Univerza na Primorskem

FAMNIT, MEF

Osnove zavarovanja

Pisni izpit

22. junij 2021

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 6. Dovoljena sredstva sta dva A4 format lista in matematični priročnik. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.				•	
4.			•	•	
5.			•	•	
6.			•	•	
Skupaj					

1. (20) Oseba želi vzeti kredit v višini $C = 100.000$€, ki ga bo odplačevala naslednjih 10 let. Banka A ponuja običajno mesečno odplačevanje z letno obrestno mero 2.5%, banka B pa ponuja osebi, da ji prvo leto ne bi bilo treba odplačevati ničesar, potem pa bi bil mesečni obrok enak $y = 1032$€. Pri banki B oseba prvi obrok plača na koncu 13-ega meseca od sklenitve pogodbe z banko, tako da je vseh obrokov 108.

a. (10) Je ugodnejša ponudba banke A ali banke B? Pri tem obe banki za celotno obdobje kredita privzemata enako obrestno mero. Utemeljite odgovor.

Rešitev: označimo obrestno mero banke B z j. Sedanje vrednosti prihodnjih obrokov morajo biti enake velikosti kredita, zato mora veljati

$$C = y \sum_{k=13}^{120} w^{\frac{k}{12}},$$

kjer je $w = (1 + j)^{-1}$*. Poračunamo in sledi*

$$\frac{C}{y} = \frac{w^{\frac{13}{12}}(1 - w^{11})}{1 - w^{\frac{1}{12}}}.$$

Vsota na desni v prvi enačbi je naraščajoča funkcija w. Vstavimo namesto w obrestno mero $v = (1 + i)^{-1}$*, kjer je* $i = 0.025$*. Dobimo*

$$\frac{C}{y} \doteq 96,90 \qquad \textit{in} \qquad \sum_{k=13}^{120} v^{\frac{k}{12}} \doteq 94,38\,.$$

Če bi želeli enakost, bi morali povečati v, kar pomeni zmanjšanje obrestne mere. Boljša je ponudba banke B.

b. (10) Bi bil po petih letih odplačevanja dolg večji pri banki A ali banki B? Utemeljite odgovor. Pri računanju morate ugibati o obrestni meri banke B.

Rešitev: za banko A obrok kredita x izračunamo iz enačbe

$$C = x \sum_{k=1}^{120} v^{\frac{k}{12}},$$

kar nam da $x = 941,42$*. Sedanja vrednost preostalega dolga po petih letih bo*

$$C - x \sum_{k=1}^{60} v^{\frac{k}{12}} = 46.991,3\,,$$

dejanski dolg pa bo $53.082,7$*. Z nekaj ugibanja z vstavljanjem ugotovimo, da je obrestna mera banke B približno enaka* $j = 0,02$*. Sedanja vrednost dolga po petih letih odplačevanja pri banki B bi tako bila*

$$C - y \sum_{k=13}^{60} w^{\frac{k}{12}} = 53,754,3\,,$$

dejanski dolg pa $59.349,1$*.*

2. (20) Nemška tridesetletna obveznica *DE0001102341* je bila izdana 26. 4. 2014, glavnica pa bo izplačana 15. 8. 2046. Letni kupon v višini 2,5% nominalne vrednosti bo izplačan letno vsakega 15. 8. v letu vključno z 15. 8. 2046, ko vam izplačajo tudi glavnico.

a. (10) Cena obveznice na dan 22. 6. 2022 je 156,85, kar pomeni, da dolg v višini 100 € kupite za 156,85 €. Kolikšna je efektivna obrestna mera na dan 22. 6. 2022? Navedite numerično aproksimacijo in postopek. Privzemite, da je leto vedno dolgo 365 dni.

Rešitev: do prvega izplačila kupona je 54 dni, kar je delež $\delta = 0,1479$. *Sedanja vrednost prihodnih izplačil za dolg v višini 100€ bo*

$$PV = 2,5 \cdot (v^\delta + v^{\delta+1} + \cdots + v^{\delta+24}) + 100 \cdot v^{\delta+24}\,,$$

kar lahko poenostavimo v

$$PV = v^\delta(2,5 \cdot \frac{1-v^{25}}{1-v} + 100 \cdot v^{24})\,.$$

Ugibamo, da bo efektivna obrestna mera blizu 0 ali morda celo negativna. S poskušanjem ugotovimo $v = 0.9982$, *kar da obrestno mero* $i = 0,0018$.

b. (10) Kolikšna bi morala biti cena obveznice, da bi bila enako dobra naložba kot depozit na bančnem računu z obrestno mero 0,5% v istem časovnem obdobju?

Rešitev: Uporabimo isto formulo kot v prvem delu naloge. Dobimo z $i = 0.005$

$$PV = 2,5 \cdot (v^\delta + v^{\delta+1} + \cdots + v^{\delta+25}) + 100 \cdot v^{\delta+24} = 147,52\,.$$

Cena bi morala biti $147,52$.

3. (20) Naj bo porazdelitvena funkcija življenjske dobe posameznika ob rojstvu dana s

$$F_0(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{105}\right)^{\frac{1}{5}}$$

za $0 \le t \le 105$.

a. (5) Izračunajte jakost smrtnosti.

Rešitev: po definiciji je

$$\mu_t = \frac{F_0'(t)}{1 - F_0(t)} \,.$$

Izračunamo

$$\mu_t = \frac{\frac{1}{525}\left(1 - \frac{t}{105}\right)^{-\frac{4}{5}}}{\left(1 - \frac{t}{105}\right)^{\frac{1}{5}}} \,,$$

kar se poenostavi v

$$\mu_t = \frac{1}{525\left(1 - \frac{t}{105}\right)} \,.$$

b. (5) Izračunajte ${}_{20}p_{35}$.

Rešitev: računamo

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{525\left(1 - \frac{x+s}{105}\right)} ds\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{5}\log\left(1 - \frac{x+s}{105}\right)\Bigg|_0^t\right) \\
&= \left(\frac{1 - \frac{x+t}{105}}{1 - \frac{x}{105}}\right)^{\frac{1}{5}} \,.
\end{aligned}$$

Iz tega razberemo

$${}_{20}p_{35} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}} \,.$$

c. (10) Naj bo T_{35} preostala življenjska doba osebe stare 35 let. Izračunajte $E(T_{35})$.

Rešitev: veljalo bo

$$E(T_x) = \int_0^{105-x} {}_sp_x ds \,.$$

Vstavimo in dobimo

$$
\begin{aligned}
E(T_x) &= \int_0^{105-x} \left(\frac{1 - \frac{x+s}{105}}{1 - \frac{x}{105}} \right)^{\frac{1}{5}} ds \\
&= -\frac{525}{6\left(1 - \frac{x}{105}\right)^{\frac{1}{5}}} \left(1 - \frac{x+s}{105}\right)^{\frac{6}{5}} \Bigg|_0^{105-x} \\
&= \frac{175}{2\left(1 - \frac{x}{105}\right)^{\frac{1}{5}}} \left(1 - \frac{x}{105}\right)^{\frac{6}{5}} \\
&= \frac{175}{2} \left(1 - \frac{x}{105}\right) .
\end{aligned}
$$

Iz tega razberemo, da je $E(T_{35}) = \frac{175}{3}$.

4. (20) Oseba stara 50 let sklene zavarovanje za primer smrti za dobo 20 let. V primeru smrti pred 60. letom zavarovalnica izplača vsoto 2000€, po 60. letu pa 1000€. Oseba bo premijo plačevala letno v enakih zneskih na začetku vsakega leta dokler bo živa. Obrestno mero označite z i.

a. (10) Izrazite neto premijo za to zavarovanje z aktuarskimi simboli.

Rešitev: označimo $C_1 = 2000$ in $C_2 = 1000$. Zavarovalna pogodba je sestavljena iz dveh delov: lahko si mislimo, da oseba sklene zavarovanje za 10 let, če pa bo po 10 letih še živa, bo dobila še eno pogodbo za 10 let z drugačno zavarovalno vsoto. Na strani obveznosti dobimo pričakovano sedanjo vrednost

$$C_1 A^1_{50:\,\overline{10}|} + C_2 \cdot v^{10} \cdot {}_{10}p_{50} \cdot A^1_{60:\,\overline{10}|}\,,$$

kjer je $v = (1+i)^{-1}$. Označimo iskano premijo z Π. Pričakovana sedanja vrednost prihodkov iz naslova premij bo

$$\Pi \cdot \ddot{a}_{50:\,\overline{20}|}\,.$$

Če po načelu ekvivalence izenačimo obe strani, lahko izračunamo Π.

b. (10) Izrazite neto premijsko rezervo ${}_9V$ z aktuarskimi simboli.

Rešitev: na strani obveznosti v tem primeru dobimo

$$C_1 \cdot v \cdot q_{59} + C_2 \cdot v \cdot p_{59} \cdot A_{60:\,\overline{10}|}\,,$$

na strani prihodkov pa

$$\Pi \cdot \ddot{a}_{59:\,\overline{11}|}\,.$$

Neto rezervacija je razlika zgornjih dveh količin.

5. (20) Oseba stara x let kupi odloženo doživljenjsko rento z enkratnim vplačilom premije. Oseba bo prejemala izplačilo 1 v trenutkih $m, m+1, \ldots$ šteto od trenutka nakupa. Diskontni faktor naj bo v. Za enoto časa izberemo leto.

a. (10) Izrazite ${}_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Rešitev: Če bo oseba živa v trenutku začetka izplačevanja, bo v tistem trenutku vrednost doživljenjske rente enaka $\ddot{a}_{x+m}$. *V trenutku* k *bo sedanja vrednost te rente* $v^{m-k}\ddot{a}_x$, *vendar bomo to vsoto potrebovali le, če bo oseba dočakala začetek izplačevanja. Torej bo*

$$ {}_kV = v^{m-k}{}_{m-k}p_{x+k}\ddot{a}_{x+m} \, . $$

b. (10) Pogodbo spremenimo tako, da oseba plačuje premijo v času varčevanja v trenutkih $0, 1, \ldots, m-1$ šteto od sklenitve pogodbe. V primeru smrti pred začetkom izplačevanja rente, svojci dobijo delež α nominalne do trenutka smrti vplačane premije na koncu leta smrti. Izrazite ${}_kV$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$ v tem primeru.

Rešitev: Po načelu ekvivalence najprej izrazimo premijo. Veljati mora

$$ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha(k+1)v^{k+1}\Pi P(K_x = k) + v^m \ddot{a}_{x+m} P(K_x \geq m) = \sum_{k=0}^{m-1} \Pi v^k P(K_x \geq k) \, . $$

Iz te enačbe lahko izrazimo premijo Π. *Ko premijo enkrat imamo, lahko zapišemo*

$$ \begin{aligned} {}_kV &= \\ &= \sum_{l=0}^{m-k-1} \alpha\Pi(k+l+1)v^{l+1}P(K_{x+k} = l) + v^{m-k} \cdot {}_{m-k}p_{x+k} \cdot \ddot{a}_{x+m} - \\ &\qquad -\Pi \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} \, . \end{aligned} $$

6. (20) Oseba stara 69 let sklene pogodbo za odloženo rento. Zavarovalnica bo letno rento v višini 1 začela izplačevati, ko bo oseba stara 74 let, če bo še živa. Rento bo nato izplačevala na začetku vsakega leta, dokler bo zavarovanec živ. Ob vsakem izplačilu bo zavarovalnica obračunala administrativni strošek $\gamma = 0.02$. Posebnost pogodbe je, da zavarovalnica v primeru smrti zavarovanca pred začetkom izplačevanja rente zakonitim dedičem izplača delež α obrestovane premije, če oseba umre v letu k po sklenitvi zavarovanja za $k = 0, 1, 2, 3, 4$, pri čemer je $\alpha = 0,9$. Obrestna mera naj bo $i = 0,02$. Oseba bo premijo plačala v enkratnem znesku ob sklenitvi zavarovanja.

Na razpolago imate naslednje podatke:

x	q_x	$\ddot{a}_x$
69	0,0062	18,16
70	0,0067	17,61
71	0,0073	17,06
72	0,0080	16,50
73	0,0088	15,94
74	0,0095	15,37

a. (10) Izračunajte premijo, ki jo bo oseba plačala ob sklenitvi zavarovanja.

Rešitev: označimo iskano premijo s Π. *Premija mora biti enaka pričakovani sedanji vrednosti obveznosti in stroškov. Veljati mora*

$$\Pi = v^5 \cdot \ddot{a}_{74} \cdot {}_5p_{69} + \alpha\Pi \sum_{j=0}^{4} p_{69} \cdot q_{69+j} + \gamma \cdot v^5 \cdot \ddot{a}_{74} \cdot {}_5p_{69} \,.$$

Iz enačbe sledi

$$\Pi = \frac{v^5 \cdot \ddot{a}_{74} \cdot {}_5p_{69} + \gamma \cdot v^5 \cdot \ddot{a}_{74} \cdot {}_5p_{69}}{1 - \alpha \cdot \sum_{j=0}^{4} {}_jp_{69} \cdot q_{69+j}} \,.$$

Računamo

$${}_5p_{69} = \prod_{j=0}^{4} (1 - q_{69+j}) = 0.9635 \,.$$

Računamo

$$\sum_{j=0}^{4} {}_jp_{69} \cdot q_{69+j} = 0,0279 \,.$$

Dobimo

$$\Pi = 14,03 \,.$$

b. (10) Izračunajte ${}_3V$.

Rešitev: ker v prihodnosti ne bo več vplačil premije, bodo rezervacije pričakovane sedanje vrednosti prihodnjih obveznosti. Po treh letih je oseba stara 72 *let. Pričakovana sedanja vrednost prihodnjih obveznosti je*

$$v^2\ddot{a}_{74} \cdot {}_2p_{72} + \alpha \cdot \Pi \cdot q_{72} + \alpha \cdot \Pi(1 - q_{72}) \cdot q_{73} + \gamma \cdot v^2 \cdot \ddot{a}_{74} \cdot {}_2p_{72} \,.$$

Sledi ${}_3V = 13,95$.