately gives the unbiasedness

$$E(\hat{f}_k) = E(E(\hat{f}_k|B_k)) = f_k,\ 1 \le k \le I-1,$$

of the parameter estimates. Also, the $\hat{f}_k$ are uncorrelated because for $j < k$

$$\begin{aligned} E(\hat{f}_j\hat{f}_k) &= E(E(\hat{f}_j\hat{f}_k|B_k)) \\ &= E(\hat{f}_j E(\hat{f}_k|B_k)) \\ &= E(\hat{f}_j) f_k \\ &= E(\hat{f}_j)\, E(\hat{f}_k). \end{aligned}$$ □

The uncorrelatedness of the $\hat{f}_k$'s is surprising because $\hat{f}_{k-1}$ and $\hat{f}_k$ depend on the same data $C_{1k} + \dots + C_{I-k,k}$. The foregoing proof of the uncorrelatedness easily extends to arbitrary products of pairwise different $\hat{f}_k$, i.e. we have

$$E(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1},$$

which shows that $\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i}\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}$ is an unbiased estimator of $E(C_{iI}|D) = C_{i,I+1-i}f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}$. In the same way, the reserve estimator $\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I+1-i}$ is an unbiased estimator of the true reserve $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$.

3. CALCULATION OF MEAN SQUARED ERROR AND STANDARD ERROR

The mean squared error $mse(\hat{C}_{iI})$ of the estimator $\hat{C}_{iI}$ of C_{iI} is defined to be

$$mse(\hat{C}_{iI}) = E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2|D)$$

where $D = \{C_{ik} | i+k \le I+1\}$ is the set of all data observed so far. Note that we are not using the unconditional mean squared error $E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2) = E(E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2|D))$ as this averages over all possible data D from the underlying distribution. Instead, in practise, we are more interested in the conditional mean squared error of the particular estimated amount $\hat{C}_{iI}$ based on the specific data set D observed and therefore have to use $E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2|D)$ which just gives us the average deviation between $\hat{C}_{iI}$ and C_{iI} due to future randomness only.

First, we see that

$$mse(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2|D) = E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2|D) = mse(\hat{C}_{iI}).$$

Next, because of the general rule $E(X-a)^2 = \mathrm{Var}(X) + (E(X)-a)^2$ we have

$$mse(\hat{C}_{iI}) = \mathrm{Var}(C_{iI}|D) + (E(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI})^2$$

which shows that the mean squared error is the sum of the stochastic error (process variance) and of the estimation error.

In order to further calculate the *mse* we need a formula for the variance of C_{ik}. From the fact that $\hat{f}_k$ is the C_{ik}-weighted mean of the individual development factors $C_{i,k+1}/C_{ik}$, $1 \le i \le I-k$, we can induce that $\mathrm{Var}(C_{i,k+1}/C_{ik}|C_{i1}, \ldots, C_{ik})$ should be inversely proportional to C_{ik}, or equivalently

(3) $$\mathrm{Var}(C_{i,k+1}|C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik}\sigma_k^2, \; 1 \le i \le I, \; 1 \le k \le I-1,$$

with unknown parameters σ_k^2, $1 \le k \le I-1$. This is the variance assumption which is implicitly underlying the chain ladder method.

Later on, we will need an estimator for σ_k^2. Similarly as for $\hat{f}_k$ it can be shown that

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad 1 \le k \le I-2.$$

is an unbiased estimator of σ_k^2, $1 \le k \le I-2$. We still lack an estimator for σ_{I-1}. If $\hat{f}_{I-1} = 1$ and if the claims development is believed to be finished after $I-1$ years, we can put $\hat{\sigma}_{I-1} = 0$. If not, we extrapolate the usually exponentially decreasing series $\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{I-3}, \hat{\sigma}_{I-2}$ by one additional member, for instance by loglinear regresssion or more simply by requiring that

$$\hat{\sigma}_{I-3}/\hat{\sigma}_{I-2} = \hat{\sigma}_{I-2}/\hat{\sigma}_{I-1}$$

holds at least as long as $\hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$. This last possibility leads to

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min(\hat{\sigma}_{I-2}^4/\hat{\sigma}_{I-3}^2, \min(\hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-2}^2))$$

which has been used in the examples.

Now, we are able to state and prove the main result

Theorem 3: Under the assumptions (1), (2) and (3) the mean squared error $mse(\hat{R}_i)$ can be estimated by

$$\widehat{mse(\hat{R}_i)} = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

where $\hat{C}_{ik} = C_{i,I+1-i}\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1}$, $k > I+1-i$, are the estimated values of the future C_{ik} and $\hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i}$.

Proof: We use the abbreviations

$$E_i(X) = E(X|C_{i1}, \ldots, C_{i,I+1-i}),$$
$$\mathrm{Var}_i(X) = \mathrm{Var}(X|C_{i1}, \ldots, C_{i,I+1-i}).$$

We start from

$$mse(\hat{R}_i) = \mathrm{Var}(C_{iI}|D) + (E(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI})^2.$$

Repeated application of the basic chain ladder assumption (1) and of the above variance assumption (3) yields for the first term of $mse(\hat{R}_i)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C_{iI}|D) &= \mathrm{Var}_i(C_{iI}) \\ &= E_i(\mathrm{Var}(C_{iI}|C_{i1}, \ldots, C_{i,I-1})) + \\ &\quad + \mathrm{Var}_i(E(C_{iI}|C_{i1}, \ldots, C_{i,I-1})) \\ &= E_i(C_{i,I-1})\sigma_{I-1}^2 + \mathrm{Var}_i(C_{i,I-1})f_{I-1}^2 \\ &= E_i(C_{i,I-2})f_{I-2}\sigma_{I-1}^2 + E_i(C_{i,I-2})\sigma_{I-2}^2 f_{I-1}^2 + \\ &\quad + \mathrm{Var}_i(C_{i,I-2})f_{I-2}^2 f_{I-1}^2 \\ &= \text{etc.} \\ &= C_{i,I+1-i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} f_{I+1-i} \ldots f_{k-1}\sigma_k^2 f_{k+1}^2 \ldots f_{I-1}^2\end{aligned}$$

because of $\mathrm{Var}_i(C_{i,I+1-i}) = 0$.

Due to Theorem 1 we obtain for the second term of $mse(\hat{R}_i)$

$$(*) \quad (E(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI})^2 = C_{i,I+1-i}^2(f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1})^2.$$

In practice, we must find estimators for these two terms of $mse(\hat{R}_i)$. For the first term this will be done by replacing the unknown parameters f_k and σ_k^2 with their estimators $\hat{f}_k$ and $\hat{\sigma}_k^2$, i.e. we estimate $\mathrm{Var}(C_{iI}|D)$ by

$$\begin{aligned}C_{i,I+1-i}&\left(\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1} \cdot \hat{\sigma}_k^2 \cdot \hat{f}_{k+1}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}^2\right) \\ &= \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2/\hat{f}_k^2}{\hat{C}_{ik}}\end{aligned}$$

where we have used the notation $\hat{C}_{ik}$ introduced in the theorem.

But in the second term (*) of $mse(\hat{R}_i)$ we can not simply replace f_k with $\hat{f}_k$ because this would yield 0. We therefore use a different approach. We can write

$$\begin{aligned}F &= f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} \\ &= S_{I+1-i} + \ldots + S_{I-1}\end{aligned}$$

with

$$S_k = \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1}(f_k - \hat{f}_k)f_{k+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}$$

and therefore

$$F^2 = (S_{I+1-i} + \ldots + S_{I-1})^2$$
$$= \sum_{k=I+1-i}^{I-1} S_k^2 + 2 \sum_{j<k} S_j S_k.$$

Now we replace S_k^2 with $E(S_k^2|B_k)$ and $S_j S_k$, $j < k$, with $E(S_j S_k|B_k)$. This means that we approximate S_k^2 and $S_j S_k$ by averaging over as little data as possible such that as many values C_{ik} as possible from the observed data are kept fixed. Because of $E(f_k - \hat{f}_k|B_k) = 0$ (see the proof of Theorem 2) we obtain $E(S_j S_k|B_k) = 0$ for $j < k$. Because of

$$E((f_k - \hat{f}_k)^2|B_k) = \mathrm{Var}\,(\hat{f}_k|B_k)$$
$$= \sum_{j=1}^{I-k} \mathrm{Var}\,(C_{j,\,k+1}|B_k) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \right)^2$$
$$= \sigma_k^2 \Bigg/ \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}$$

we obtain

$$E(S_k^2|B_k) = \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1}^2 \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \cdot \ldots \cdot f_{I-1}^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}.$$

Taken together, we replace $F^2 = (\Sigma\, S_k)^2$ with $\Sigma_k\, E(S_k^2|B_k)$ and because all terms of this sum are positive we now can replace all unknown parameters f_k, σ_k^2 with their unbiased estimators $\hat{f}_k$, $\hat{\sigma}_k^2$. Altogether, we estimate $F^2 = (f_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1})^2$ by

$$\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \left(\hat{f}_{I+1-i}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1}^2 \cdot \hat{\sigma}_k^2 \cdot \hat{f}_{k+1}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}^2 \Bigg/ \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \right)$$
$$= \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}$$

This finally leads to the estimator stated in the theorem. □

The square root s.e. $(\hat{R}_i)$ of an estimator of the mean squared error is defined to be the standard error of $\hat{R}_i$.

Often the standard error of the overall reserve estimate $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ is of interest, too. In this case we cannot simply add together the values of $(\text{s.e.}\,(\hat{R}_i))^2$, $2 \le i \le I$, because they are correlated via the common estimators $\hat{f}_k$ and $\hat{\sigma}_k$. We therefore proceed as before and obtain:

Corollary: With the assumptions and notations of Theorem 3 the mean squared error of the overall reserve estimate $\hat{R} = \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_I$ can be estimated by

$$\widehat{mse(\hat{R})} = \sum_{i=2}^{I} \left\{ (\text{s.e.}\,(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{iI} \left(\sum_{j=i+1}^{I} \hat{C}_{jI} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right\}$$

Proof: We have

$$\begin{aligned} mse\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{R}_i\right) &= E\left(\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{R}_i - \sum_{i=2}^{I} R_i\right)^2 | D\right) \\ &= E\left(\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{C}_{iI} - \sum_{i=2}^{I} C_{iI}\right)^2 | D\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=2}^{I} C_{iI} | D\right) + \left(E\left(\sum_{i=2}^{I} C_{iI} | D\right) - \sum_{i=2}^{I} \hat{C}_{iI}\right)^2. \end{aligned}$$

The independence of the accident years yields

$$\text{Var}\left(\sum_{i=2}^{I} C_{iI} | D\right) = \sum_{i=2}^{I} \text{Var}\,(C_{iI} | D),$$

whose summands have already been calculated in the proof of Theorem 3. Furthermore

$$\begin{aligned} \left(E\left(\sum_{i=2}^{I} C_{iI} | D\right) - \sum_{i=2}^{I} \hat{C}_{iI}\right)^2 &= \left(\sum_{i=2}^{I} (E(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI})\right)^2 \\ &= \sum_{i,j} (E(C_{iI}|D) - \hat{C}_{iI}) \cdot (E(C_{jI}|D) - \hat{C}_{jI}) \\ &= \sum_{i,j} C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} F_i F_j \end{aligned}$$

with

$$F_i = f_{I+1-i} \cdots f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}.$$

Observing

$$mse(\hat{R}_i) = \text{Var}\,(C_{iI}|D) + (C_{i,I+1-i} F_i)^2$$

(cf. (*) in the proof of theorem 3) we see that

$$mse\left(\sum_{i=2}^{I} \hat{R}_i\right) = \sum_{i=2}^{I} mse\,(\hat{R}_i) + \sum_{2 \le i < j \le I} 2 \cdot C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} F_i F_j.$$

An analogous procedure as for F^2 in the above proof yields for $F_i F_j$, $i < j$, the estimator

$$\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{f}_{I+1-j} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-i} \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1}^2 \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}^2 \Big/ \sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}.$$

This completes the proof. □

4. EXAMPLES

In the first example we use the TAYLOR/ASHE (1983) data, which were also used by VERRALL (1990, 1991).

TABLE 1

RUN-OFF TRIANGLE (ACCUMULATED FIGURES)

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	C_{i7}	C_{i8}	C_{i9}	C_{i10}
1	357848	1124788	1735330	2218270	2745596	3319994	3466336	3606286	3833515	3901463
2	352118	1236139	2170033	3353322	3799067	4120063	4647867	4914039	5339085	
3	290507	1292306	2218525	3235179	3985995	4132918	4628910	4909315		
4	310608	1418858	2195047	3757447	4029929	4381982	4588268			
5	443160	1136350	2128333	2897821	3402672	3873311				
6	396132	1333217	2180715	2985752	3691712					
7	440832	1288463	2419861	3483130						
8	359480	1421128	2864498							
9	376686	1363294								
10	344014									

This yields the following parameter estimates ($k = 1, \ldots, 9$):

$\hat{f}_k$: 3.49, 1.75, 1.46, 1.174, 1.104, 1.086, 1.054, 1.077, 1.018

$\hat{\sigma}_k^2/1000$: 160, 37.7, 42.0, 15.2, 13.7, 8.19, 0.447, 1.15, 0.477

TABLE 2

ESTIMATED RESERVES $\hat{R}_i$ IN 1000 s

	Chain ladder	Verrall 1991	Renshaw Christofides	Zehnwirth	Mack 1991	Taylor Ashe
$i = 2$	95	96	111	109	93	298
$i = 3$	470	439	482	473	447	600
$i = 4$	710	608	661	648	611	745
$i = 5$	985	1011	1091	1069	992	1077
$i = 6$	1419	1423	1531	1500	1453	1788
$i = 7$	2178	2150	2311	2265	2186	2879
$i = 8$	3920	3529	3807	3731	3665	4221
$i = 9$	4279	4056	4452	4364	4122	4866
$i = 10$	4626	4340	5066	4965	4516	5827
overall	18681	16652	19512	19124	18085	22301

TABLE 3

STANDARD ERROR IN % OF $\hat{R}_i$

	Chain ladder	Verrall 1991	.Renshaw Christofides	Zehnwirth	Mack 1991	Taylor Ashe
$i = 2$	80%	49%	54%	49%	40%	27%
$i = 3$	26%	37%	39%	35%	30%	20%
$i = 4$	19%	30%	32%	29%	24%	18%
$i = 5$	27%	27%	28%	25%	21%	16%
$i = 6$	29%	25%	26%	24%	20%	16%
$i = 7$	26%	25%	26%	24%	20%	14%
$i = 8$	22%	27%	28%	26%	21%	14%
$i = 9$	23%	30%	31%	30%	24%	14%
$i = 10$	29%	38%	40%	39%	31%	14%
overall	13%	15%	16%	16%		9%

Comments:

The results for 'Taylor/Ashe' and 'Verrall 1991' have been taken from these papers. Taylor/Ashe produced much lower standard errors than the other methods. This is due to the fact that their reserve estimates employed only 6 parameters (as compared to 19 of the other methods) and that they additionally used the information on the numbers of claims finalized.

Renshaw and Christofides describe the same loglinear regression method which is also identical to Verrall's (1990) Bayesian approach without any prior information. Therefore the results for 'Renshaw/Christofides' have been taken from VERRALL (1990), Table 2.

The results for 'Zehnwirth' have been obtained by using his ICRFS software package version 6.1 employing one of his fixed parameter development factor models which he calls 'chain ladder model'. We have used it without any further adjustment. It should be remarked that this is not what Zehnwirth intends, as his software package is a modelling framework and any initial model should be further adjusted interactively with the help of the indications and plots given by the program. Without any further adjustment this 'chain ladder model' is identical to the Renshaw/Christofides model, i.e. it is a loglinearized approximation of the usual chain ladder model. The fact that it leads to slightly lower results is attributable to using a different estimator for the model variance.

The results for 'Mack 1991' have been obtained according to a previous paper (MACK (1991)) of the author but additionally an estimate of the process variance has been included, as this is the case with all the other methods.

The estimated reserves of all methods except 'Taylor/Ashe' differ by less than 20% and are therefore according to Table 3 within one standard error. For the chain ladder method neither the reserve estimates nor the standard errors are systematically higher or lower than for the other methods (except 'Taylor/Ashe'). The reason for the comparatively high chain ladder standard error of 80 % for accident year 2 is the fact that the reserve $\hat{R}_2$ itself is very low in comparison to the other reserves $\hat{R}_3, \ldots, \hat{R}_{10}$: If we look at the sequence $\hat{R}_{10}, \hat{R}_9, \ldots, \hat{R}_4, \hat{R}_3$ we see that $\hat{R}_{i-1}$ is always greater then $\hat{R}_i/2$ but $\hat{R}_2$ is smaller than $\hat{R}_3/4$. This fact is very well reflected by the high standard error of 80 %.

A closer look at the Taylor/Ashe data shows that the individual development factors $C_{i,k+1}/C_{ik}$, $1 \leq i \leq I-k$, do not fluctuate much around their mean value $\hat{f}_k$ so that the whole triangle can be considered as relatively regular. Therefore Taylor/Ashe were able to dispense with taking logarithms and thus avoided the problem of transforming back the result into the original data space. We therefore give a second example, which is less regular and where the claims amounts of the most recent accident years are much lower than in the previous years. These data (mortgage guarantee business) were compiled from a competition presented by SANDERS (1990).

TABLE 4

RUN-OFF TRIANGLE (ACCUMULATED FIGURES)

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	C_{i7}	C_{i8}	C_{i9}
1	58046	127970	476599	1027692	1360489	1647310	1819179	1906852	1950105
2	24492	141767	984288	2142656	2961978	3683940	4048898	4115760	
3	32848	274682	1522637	3203427	4445927	5158781	5342585		
4	21439	529828	2900301	4999019	6460112	6853904			
5	40397	763394	2920745	4989572	5648563				
6	90748	951994	4210640	5866482					
7	62096	868480	1954797						
8	24983	284441							
9	13121								

Parameter estimates ($k = 1, \ldots, 8$):

$\hat{f}_k$: 11.1, 4.09, 1.71, 1.28, 1.14, 1.069, 1.026, 1.023

$\hat{\sigma}_k^2/1000$: 1787, 977, 194, 42.8, 27.0, 5.57, 1.26, 0.285

TABLE 5

ESTIMATED RESERVES $\hat{R}_i$ IN 1000 s

	Chain ladder	Renshaw Christofides	Zehnwirth	Mack 1991
$i = 2$	93	91	87	62
$i = 3$	265	275	262	199
$i = 4$	834	818	778	682
$i = 5$	1568	1979	1884	1639
$i = 6$	3696	5497	5231	4420
$i = 7$	3487	6650	6328	5378
$i = 8$	2956	4331	4122	3143
$i = 9$	1647	2339	2226	1555
overall	14547	21980	20919	17078

TABLE 6

STANDARD ERROR IN % OF $\hat{R}_i$

	Chain ladder	Renshaw Christofides	Zehnwirth	Mack 1991
$i = 2$	65%	90%	80%	60%
$i = 3$	53%	60%	53%	41%
$i = 4$	38%	51%	45%	37%
$i = 5$	38%	48%	42%	35%
$i = 6$	28%	46%	41%	33%
$i = 7$	37%	47%	42%	34%
$i = 8$	61%	50%	47%	36%
$i = 9$	133%	66%	64%	47%
overall	26%		24%	

Here all results have been calculated by the author. In comparison with the standard errors of the first example, the chain ladder standard errors now reflect very well the generally higher uncertainty of this second triangle and especially the uncertainty of the last two accident years where the relative standard errors are very high because the reserve estimates are comparatively low. The most extreme deviation between the reserve estimates of the different methods is for accident year 7 where the 'Renshaw/Christofides' reserve exceeds the chain ladder reserve by 2.5 standard errors.

Altogether, if the impressions of these two examples can be taken as typical, we can conclude that the standard errors are of about the same size for the chain ladder as with the other methods, although they do not show such a smooth pattern as these because the other methods use only one σ^2 parameter as compared to $I-1$ of chain ladder. But this could also be achieved for the chain ladder method by smoothing out the $\hat{\sigma}_k^2$'s by means of an exponential function $\exp(a-bk)$.

Finally, we must bear in mind that these standard errors can only reflect the estimation error and the statistical error, but not the specification error, i.e. the fact that the model chosen can be wrong or that the future development may not be in accordance with past experience.

ACKNOWLEDGEMENT

I am indebted to ALOIS GISLER for pointing out the correct definition of the mean squared error and some further useful remarks.

REFERENCES

CHRISTOFIDES, S. (1990) Regression Models Based on Logincremental Payments. In: *Claims Reserving Manual*, Vol. 2, Institute of Actuaries, London.

MACK, Th. (1991) A Simple Parametric Model for Rating Automobile Insurance or Estimating IBNR Claims Reserves. *ASTIN Bulletin* **21**, 93–109.

RENSHAW, A. (1989) Chain Ladder and Interactive Modelling. *Journal of the Institute of Actuaries* **116**, 559–587.

SANDERS, D. E. A. (1990) Competition Presented at a London Market Actuaries Dinner.

SCHNIEPER, R. (1991) Separating True IBNR and IBNER Claims. *ASTIN Bulletin* **21**, 111–127.

TAYLOR, G. C. and ASHE, F. R. (1983) Second Moments of Estimates of Outstanding Claims. *Journal of Econometrics* **23**, 37–61.

VERRALL, R. J. (1990) Bayes and Empirical Bayes Estimation for the Chain Ladder Model. *ASTIN-Bulletin* **20**, 217–243.

VERRALL, R. J. (1991) On the Estimation of Reserves from Loglinear Models. *Insurance: Mathematics and Economics* **10**, 75–80.

WRIGHT, T. S. (1990) A Stochastic Method for Claims Reserving in General Insurance. *Journal of the Institute of Actuaries* **117**, 677–731.

ZEHNWIRTH, B. (≥ 1985) Interactive Claims Reserving Forecasting System. Insureware P/L, E. St. Kilda Vic 3183, Australia.

THOMAS MACK
Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft, Königinstrasse 107,
D-80791 München.

6. Upravljanje s tveganji

6.1. Osnove procesov tveganja, Lundbergova neenačba

V tem poglavju si bomo ogledali osnove procesov tveganja. Privzetki bodo naslednji:

(i) škode se bodo zgodile v časih $0 \leq T_1 < T_2 < \ldots\ldots$. Število škod do časa t bomo označili z $N(t)$.

(ii) velikosti škod po vrsti bodo $X_1, X_2, \ldots\ldots$

(iii) Seštevek škod do časa t označimo z $S(t)$.

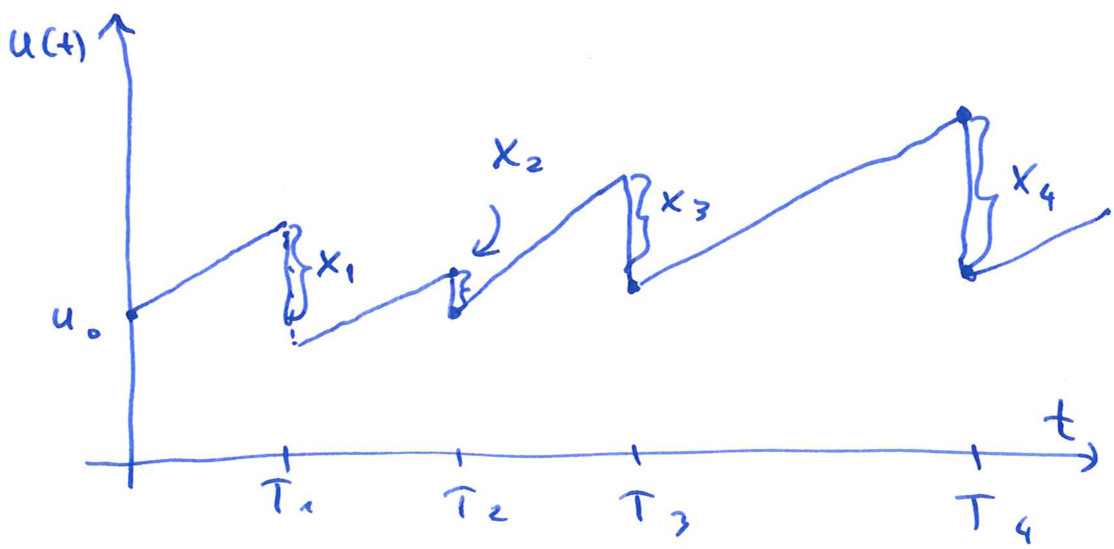
(iv) Zavarovalnica na enoto časa pobere c premije.

Privzetek je, da premija priteka „zvezno" z jakostjo c, tako da se do časa t „nateče" ct premije.

Slika: Če z $u(t)$ označimo presežek zavarovalnice in privzamemo $U(0) = u$ bo

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$$

$$= u + ct - S(t)$$



Po slovnače lahko rečemo, da zavarovalnica spremlja stanje v blagajni. Skrbi jih, da nemara v prihodnosti ne bo dovolj denarja za poplačilo škod. V oznakah, ki jih imamo, nas bodo zanimale verjetnosti

$$\psi(u) = P(\, U(t) < 0 \text{ za nek } t \geq 0 \,)$$

$$\psi(u,t) = P(\, U(s) < 0 \text{ za nek } s \in [0,t] \,).$$

Za matematično obravnavo potrebujemo še nekaj privzetkov.

<u>Definicija</u>: Nabor $(\, U(t) : t \geq 0 \,)$ slučajnih spremenljivk imenujemo <u>proces</u> <u>tveganja</u> ali Lundbergov proces.

Privzeli bomo, da so časi med posameznimi škodami neodvisne eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametrom $\lambda > 0$. To je tipični privzetek zavarovalnic.

Izrek 6.1: Naj bodo časi med škodami $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ neodvisne eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke. Potem so za fiksne čase $0 \leq t_0 \leq t_1 < t_n$ slučajne spremenljivke $N(t_k) - N(t_{k-1})$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ neodvisne in je $N(t_k) - N(t_{k-1}) \sim Po(\lambda(t_k - t_{k-1}))$

Dokaz: Označimo $T_k - T_{k-1} = \xi_k \sim \exp(\lambda)$

Izračunajmo najprej

$$P(N(t_1) - N(t_0) = k)$$

$$= P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \le t_1,$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{k+1} > t)$$

Iz verjetnosti vemo, da je

$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ in

ta vsota je neodvisna od ξ_{k+1}.

Nadaljujemo

$$P(\xi_1 + \dots + \xi_k \le t_1, \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{k+1} > t_1)$$

$$= \int_0^t f_{\xi_1 + \dots + \xi_k}(u) \cdot P(\xi_{k+1} > t_1 - u)\, du$$

$$= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^{t_1} u^{k-1} e^{-\lambda u} \cdot e^{-\lambda(t_1 - u)}$$

$$= \frac{\lambda^k}{\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda t_1} \cdot \int_0^{t_1} u^{k-1} \, du$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!}$$

Sledi, da je $N(t_1) - N(t_0) \sim Po(\lambda t)$.

Izračunajmo

$$P(\xi_1 + \quad + \xi_{k+1} - t_1 \geq s \mid$$

$$\mid \xi_1 + \quad + \xi_k \leq t_1, \ \xi_1 + \cdots + \xi_{k+1} > t_1)$$

Vemo: $P(\xi_1 + \quad + \xi_k \leq t_1, \ \xi_1 + \quad + \xi_{k+1} > t_1)$

$$= e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!}$$

Računamo po formuli

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$$P(\{\xi_1 + \dots + \xi_{k+1} \geq s + t_1\}$$
$$\cap \{\xi_1 + \dots + \xi_k \leq t_1\}$$
$$\cap \{\xi_1 + \dots + \xi_{k+1} > t_1\})$$

$$= P(\{\xi_1 + \dots + \xi_{k+1} \geq s + t_1\}$$
$$\cap \{\xi_1 + \dots + \xi_k \leq t_1\})$$

$$= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^{t_1} u^{k-1} \cdot e^{-\lambda u} \cdot e^{-\lambda(s+t_1-u)} \, du$$

$$= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-\lambda(s+t_1)} \int_0^{t_1} u^{k-1} \, du$$

$$= \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(s+t_1)}$$

Dividiamo a $P(B)$ e otteniamo

$$P(\xi_1 + \dots + \xi_{k+1} - t_1 > s \mid N(t_1) = k)$$

$$= e^{-\lambda s}$$

Sklep: Slučajne spremenljivke $\xi_{k+2}, \xi_{k+3}, \dots$ so neodvisne od dogodka $\{N(t_1) = k\}$. Poleg tega je tudi porazdelitev $\xi_1 + \quad + \xi_{k+1} - t_1$ pogojno na $\{N(t_1) = k\}$ eksponentna s parametrom λ za vse k, torej neodvisna od $\{N(t_1) = k\}$.

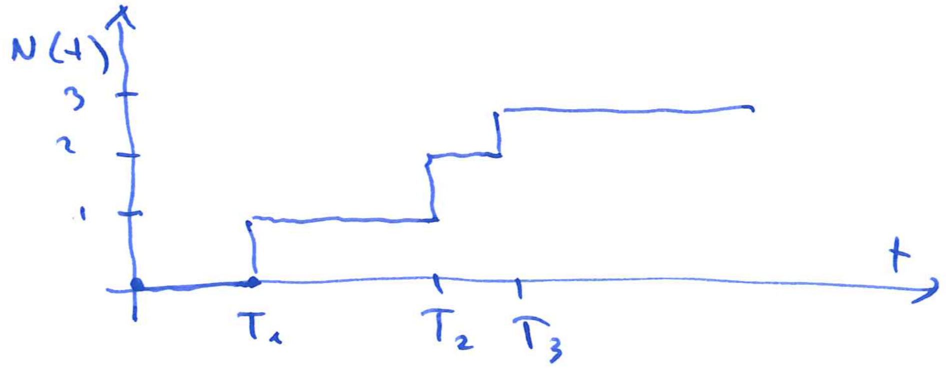
Če časovno izhodišče prestavimo v t_1, bodo časi skokov po tem trenutku neodvisni od $\{N(t_1) = k\}$, neodvisni med sabo in eksponentno porazdeljeni s parametrom λ.

To pomeni, da se proces "resetira" in začne na novo.

Po indukciji so potem vsi prirastni števila škod $N(t_k) - N(t_{k-1})$ med sabo neodvisni in porazdeljeni kot trdi izrek.

<u>Definicija</u>: Procesu $(N(t) : t \geq 0)$ štetja škod rečemo Poissonov proces.

<u>Slika</u>:



Opomba: Privzetek, da so časi med škodami neodvisni in enako porazdeljeni je tipičen privzetek v zavarovalništvu.

Naslednja predpostavka je, da so velikosti škod $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Označimo $E(X_1) = m_1$. S temi oznakami lahko proces tveganja zapišemo kot

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} X_k,$$

kot že prej. Privzeli bomo, da so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne od Poissonovega procesa N.

Iz verjetnosti vemo, da je rodovna funkcija slučajne spremenljivke

$$X = \sum_{k=0}^{N(t)} X_k$$

enaka

$$G_X(s) = G_{N(t)}(G_{X_1}(s)).$$

Iz tega sledi, da je

$$E(X) = \lim_{s \uparrow 1} G_X'(s)$$

$$= \lim_{s \uparrow 1} G_{N(t)}'(G_{X_1}(s)) \cdot G_{X_1}'(s)$$

$$= E(N(t)) \cdot E(X_1)$$

$$= \lambda t \cdot E(X_1)$$

Podobno sledi

$$E(X(X-1))$$

$$= \lim_{s \uparrow 1} G''_X(s)$$

$$= \lim_{s \uparrow 1} \{ G''_{N(t)}(G_{X_1}(s)) \cdot [G'_{X_1}(s)]^2$$

$$+ G'_{N(t)}(G_{X_1}(s)) G''_{X_1}(s) \}$$

$$= E[N(t)(N(t)-1)] \cdot E(X_1)^2$$

$$+ E(N(t)) \cdot$$

$$E[X_1(X_1-1)]$$

$$= \{ var(N(t)) + E(N(t))^2$$

$$- E(N(t)) \} E(X_1^2)$$

$$+ E(N(t)) \times$$

$$\times \{ var(X_1) + E(X_1)^2$$
$$- E(X_1) \}$$

$$= \mathrm{var}(N(t)) \cdot E(X_1^2)$$

$$+ E(N(t)) \mathrm{var}(X_1)$$

$$= \lambda t \cdot E(X_1^2) + \lambda t \cdot \mathrm{var}(X_1)$$

V splošnem bomo privzeli, da je

$$ct \geq E\left[\sum_{k=0}^{N(t)} X_k\right]$$

$$= E(N(t)) \cdot E(X_1)$$

$$= \lambda \cdot t \; m_1$$

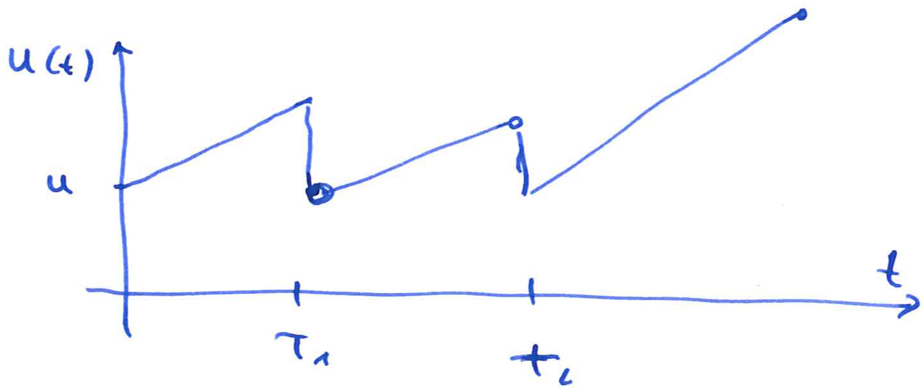
Privzetek:

$$c \geq \lambda \cdot E(X_1) = \lambda \cdot m_1.$$

Opomba: Temu pogoju se reče pogoj nepropada.

Vrnimo se k verjetnostim propada. Bistveno opažanje je, da se proces tveganja po času prve škode „točne zneska" (?) ..., se obnaša točno tako, kot da bi začel na novo z novim izhodiščem.

Slika:



Spomnimo se oznake

$$\psi(u) = P(U(t) < 0 \text{ za nek } u \geq 0)$$

To se lahko zgodi na dva načina:

(i) že prva škoda je T_1 je prevelika.

(ii) prva škoda ni prevelika, ampak pride do propada kasneje.

Prva škoda bo prevelika, če bo $X_1 \geq u + cT_1$. Če prva škoda ni prevelika, začnemo znova in imamo $u + cT_1 - X_1$ začetnih sredstev. Možnosti (i) in (ii) sta disjunktni. Označimo gostoto slučajne spremenljivke X_1 z $f(x)$. Velja:

$$P(X_1 \geq u + cT_1)$$

$$= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_{u+cs}^\infty f(x)\,dx$$

Druga možnost je

$$P(u(t) < 0 \text{ za nek } t \geq 0,\ X_1 < u + cT_1)$$

$$= (*)$$

$$(*) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} \cdot \int_0^{u+cs} f(x) \cdot \psi(u+cs-x)\, ds$$

Dobimo torej enačbo

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}\, ds \cdot \int_{u+cs}^\infty f(x)\, dx$$

$$+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}\, ds \cdot \int_0^{u+cs} f(x) \cdot \psi(u+cs-x)\, dx$$

Enačbo je v splošnem težko rešiti.

Večina zavarovalnice odmerijo premije tako, da v časovnem intervalu $[0,t]$ zberejo ~~še~~ več premije kot je pričakovanih škod.

Primer: Privzemimo $X_1 \sim \exp(1)$.

Naš pogoj potem pravi $c > \lambda \cdot 1$.

Enačba se poenostavi v

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_{u+cs}^\infty e^{-x} dx$$

$$+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_0^{u+cs} e^{-x} \psi(u+cs-x) dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} \cdot e^{-(u+cs)} ds$$

$$+ \underbrace{\int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} \cdot \int_0^{u+cs} e^{-(u+cs-x)} \psi(x) dx}_{\substack{\text{Nova spr.} \\ u+cs-x=v}}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+c} e^{-u}$$

$$+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \times$$

$$\times \int_0^{u+cs} e^{-(u+cs-x)} \psi(x) dx$$

Poskusimo lahko z $\psi(u) = a \cdot e^{-bu}$.

Če izenačimo konstante, dobimo

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{(c-\lambda)}{c} u}.$$

Navedimo preizkus: najprej izračunajmo notranji integral

$$\int_0^{u+cs} e^{-x} \cdot \psi(u+cs-x)\, dx.$$

Integracija da rezultat

$$e^{-cs-u}\left(e^{\lambda(s+\frac{u}{c})}-1\right)$$

Izračunamo še zunanji integral

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-cs-u}\left(e^{\lambda(s+\frac{u}{c})}-1\right) e^{-\lambda s} ds.$$

Dobimo

$$\lambda e^{-u}\left(\frac{e^{\frac{\lambda u}{c}}}{c} - \frac{1}{\lambda+c}\right)$$

Vidimo, da se drugi člen pokrajša s prvim integralom, drugi del pa da

$$\frac{\lambda}{c}\, e^{-\frac{(c-\lambda)}{c} u},$$

kar zaključi preizkus.

V splošnem verjetnosti propada ne moremo izračunati eksplicitno. Primer pa nas navede na misel, da $\psi(u)$ pada eksponentno. Da je to res, je vsebina Lundbergove neenačbe. Potrebujemo nekaj dodatnih definicij.

Definicija: Momentno rodovna funkcija slučajne spremenljivke X je definirana kot

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Opomba: Lahko, da pričakovana vrednost ne obstaja razen za $t=0$.

Primeri:

(i) Če je, recimo, $X \sim Bin(n,p)$, dobimo

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \cdot \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

$$= (pe^t + q)^n.$$

(ii) Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Računamo za $Z \sim N(0,1)$

$$M_X(t) = E\left(e^{t(\mu + \sigma Z)}\right)$$

$$= e^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma z} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= e^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z - t\sigma)^2}{2}} dz$$

$$\times \; e^{+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$= e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

V nadaljevanju bomo privzeli, da momentno rodovna funkcija obstaja na intervalu (a, b) z $a < 0 < b$. Na znanje vzamemo dve dejstvi.

(i) na intervalu obstoje (a, b) je $M_X(t)$ strogo pozitivna in strogo konveksna.

(ii) Za poljubno pozitivno slučajno spremenljivko X je

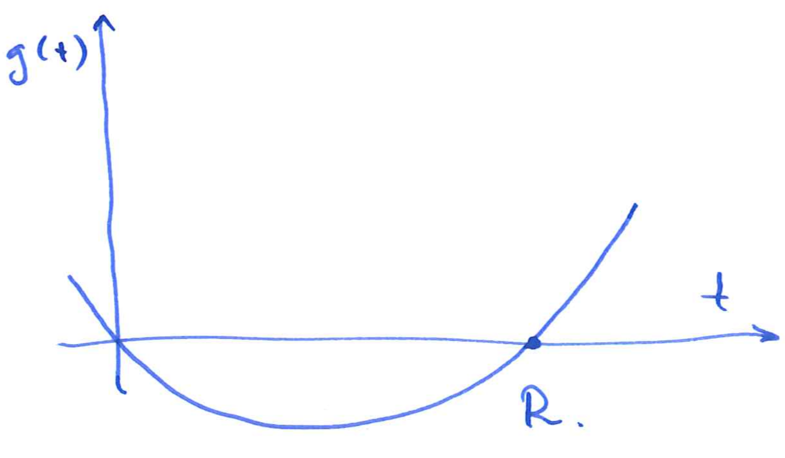
$$\lim_{t \uparrow b} \left(M_X(t) - \beta t \right) = \infty$$

za vsako pozitivno število β.

Definirajmo funkcijo

$$g(t) = \lambda M_X(t) - \lambda - ct .$$

Slika:



Iz vseh dejstev sledi, da ima funkcija $g(t)$ zaradi stroge konveksnosti in zgornjih dejstev eno samo rešitev R.

<u>Izrek 6.2</u>: Velja neenačba

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

(Lundbergova neenačba)

<u>Dokaz</u>: Označimo s $\psi_n(u)$ verjetnost, da se bo propad zgodil do trenutka T_n, ko pride škoda X_n. Očitno velja $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$.

Neenačbo bomo dokazali z indukcijo.

Izračunali smo že, da prvi zahtevek povzroči propad, če je $X_1 > u + cT_1$. Verjetnost tega je

$$\int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s}\, ds \cdot \int_{u+cs}^\infty f(x)\, dx$$

$$\leq \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s}\, ds \cdot \int_{u+cs}^\infty e^{-R(u+cs-x)} f(x)\, dx$$

(eksponent > 0)

$$\leq \int_0^\infty \lambda\, e^{-(\lambda + cR)s}\, ds \cdot \int_0^\infty e^{Rx} f(x)\, dx \cdot e^{-Ru}$$

$$= e^{-Ru} \cdot \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda + cR)s} M_X(R)\, ds$$

$$= e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-(\lambda + cR)s} \cdot (\lambda + cR)\, ds$$

$$= e^{-Ru}.$$

Velja torej $\psi_1(u) \leq e^{-Ru}$.

Nadaljujemo z indukcijo.

Recimo, da je $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$.

Velja

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_{u+cs}^\infty f(x)\, dx$$

$$+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_0^{u+cs} f(x)\, \psi_n(u+cs-x)\, dx.$$

Či velja indukcijska predpostavka velja

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds \cdot \int_{u+cs}^\infty f(x)\, dx$$

$$+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_0^{u+cs} f(x) \cdot e^{-R(u+cs-x)} dx$$

$$\leq \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_{u+cs}^\infty e^{-R(u+cs-x)} f(x)\, dx$$

$$+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda s} ds \cdot \int_0^{u+cs} f(x) \cdot e^{-R(u+cs-x)} dx$$

$$= e^{-Ru} \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda + cR)s} ds \cdot M_X(R)$$

$$= e^{-Ru} \cdot \int_0^\infty (\lambda + cR)\, e^{-(\lambda+cR)s}\, ds$$

$$= e^{-Ru}$$

S tem je indukcijski korak zaključen. Lundbergova neenačba je zaključena.

<u>Zaključne pripombe</u>:

(i) zavarovalnice uporabljajo Lundbergov proces za določanje konstante c. Če c večamo se veča R in s tem pada verjetnost propada. S tem lahko določimo pravo ceno za zavarovanja.

(ii) načeloma nas zanima verjetnost propada na končnih intervalih $[0, T]$. Te verjetnosti je težko določiti, navadno jih določimo z pomočjo numeričnih metod.